

02组合

一、组合相关概念

1. 组合的定义

一般地，从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的一个组合。

小技巧

- (1) 具体来说，组合的要求是 n 个元素不同，被取出的 m 个元素也不同，而且取出方式为不放回取出；
- (2) 组合取出的 m 个元素不讲求顺序，无序性是组合的本质。例如，从 $\{a, b, c\}$ 中取出两个元素形成两个序列 ab 与 ba ，它们属于两种排列，但却是一种组合。

2. 组合数

组合数：从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中，任意取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示。

3. 组合数公式

组合数公式： $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ， $m \in \mathbf{N}$ ， $n \in \mathbf{N}_+$ ，并且 $m \leq n$ ；特别地，当 $m=0$ 时，有 $C_n^0=1$ 。

【补充说明】

- (1) 具体来说，组合的要求是 n 个元素不同，被取出的 m 个元素也不同，而且取出方式为不放回取出；
 - (2) 组合取出的 m 个元素没有顺序要求，无序性是组合的本质。
- 例如，从 $\{a, b, c\}$ 中取出两个元素形成两个序列 ab 与 ba ，它们属于两种排列，但却是一种组合。

例1

1. 填空。

(1) $C_8^5 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $C_{15}^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $C_{100}^{98} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $C_{10}^3 - C_9^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) $5C_5^3 + 4C_4^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) $C_9^1 C_9^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(7) $\frac{2C_{12}^7 C_5^3}{C_{12}^{12}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(8) $\frac{4C_{10}^5 - C_{10}^4}{C_9^5 - C_9^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 与 C_{n+1}^m 相等的是 () .

A. $\frac{n+1}{m} C_n^m$

B. 800

C. $(n+1)C_n^m$

D. $\frac{n+1}{n+1-m} C_n^m$

练1

3. 假设200件产品中有3件次品，现在从中任取5件，其中至少有2件次品的抽法有 () 种 .

A. $C_3^2 C_{198}^3$

B. $C_3^2 C_{197}^3 + C_3^3 C_{197}^2$

C. $C_{200}^5 - C_{197}^4$

D. $C_{200}^5 - C_3^1 C_{197}^4$

4. 组合数的两个性质

性质一

$$C_n^m = C_n^{n-m} .$$

性质二

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} .$$

小技巧

(1) 性质一反映了组合数的对称性：当 $m > \frac{n}{2}$ 时，不直接计算 C_n^m 而改为计算 C_n^{n-m} ，这样起到了简化运算的效果；

(2) 要注意性质二的灵活运用：顺用可以将一个组合数拆成两个，在进行化简时此种手段可以产生抵消的效果；逆用可以将两个组合数合并为一个，求值时可以循环使用此种手段进行并项 .

例2

4. $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = (\quad)$.

A. 31

B. 32

C. 33

D. 34

5. 已知 $C_{14}^{m-1} + C_{14}^m = C_{15}^{m-3}$ ，则正整数 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

练2

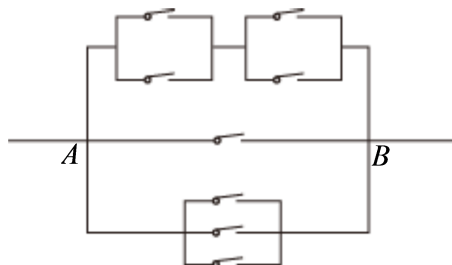
6. 若 $C_{m+1}^3 - C_m^3 = C_m^4$ (m 为正整数且 $m \geq 4$)，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、 常见组合问题

1. 直接法

例1

7. 一电路图如图所示，从A到B共有 _____ 条不同的线路可通电。（用数字作答）



8. 在50件产品中有4件是次品，从中任意抽出5件，至少有三件是次品的抽法共有 _____ 种。

练1

9. 6名同学报考A, B, C三所院校，如果每一所院校至少有1人报考，则不同的报考方法共有（ ）。

- A. 216种 B. 3240种 C. 729种 D. 540种

10. 有6名男医生，5名女医生，从中选出2名男医生，1名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有（ ）。

- A. 60种 B. 70种 C. 75种 D. 150种

11. 在手绘涂色本的某页上画有排成一列的6条未涂色的鱼，小明用红、蓝两种颜色给这些鱼涂色，每条鱼只能涂一种颜色，两条相邻的鱼不都涂成红色，涂色后，既有红色鱼又有蓝色鱼的涂色方法种数为（ ）。

- A. 14 B. 16 C. 18 D. 20

2. 排除法

对于给定附加条件的问题，正面考虑情况较为复杂时，可以考察否定附加条件下问题的情况，然后从无附加条件中排除上述情况即可。

例2

12. 从5名男医生、4名女医生中选3名医生组成一个医疗小分队，要求其中男、女医生都有，则不同的组队方案共有（ ）

A. 70种

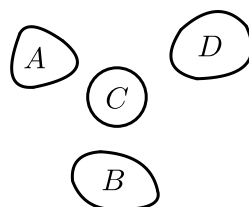
B. 80种

C. 100种

D. 140种

练2

13. 如图, A 、 B 、 C 、 D 为海上四个小岛, 要建三座桥, 将这四个小岛连接起来, 则不同的建桥方案共有 () .



A. 8种

B. 12种

C. 16种

D. 20种

14. A 、 B 之间有6条网线并联, 它们通过的最大信息量分别为1, 1, 2, 2, 3, 4, 现从中任取3条网线, 使这3条网线通过的最大信息量的和不小于6的取法共有 () 种.

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

3. 分组分配法

分堆问题的特点是堆与堆之间的区别仅仅是元素个数, 而不强调元素本身, 因此若出现了若干组元素个数相同的情况, 在采取分步乘法计数原理处理问题之后还需要做除序处理.

(1) 不均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆, 每堆元素数目均不相等, 求其分法种数.

【实例】10本书分成2, 3, 5三堆, 其分法种数为 $C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = 2520$.

(2) 均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆, 每堆元素数目都相等, 求其分法种数.

【实例】9本书分成3, 3, 3三堆, 其分法种数为 $\frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{A_3^3} = 280$.

(3) 部分均匀分组

【模型】 n 个不同元素分成 m 组, 恰有 r 堆元素数目都相等, 求其分法种数.

【实例】10本书分成2, 4, 4三堆, 其分法种数为 $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{A_2^2} = 1575$.

小技巧

不同元素的分堆问题, 有等分、不等分、部分等分之别, 一般地平均分成 n 堆, 必须除以 $n!$, 如果有 m 堆元素个数相等, 必须除以 $m!$.

例3

15. 有6本不同的书

- (1) 甲、乙、丙3人每人2本, 有多少种不同的分法?
- (2) 分成3堆, 每堆2本, 有多少种不同的分堆方法?
- (3) 分成3堆, 一堆1本, 一堆2本, 一堆3本, 有多少种不同的分堆方法?
- (4) 分给甲、乙、丙3人, 一人1本, 一人2本, 一人3本, 有多少不同的分配方法?
- (5) 分给甲1本、乙1本、丙4本, 有多少种不同的分配方法?
- (6) 分成3堆, 有2堆各一本, 另一堆4本, 有多少种不同的分堆方法?
- (7) 摆在3层书架上, 每层2本, 有多少种不同的摆法?
- (8) 假设6本书相同, 分给甲、乙、丙三人, 每人至少一本, 则有多少种不同的分法?

练3

16. 将4名学生分配到甲、乙、丙3个实验室准备实验, 每个实验室至少分配1名学生的不同分配方案共有 () .

- A. 12种 B. 24种 C. 36种 D. 48种

17. 10个人参加义务劳动, 分成4组, 各组分别为2人、2人、2人、4人, 则不同的分组方案共有 _____ 种. (用数字作答)

18. 将8本不同的书分成4堆, 每堆2本, 有 _____ 种不同的分法.

19. 9名会员分成三组讨论问题, 每组3人, 则不同的分组方法种数为 () .

- A. $C_9^3 C_6^3$ B. $A_9^3 A_6^3$ C. $\frac{C_9^3 C_6^3}{A_3^3}$ D. $A_9^3 A_6^3 A_3^3$

20. 数学活动小组由12名同学组成, 现将这12名同学平均分成四组分别研究四个不同课题, 且每组只研究一个课题, 并要求每组选出一名组长, 则不同的分配方案有 () 种.

- A. $\frac{C_{12}^3 C_9^3 C_6^3}{A_3^3} A_4^4$ B. $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 3^4$ C. $\frac{C_{12}^3 C_9^3 C_6^3}{A_4^4} 4^3$ D. $C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 4^3$

4. 隔板法

n 个相同元素, 分成 $m(m \leq n)$ 组, 每组至少一个的分组问题——把 n 个元素排成一排, 从 $n-1$ 个空中选 $m-1$ 个空, 各插一个隔板, 有 C_{n-1}^{m-1} 种方法.

例4

21. 8个相同的球放入标号为1, 2, 3的三个盒子中, 每个盒子中至少有一个, 共有 _____ 种不同的放法.

22.

将20个相同的球全部放入编号为1, 2, 3的盒子里, 使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号, 则不同的放球方法共有 _____ 种. (用数字作答)

23. 8个完全相同的球全部放入3个不同的盒子中, 有 _____ 种不同的分法.

练4

24. 某校准备组建一个由12人组成篮球队, 这12个人由8个班的学生组成, 每班至少一人, 名额分配方案共 _____ 种.

25. 某运输公司有7个车队, 每个车队的车多于4辆, 现从这7个车队中抽出10辆车, 且每个车队至少抽1辆, 组成一个运输队, 则不同的抽法有 () 种.

- A. 84 B. 120 C. 63 D. 301

26. 数学老师给小明布置了10道数学题, 要求小明按照序号从小到大的顺序, 每天至少完成一道, 如果时间允许, 也可以多做, 甚至在一天全部做完, 则小明不同的完成方法种数为 () .

- A. 55 B. 90 C. 425 D. 512

27. 6个相同的小球放入4个编号为1, 2, 3, 4的盒子, 求下列方法的种数.

- (1) 每个盒子都不空.
(2) 恰有一个空盒字.
(3) 恰有两个空盒子.

5. 综合问题

28. 现有16张不同的卡片, 其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各4张. 从中任取3张, 要求这3张卡片不能是同一种颜色, 且红色卡片至多1张, 不同取法的种数为 () .

- A. 232 B. 252 C. 472 D. 484

29. 编号为1、2、3、4、5、6、7的七盏路灯, 晚上用时只亮三盏灯, 且任意两盏亮灯不相邻, 则不同的开灯方案有 () .

- A. 60种 B. 20种 C. 10种 D. 8种

30. 某城市新修建的一条道路上有12盏路灯, 为了节省用电, 而不影响照明, 可以熄灭其中的3盏灯, 但两端的灯不能熄灭也不能熄灭相邻的两盏灯, 则熄灭的方法有 () .

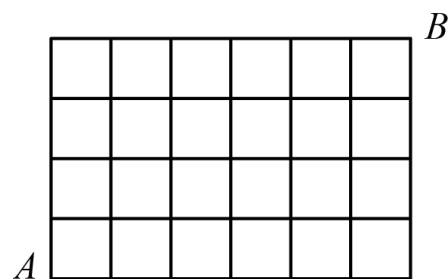
- A. C_8^3 种 B. A_8^3 种 C. C_9^3 种 D. C_{11}^3 种

31. 3个人坐在一排6个座位上, 问:

- (1) 3个人都相邻的坐法有多少种?
(2) 空位都不相邻的坐法有多少种?

(3) 空位至少有2个相邻的坐法有多少种？

32. 某城市有7条南北向街道，5条东西向街道（如下图）：



(1) 图中共有多少个矩形？

(2) 从A点走到B点的最短路线的走法有多少种？

33. 完成下列各题．

(1) 将1, 2, 3三个数字填在 3×3 的方格中，使得横格与竖格没有重复的数字，有多少种不同的填法 _____ ．

(2) 甲、乙、丙、丁四名同学和1名老师站成一排合影留念，老师站在中间，甲同学不和老师站在一起的不同站法种数为() ．

A. 120种

B. 24种

C. 16种

D. 12种

(3) 如图，小明从街道的E处出发，先到F处与小红会合，再一起到位于G处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为() ．



A. 24

B. 18

C. 12

D. 9

(4) 有两条平行线，第一条直线上取4个点，第二条直线上取6个点，以其中3个点为顶点作三角形，一共可以作出 _____ 个．