

01排列

一、两种计数原理

1. 分类加法计数原理

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法．

【补充说明】

分类加法原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事．

例1

1. 某学生去书店，发现3本好书，决定至少买其中一本，则购买方式共有（ ）．

A. 3种

B. 6种

C. 7种

D. 9种

【答案】 C

【解析】 可分三类：①购买1本，②购买2本，③购买3本，
总情况数有： $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7$ （种），
所以购书方案有7种．
故选C．

【标注】【知识点】分类加法计数原理

2. 从0, 1, 2, 3, 4中任选两个不同的数字组成一个两位数，其中偶数的个数是（ ）．

A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】 C

【解析】 个位数字是0的偶数有4个；个位数字是2或4的偶数各有3个，故总计10个．

【标注】【知识点】分类加法计数原理

练1

3. 如果一条直线与一个平面平行，那么称此直线与平面构成一个“平行线面组”，在一个长方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“平行线面组”的个数是（ ）.
- A. 60 B. 48 C. 36 D. 24

【答案】 B

【解析】 一个长方体的面可以和它相对的面上的4条棱和2条对角线组成6个，
一共有6个面，共有 $6 \times 6 = 36$ 种结果，
长方体的对角面组成两组，共有6个对角面，共有12种结果，
根据分类计数原理知共有 $36 + 12 = 48$ 种结果。
故选B.

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；已知线面位置关系判定结论的问题；分类加法计数原理

4. 如果某年年份的各位数字之和为7，我们称该年为“七巧年”。例如，今年年份2014的各位数字之和为7，所以今年恰为“七巧年”。那么从2000年到2999年中“七巧年”共有（ ）.
- A. 24个 B. 21个 C. 19个 D. 18个

【答案】 B

【解析】 依题意，只需个位、十位，百位数字之和为5即可。
又 $5 = 5 + 0 + 0 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$ ，
当后三位数字为5、0、0或3、1、1或2、2、1时，各有 $A_3^1 = 3$ 个；
当后三位数字为4、1、0或3、2、0时，各有 $A_3^3 = 6$ 个；
所以共有 $3 \times 3 + 6 \times 2 = 21$ 个。
故选B.

【标注】【知识点】分类加法计数原理

2. 分布乘法计数原理

做一件事，完成它需要分成 n 个子步骤，做第一个步骤有 m_1 种不同的方法，做第二个步骤有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法。

【补充说明】

分步乘法原理针对的是“分步”问题，各步之间相互关联，只有把各个步骤依次全部完成，才能把这件事做完。

 例2

5. 有不同的语文书9本，不同的数学书7本，不同的英语书5本，从中选出不属于同一学科的书2本，则不同的选法有（ ）种。
- A. 21 B. 315 C. 143 D. 153

【答案】 C

【解析】 根据题意，从中选出不属于同一学科的书2本，包括3种情况：

- ①一本语文、一本数学，有 $9 \times 7 = 63$ 种取法；
 - ②一本语文、一本英语，有 $9 \times 5 = 45$ 种取法；
 - ③一本数学、一本英语，有 $7 \times 5 = 35$ 种取法，
- 则不同的选法共有 $63 + 45 + 35 = 143$ 种。
- 故选C。

【标注】 【知识点】 加法原理与乘法原理的综合运用

 练2

6. 某单位安排甲、乙、丙、丁4名工作人员从周一到周五值班，每天有且只有1人值班，每人至少安排一天且甲连续两天值班，则不同的安排方法种数为（ ）。
- A. 18 B. 24 C. 48 D. 96

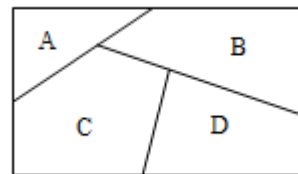
【答案】 B

【解析】 根据题意，分2步进行分析：

- ①，甲连续2天上班，共有（周一，周二），（周二，周三），（周三，周四），（周四，周五）四种情况，
 - ②，剩下三个人进行全排列，有 $A_3^3 = 6$ 种排法，
- 因此共有 $4 \times 6 = 24$ 种排法，
- 故选：B。

【标注】 【知识点】 分步乘法计数原理

7. 如图，用5种不同颜色给图中的 A, B, C, D 四个区域涂色，规定一个区域只涂一种颜色，相邻区域必须涂不同的颜色，则不同的涂色方案共有 _____ 种．



【答案】 180

【解析】 由题意，由于规定一个区域只涂一种颜色，
相邻的区域颜色不同，可分步进行，区域 A 有5种涂法，
 B 有4种涂法， C 有3种， D 有3种涂法，
 $\therefore$ 共有 $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ 种不同的涂色方案．
故答案为180．

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

8. 回答下列各题．

- (1) 将4封信投入3个邮筒，有多少种不同的投法？
(2) 三位旅客到4个旅馆住宿，有多少种不同的住宿方法？

【答案】 (1) 3^4 种．

(2) 4^3 种．

【解析】 (1) 完成这件事可以分作四步，
第一步投第一封信，可以在3个邮筒中任选一个，因此有3种投法；
第二步投第二封信，同样有3种投法；
第三步投第三封信，也同样有3种投法；
第四步投第四封信，仍然有3种投法．由分步计数原理，可得出不同的投法有
 $N = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ (种) ．

(2) 分三步，每位旅客都有4种不同的住宿办法，因而共有不同的方法
 $N = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$ (种) ．

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

二、两种基本计数原理的综合应用

解决有些计数问题时需要兼顾两种基本计数原理，此时要结合题目内容仔细分析“分类”与“分步”的顺序，而且，在具体的“分类”和“分步”的过程中，要明确“分类”的标准和“分步”的步骤，避免重复或遗漏的情况。

对于较复杂的一类问题，甚至会出现“分类中有分步，分步中有分类”的情况。

例3

9. 在5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中至少有2只鞋子原来是同一双的可能取法种数为（ ）。

A. 30

B. 90

C. 130

D. 140

【答案】C

【解析】第一类：恰有2只鞋子原来是同一双的取法是先从5双不同的鞋子中任取一双鞋子，有 C_5^1 种取法，

再从剩余4双不同的鞋子中任取两种的鞋子各一只，有 $C_4^2 C_2^1 C_2^1$ 种取法，

$\therefore$ 恰有2只鞋子原来是同一双的不同取法有 $C_5^1 C_4^2 C_2^1 C_2^1 = 120$ 种取法，

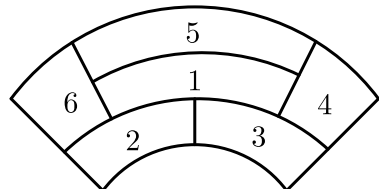
第二类：有4只鞋子原来是同一双的取法是先从5双不同的鞋子中任取2双，有 $C_5^2 = 10$ 种取法，根据分类计数原理，共有 $120 + 10 = 130$ 种。

故选C。

【标注】【知识点】计数原理综合

练3

10. 某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为6个部分（如图）现要栽种4种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有 ____ 种。（以数字回答）



【答案】120

【解析】方法一：若②⑤同色，④⑥同色，有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ，

若③⑤同色，④⑥同色，有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ，

若②⑤同色，③⑥同色，有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ，

若②⑤同色，②④同色，有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ，

若②④同色，③⑥同色，有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ，

共有 $5 \times 24 = 120$ 。

方法二：以区域为主分步计数（从相邻颜色最多的区域开始（最大相邻原则）），

分4步涂色，第一步先涂1有4种，

第二步再涂2（与1不同色）有3种，

第三步涂3（与1、2不同色）有2种。

4和6都有2种，其中4和6同色的有1种，不同色的有3种。

同色时，5有2种；不同色时，5只有1种。

故总共有 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 120$ 。

方法三：以颜色为主分步计数，易知4种颜色都得用到（格1与其它的都不同色，而涂剩下的格子两种颜色显然不够）。

①先涂1，有4种；

②剩下3种颜色涂剩下5个格子，必有一种颜色只在一个格子出现，从剩余5个格子中选一个涂这种颜色有 $3 \cdot C_5^1 = 15$ 种；

③剩余4个格子用剩余的两种颜色涂只有2种涂法，由乘法原理共有 $4 \cdot 15 \cdot 2 = 120$ 种。

方法四：用分类思想解决。

易知4种颜色都得用到，而且没有一种颜色会涂3个格子，最多涂两个。因此4种颜色涂6个格子的方案只能是：两种颜色各涂一个格子，另两种要各涂两个格子。

①2与5同色、4与6同色，则有 A_4^4 ；②3与5同色、4与6同色，则有 A_4^4 ；

③2与5同色、3与6同色，则有 A_4^4 ；④3与5同色、2与4同色，则有 A_4^4 ；

⑤2与4同色、3与6同色，则有 A_4^4 ；

所以根据加法原理得涂色方法总数为 $5A_4^4 = 120$ 。

【标注】【知识点】分类加法计数原理；分步乘法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用

11. 现有5幅不同的国画，2幅不同的油画，7幅不同的水彩画。

（1）从中任选一幅画布置房间，有几种不同的选法？

（2）从这些国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间，有几种不同的选法？

（3）从这些画中选出两幅不同种类的画布置房间，有几种不同的选法？

【答案】（1）14。

（2）70。

(3) 59 .

【解析】 (1) 根据题意, 共有5幅不同的国画, 2幅不同的油画, 7幅不同的水彩画, 共有

$$5 + 2 + 7 = 14 \text{ 幅画,}$$

从中任选一幅画布置房间, 有14种选法.

(2) 分三步完成, 第一步选国画有5种,

第二步选油画有2种,

第三步选水彩画有7种,

根据分步计数原理得, 共有 $5 \times 2 \times 7 = 70$ 种.

(3) 根据题意, 分三类情况讨论:

第一类, 选国画和油画共有 $5 \times 2 = 10$ 种,

第二类, 选国画和水彩画共有 $5 \times 7 = 35$ 种,

第三类, 选油画和水彩画共有 $2 \times 7 = 14$ 种,

根据分类计数原理共有 $10 + 35 + 14 = 59$ 种.

【标注】【知识点】分类加法计数原理; 加法原理与乘法原理的综合运用; 分步乘法计数原理

三、排列

1. 定义

一般地, 从 n 个不同的元素中任取 $m (m \leq n)$ 个元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 排列数

从 n 个不同的元素中取出 $m (m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 用符号 A_n^m 表示.

3. 排列数公式

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1), \quad m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } m \leq n.$$

4. 全排列

一般地, n 个不同元素全部取出的一个排列, 叫做 n 个不同元素的一个全排列.

全排列公式 $A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

5. 阶乘

正整数由1到 n 的连续乘积, 叫作 n 的阶乘, 用 $n!$ 表示.

所以 n 个不同元素的全排列公式可以写成 $A_n^n = n!$.

规定: $0! = 1$.

因此, 借助于阶乘的定义, 可以将排列数公式改写成: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

例1

12. 计算:

(1) $A_{10}^2 =$ ____ .

(2) $2A_3^3 =$ ____ .

(3) $A_9^4 - A_9^3 =$ ____ .

(4) $A_9^1 A_9^2 =$ ____ .

(5) $\frac{2A_{12}^7 A_5^3}{A_{12}^{12}} =$ ____ .

【答案】 (1) 90

(2) 12

(3) 2520

(4) 648

(5) 1

【解析】 (1) $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$.

(2) $2A_3^3 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$.

(3) $A_9^4 - A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 - 9 \times 8 \times 7 = 2520$.

(4) $A_9^1 A_9^2 = 9 \times 9 \times 8 = 648$.

(5) $\frac{2A_{12}^7 A_5^3}{A_{12}^{12}} = \frac{2 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1$.

【标注】【知识点】排列

13. 已知自然数 x 满足 $3A_{x+1}^3 = 2A_{x+2}^2 + 6A_{x+1}^2$, 则 $x =$ () .

A. 3

B. 5

C. 4

D. 6

【答案】 C

【解析】 $\because$ 自然数 x 满足 $3A_{x+1}^3 = 2A_{x+2}^2 + 6A_{x+1}^2$,

$$\therefore 3(x+1)x(x-1) = 2(x+2)(x+1) + 6(x+1)x,$$

由于 x 是自然数, 则 $3x(x-1) = 2(x+2) + 6x$,

$$\text{即 } 3x^2 - 11x - 4 = 0,$$

$$\text{解得 } x = -\frac{1}{3} \text{ (舍) 或 } x = 4,$$

$$\therefore x = 4.$$

故选C.

【标注】【知识点】排列数计算

练1

14. 已知 $A_n^2 = 7A_{n-4}^2$, 则 n 的值为().

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】A

【解析】根据排列数的公式, 得;

$$\begin{cases} n-4 \geq 2 \\ n \geq 2 \\ n(n-1) = 7(n-4)(n-5) \end{cases},$$

解得 $n = 7$, 或 $n = \frac{10}{3}$ (不合题意, 应舍去);

$\therefore n$ 得值是7.

故选A.

【标注】【知识点】排列

15. $(n-3)(n-4)\cdots(n-9)(n-10) (n \in \mathbf{N}, n > 10)$ 可表示为().

A. A_{n-3}^9

B. A_{n-3}^8

C. A_{n-3}^7

D. C_{n-3}^7

【答案】B

【解析】根据题意, $(n-3)(n-4)\cdots(n-9)(n-10)$

$$= \frac{(n-3) \times (n-4) \times \cdots \times 1}{(n-11) \times \cdots \times 1} = A_{n-3}^8.$$

故选B.

【标注】【知识点】排列数计算

16. 若不等式 $A_8^{m+2} < 6A_8^m$ 成立, 则 $m =$ _____ .

【答案】 6

【解析】 $A_8^{m+2} < 6A_8^m$, 即 $\frac{A_8^{m+2}}{A_8^m} < 6$,
 即 $\frac{8 \times 7 \times \cdots (9-m) \times (8-m) \times (7-m)}{8 \times 7 \times \cdots (9-m)} < 6$,
 $\therefore (8-m)(7-m) < 6$, $m^2 - 15m + 50 < 0$, $m \in (5, 10)$,
 又 $\because m+2 \leq 8$, $n \in \mathbf{N}^*$,
 $\therefore m = 6$.

【标注】 【知识点】 排列数计算

17. 下列等式中不成立的是 () .

- A. $A_n^3 = (n-2)A_n^2$ B. $\frac{1}{n}A_{n+1}^n = A_{n+1}^{n-1}$ C. $nA_{n-1}^{n-2} = A_n^n$ D. $\frac{n}{n-m}A_{n-1}^m = A_n^m$

【答案】 B

【解析】 A 选项: $A_n^3 = 12 \times (n-1) \times (n-2)$
 $A_n^2 = n \times (n-1)$,
 $\therefore A_n^3 = (n-2)A_n^2$, 故A正确;
 B 选项: $A_{n+1}^n = (n+1)!$
 $A_{n+1}^{n-1} = (n+1) \times n \times (n-1) \times \cdots \times 3$,
 $\therefore \frac{1}{n}A_{n+1}^n \neq A_{n+1}^{n-1}$, 故B错误;
 C 选项:
 $A_{n-1}^{n-2} = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
 $A_n^n = n!$,
 $\therefore nA_{n-1}^{n-2} = A_n^n$, 故C正确;
 D 选项:
 $A_{n-1}^m = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m)$
 $A_n^m = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)$,
 $\therefore \frac{n}{n-m}A_{n-1}^m = A_n^m$, 故D正确.
 故选 B.

【标注】 【知识点】 排列

四、常见排列问题

1. 优先法（元素优先与位置优先）

如果某些元素或位置特殊，则优先安排特殊元素或特殊位置．

例1

18. 甲、乙、丙、丁四名同学和1名老师站成一排合影留念，老师站在中间，甲同学不和老师站在一起的不同站法种数为（ ）．

- A. 120种 B. 24种 C. 16种 D. 12种

【答案】 D

【解析】 老师必须站在正中间，则老师的位置是指定的；甲同学不与老师相邻，则甲同学站两端，故不同站法种数为： $C_2^1 A_3^3 = 12$ ．

【标注】 【知识点】特殊元素优先法

【素养】 逻辑推理

19. 用数字0, 1, 2, 3, 4组成没有重复数字的五位数，其中比30000大的偶数共有（ ）．

- A. 18 B. 12 C. 30 D. 24

【答案】 C

【解析】 根据题意，万位上只能排3, 4，若万位上是3，则有 $A_3^3 C_3^1 = 18$ 个；若万位上是4，则有 $A_3^3 C_2^1 = 12$ 个，所以共有 $18 + 12 = 30$ 个．

故选C．

【标注】 【知识点】数字问题

练1

20. 某台小型晚会由6个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在前两位，节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位．该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 _____ 种

【答案】 42

【解析】分两类：（1）若甲排在第一位，则有 $A_4^4 = 24$ 种排法

（2）若甲排在第二位，则有 $3A_3^3 = 18$ 种排法

【标注】【知识点】特殊元素优先法

21. 从6名志愿者中选出4人，分别从事搜救、医疗、心理辅导、后勤四种不同工作，若其中甲、乙两名志愿者都不能从事心理辅导工作，则不同的选派方案共有（ ）。

A. 280种 B. 240种 C. 180种 D. 96种

【答案】B

【解析】由于甲乙有特殊条件，故先分配甲乙。若不选择甲乙，则剩余四人均可做剩下四项工作，共有方案 $A_4^4 = 24$ 种。若选择甲乙中的一个，则有 $2 \times C_4^3 = 8$ 种选择方案，分配工作时，甲或乙有3种分配方案，其余三人做剩余三项，共有方案 $3 \times 8 \times A_3^3 = 144$ 种。若甲乙两人都选，则有 $C_4^2 = 6$ 种选择方案，分配工作时，有方案 $A_2^2 A_3^3 = 12$ 种，共有方案 $12 \times 6 = 72$ 种，综上所述，共有选派 $24 + 144 + 72 = 240$ 种。

【标注】【知识点】特殊元素优先法

2. 捆绑法（相邻排列问题）

（1）模型：将 n 个不同元素排成一排，其中某 k 个元素相邻。

（2）思路：将相邻的 k 个元素“捆绑”在一起看成一个整体，此时变为 $n - k + 1$ 个元素的全排列，排法为 A_{n-k+1}^{n-k+1} ；再将“捆绑”在一起的元素内部排列，排法为 A_k^k 。根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} \cdot A_k^k$ 种。

例2

22. A, B, C, D, E 五人并排站成一排，如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边，那么不同的排法共有（ ）。

A. 60种 B. 48种 C. 36种 D. 24种

【答案】D

【解析】根据题意， A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边，视 A, B 为一个元素，且只有一种排法；将 A, B 与其他3个元素，共4个元素排列，即 $A_4^4 = 24$ ，

则符合条件的排法有 $1 \times 24 = 24$ 种 .

【标注】【知识点】捆绑法

练2

23. 一排9个座位坐了3个三口之家 . 若每家人坐在一起 , 则不同的坐法种数为 () .

- A. $3 \times 3!$ B. $3 \times (3!)^3$ C. $(3!)^4$ D. $9!$

【答案】C

【解析】根据题意 , 分2步进行 : 将每个三口之家都看成一个元素 , 每个家庭都有 A_3^3 种排法 ; 三个三口之家共有 $A_3^3 \cdot A_3^3 \cdot A_3^3 = (A_3^3)^3$ 种排法 , 将三个整体元素进行排列 , 共有 A_3^3 种排法 故不同的坐法种数为 $(A_3^3)^3 \cdot A_3^3 = (A_3^3)^4 = (3!)^4$ 故选C .

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】捆绑法

24. 停车场划出一排12个停车位置 , 今有8辆不同的车需要停放 , 若要求剩余的4个空车位连在一起 , 则不同的停车方法有 () .

- A. A_{12}^8 种 B. $2A_8^8 A_4^4$ 种 C. $8A_8^8$ 种 D. $9A_8^8$ 种

【答案】D

【解析】(捆绑问题) 将4个空车位视为一个元素 , 与8辆车共9个元素进行全排列 , 共有 $A_9^9 = 9A_8^8$ (种) 不同的停车方法 .

【标注】【知识点】捆绑法

25. 现将5张连号的电影票分给甲乙等5个人 , 每人一张 , 且甲乙分得的电影票连号 , 则共有 _____ 种不同的分法 (用数字作答) .

【答案】48

【解析】将5张电影票分给甲 , 乙等5人 , 每人一张 ,
且甲乙分得的电影票是连号 , 相当于将5人进行全排列 ,
且甲、乙必须相邻 ,

故共有 $A_4^4 A_2^2 = 48$ 种不同的分法 .

【标注】【知识点】捆绑法

3. 插空法 (间隔排列问题)

(1) 模型 : 将 n 个不同的元素排成一排 , 其中某 k 个元素互不相邻 ($k \leq n - k + 1$) .

(2) 思路 :

① 将没有要求的 $n - k$ 个元素全排列 , 排列方法有 A_{n-k}^{n-k} 种 ;

② 将要求互不相邻的 k 个元素插入 $n - k + 1$ 个空隙中 , 相当于从 $n - k + 1$ 个空隙中选取 k 个分配给互不相邻的那 k 个元素 , 其排列方法有 A_{n-k+1}^k 种 . 根据分步乘法计数原理 , 符合条件的排法种数有 $A_{n-k}^{n-k} \cdot A_{n-k+1}^k$ 种 .

例3

26. 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成的奇偶数字相间且无重复数字的六位数的个数是 () .

A. 60

B. 48

C. 36

D. 24

【答案】A

【解析】将数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成的奇偶数字相间 , 不重复的排成一列 ,
第一个数为奇数有 $A_3^3 \times A_3^3 = 36$ 个 , 第一个数为偶数有 $A_3^3 \times A_3^3 = 36$ 个 ,
根据分类计数原理知共有 $36 + 36 = 72$ 个 ,
其中不能组成 6 位数 , 即第一个数字为 0 的有 $A_2^2 \times A_3^3 = 12$ 种 ,
故能组成六位数的个数是 $72 - 12 = 60$ 个 ;
故答案为 60 .
故选 A .

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用 ; 分步乘法计数原理 ; 分类加法计数原理 ; 排列

练3

27. 3 个老师和 5 个同学照相 , 老师不能坐在最左端 . 任何老师不能相邻 , 则不同的坐法种数是 () .

A. A_8^8

B. $A_5^5 A_3^3$

C. $A_5^5 A_3^3$

D. $A_5^5 A_8^3$

【答案】C

【解析】把3个老师插入到5个同学所形成的5个间隔中（不包含最左端），故有 $A_5^5 A_5^3$ 种。

故选C。

【标注】【知识点】插空法

28. 某班星期一上午安排5节课，若数学2节，语文、物理、化学各1节，且物理、化学不相邻，2节数学相邻，则星期一上午不同课程安排种数为（ ）。

A. 6 B. 12 C. 24 D. 48

【答案】 B

【解析】2节数学课相邻可当作一个整体即为一个元素，先与一节语文课全排即 A_2^2 ，物理化学不相邻，用插空法，数学整体与语文全排有3个空位，故排物理化学为 A_3^2 ，所以答案为

$$A_2^2 \cdot A_3^2 = 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 12.$$

故选B。

【标注】【知识点】插空法

29. 某电视台曾在某时间段连续播放5个不同的商业广告，现在要在该时间段只保留其中的2个商业广告，新增播一个商业广告与两个不同的公益宣传广告，且要求两个公益宣传广告既不能连续播放也不能在首尾播放，则不同的播放顺序共有（ ）。

A. 60种 B. 120种 C. 144种 D. 300种

【答案】 B

【解析】由题意，要在该时间段只保留其中的2个商业广告，有 $A_5^2 = 20$ 种方法，增播一个商业广告，利用插空法有3种方法，再在2个空中，插入两种不同的公益宣传广告，共有2种方法，根据乘法原理，共有 $20 \times 3 \times 2 = 120$ 种方法。

故选B。

【标注】【知识点】插空法；分步乘法计数原理

4. 排除法（正难则反）

对于给定附加条件的问题，正面考虑情况较为复杂时，可以考察否定附加条件下问题的情况，然后从无附加条件中排除上述情况即可。

例4

30. 从4名男同学和6名女同学中选取3人参加某社团活动，选出的3人中男女同学都有的不同选法种数是_____。（用数字作答）

【答案】 96

【解析】 根据题意，在4名男同学和6名女同学共10名学生中任取3人，有 $C_{10}^3 = 120$ 种，其中只有男生的选法有 $C_4^3 = 4$ 种，只有女生的选法有 $C_6^3 = 20$ 种，
则选出的3人中男女同学都有的不同选法有 $120 - 4 - 20 = 96$ 种。
故答案为：96。

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 特殊位置优先法

练4

31. 某班班会准备从甲、乙等7名学生中选派4名学生发言，要求甲、乙两人至少有一人参加，当甲、乙同时参加时，他们两人的发言不能相邻，那么不同的发言顺序的种数为（ ）。
- A. 3600 B. 520 C. 720 D. 600

【答案】 D

【解析】 根据题意，分2种情况讨论，
若只有甲乙其中一人参加，有 $C_2^1 \cdot C_5^3 \cdot A_4^4 = 480$ 种情况；
若甲乙两人都参加，有 $C_2^2 \cdot C_5^2 \cdot A_4^4 = 240$ 种情况；
其中甲乙相邻的有种 $C_2^2 \cdot C_5^2 \cdot A_3^3 \cdot A_2^2 = 120$ 情况；
则不同的发言顺序种数 $480 + 240 - 120 = 600$ 种。
故选D。

【标注】 【知识点】 排列；排除法；分类加法计数原理；分步乘法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用

32. 甲、乙、丙、丁、戊5人站成一排，要求甲、乙均不与丙相邻，则不同的排法种类为（ ）。
- A. 72种 B. 52种 C. 36种 D. 24种

【答案】 C

【解析】由题意得 $A_5^5 - 2A_2^2A_4^2 - A_3^3A_3^3 = 36$ ，故选C。

【标注】【知识点】排除法

5. 除序法

在有些排列问题中，某些元素的前后顺序是固定的（但是不一定相邻），具体如下：

（1）模型：将 $m+n$ 个不同的元素排成一排，其中 m 个元素之间的顺序固定不变，求不同的排法种数的方法。

（2）思路：

①整体法：先将 $m+n$ 个元素全排列，共有 A_{m+n}^{m+n} 种排列方法。然后任取一种排列，固定另外 n 个元素的位置不动，将 m 个元素交换顺序，共有 A_m^m 种排列方法，而其中只有一种排列是我们所需要的，因此共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种不同的排列方法。

②插空法：先从 $m+n$ 个位置选出 n 个进行排列，然后将顺序固定的 m 个元素插入相应空当中，所以排法种数为 $A_{m+n}^n \times 1 = A_{m+n}^n$ 种。

例5

33. A、B、C、D、E五人站成一排，如果A必须站在B的左边（A、B可以不相邻），则不同的排法有（ ）。

A. 24种

B. 60种

C. 90种

D. 120种

【答案】B

【解析】（消序问题）5个人全排列有 $5! = 120$ （种），

A在B左边和A在B右边的情形一样多，

所以不同排法有 $\frac{1}{2} \times 120 = 60$ （种）。

【标注】【知识点】倍缩法

练5

34. 六名同学站一排照相，要求A、B、C三人按从左到右的顺序站（可以不相邻，也可以相邻），则不同的排法共有（ ）。

A. 720种

B. 360种

C. 120种

D. 90种

【答案】C

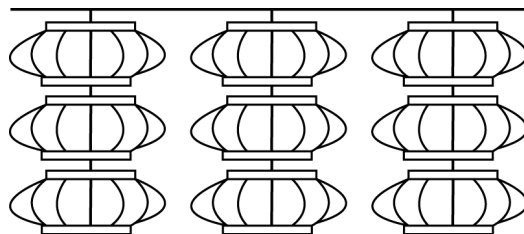
【解析】六名学生全排有 A_6^6 种排法，

A, B, C 三人按从左到右的顺序站只是其中的 $\frac{1}{A_3^3}$ ，

所以 A, B, C 三人按从左到右的顺序站的不同排法有 $\frac{1}{A_3^3} \times A_6^6 = 120$ （种）。

【标注】【知识点】倍缩法

35. 元宵节灯展后，如图悬挂有9盏不同的花灯需要取下，每次取1盏，共有 _____ 种不同取法。（用数字作答）



【答案】1680

【解析】根据题意，不同的取法有： $\frac{A_9^9}{A_3^3 A_3^3 A_3^3} = 1680$ 。

故答案为：1680。

【标注】【知识点】倍缩法

6. 错位排列问题

（1）模型：将编号为 $1 \sim n$ 的 n 个小球放入编号为 $1 \sim n$ 的 n 个盒子中，规定 i 号小球不许放入 i 号盒子，求不同的放法种数，此种排列称为全错位排列，相应的排列数称为全错位排列数。

（2）当 $n = 2, 3, 4, 5$ 时的全错位排列数各为1, 2, 9, 44。关于5、6、7个元素的错位排列的计算，可以用剔除法转化为2个、3个、4个元素的错位排列的问题。

【拓展】 n 个元素的全错位排列数公式为：

$P_n = (n!) \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right]$ ，有兴趣的同学可以利用数列的知识进行推导。

例6

36. 同寝室4人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送来的贺卡，则四张贺年卡不同的分配方式有 _____。

【答案】9

【解析】 此题可以看成是将数字1, 2, 3, 4填入标号为1, 2, 3, 4的四个方格里，
每个格子填一个数字并且每个方格的标号与所填数不同的填法问题，
所以先将1填入2至4号的3个方格里有3种方法，
第二步把被填入方格的对应数字，填入其他3个方格，又有3种填法，
第三步，将剩下的2个数字填入剩下的2个格子中，只有一种填法，
故共有9种方法。

【标注】 【知识点】 错位法

7. 综合问题

练6

37. 由1, 2, 3, ..., 8组成无重复数字的八位数，要求1与2相邻，3与4相邻，7与8相邻，5与6不相邻，共有____种排法。

【答案】 576

【解析】 捆绑与插空相结合，相邻元素捆绑，形成3个大元素，每一个大元素中两个小元素均能排列，故第一步先排3个大元素，有 $2^3 A_3^3 = 48$ 种，第二步不相邻元素插空，由3个大元素形成四个空，将5, 6插入有 A_4^2 种。∴共有 $2^3 A_3^3 A_4^2 = 576$ （种）。

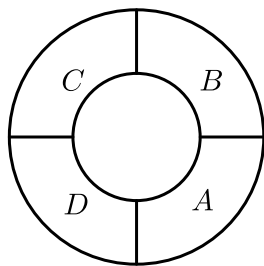
【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 捆绑法

【知识点】 插空法

【知识点】 分步乘法计数原理

38. 如图，一环形花坛分成A, B, C, D四块，现有4种不同的花供选种，要求在每块里种1种花，且相邻的2块种不同的花，则不同的种法总数为（ ）。



A. 96

B. 84

C. 60

D. 48

【答案】 B

【解析】 方法一：第一步给A区域选花，有4种选择，
第二步给B区域选花，有3种选择，
第三步给C区域选花，
若A、C选不同种花，则C有2种选择，此时D有2种选择；
若A、C选择的花相同，则C有1种选择，此时D有3种选择。
故总共有 $4 \times 3 \times (2 \times 2 + 1 \times 3) = 84$ (种)。

方法二：以花为主分类计数，按用花的多少分三类。

- ①用4种花时，有 A_4^4 种；
 - ②用3种花时，则AC同花或BD同花，分别都有 A_4^3 种；
 - ③用2种花时，则AC同花且BD同花，有 A_4^2 种，
- 总共有 $A_4^4 + 2A_4^3 + A_4^2 = 84$ 种，选B。

方法三：以不相邻区域为主分类计数，

首先A有4种可选。

当BD同色时，B有3种，C有3种；

当BD不同花时，B有3种，D有2种，C有2种。

由加法和乘法原理可得共有 $4 \times 3 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 84$ 种。

【标注】 【知识点】 染色问题

39. 《红海行动》是一部现代化海军题材影片，该片讲述了中国海军“蛟龙突击队”奉命执行撤侨任务的故事。撤侨过程中，海军舰长要求队员们依次完成六项任务，并对任务的顺序提出了如下要求：重点任务A必须排在前三位，且任务E、F必须排在一起，则这六项任务的不同安排方案共有（ ）。
- A. 240种 B. 188种 C. 156种 D. 120种

【答案】 D

【解析】 根据题意，由于任务A必须排在前三位，分3种情况讨论：

- ①、A排在第一位，
任务E、F必须排在一起，则任务E、F相邻的位置有4个，考虑两者的顺序，有2种情况，
将剩下的3个任务全排列，安排在其他三个位置，有 $A_3^3 = 6$ 种安排方法，
则此时有 $4 \times 2 \times 6 = 48$ 种安排方案；
- ②、A排在第二位，
任务E、F必须排在一起，则任务E、F相邻的位置有3个，考虑两者的顺序，有2种情况，

将剩下的3个任务全排列，安排在其他三个位置，有 $A_3^3 = 6$ 种安排方法，

则此时有 $3 \times 2 \times 6 = 36$ 种安排方案；

③、A排在第三位，

任务E、F必须排在一起，则任务E、F相邻的位置有3个，考虑两者的顺序，有2种情况，

将剩下的3个任务全排列，安排在其他三个位置，有 $A_3^3 = 6$ 种安排方法，

则此时有 $3 \times 2 \times 6 = 36$ 种安排方案；

则符合题意要求的安排方案有 $36 + 36 + 48 = 120$ 种；

故选D.

【标注】【知识点】分类加法计数原理

【知识点】特殊元素优先法

【素养】数学建模

【素养】数学运算

40. 六人按下列要求站一横排，分别有多少种不同的站法？

(1) 甲不站两端.

(2) 甲、乙必须相邻.

(3) 甲、乙不相邻.

(4) 甲、乙按自左至右顺序排队（可以不相邻）.

(5) 甲、乙站在两端.

【答案】(1) 480

(2) 240

(3) 480

(4) 360

(5) 48

【解析】(1) 方法一：要使甲不站在两端，可先让甲在中间4个位置上任选1个，有 A_4^1 种站法，然后其余5人在另外5个位置上作全排列有 A_5^5 种站法，根据分步计数原理，共有站 $A_4^1 A_5^5 = 480$ （种）.

方法二：由于甲不站两端，这两个位置只能从其余5个人中选2个人站，有 A_5^2 种站法，然后中间4人有 A_4^4 种站法，根据分步计数原理，共有站法 $A_5^2 A_4^4 = 480$ （种）.

方法三：若对甲没有限制条件共有 A_6^6 种法，甲在两端共有 $2A_5^5$ 种站法，从总数中减去这两种情况的排列数，即得所求的站法数，共有 $A_6^6 - 2A_5^5 = 480$ （种）.

- (2) 先把甲、乙作为一个“整体”，看作一个人，有 A_5^5 种站法，再把甲、乙进行全排列，有 A_2^2 种站法，根据分步计数原理，共有 $A_5^5 A_2^2 = 240$ （种）站法．
- (3) 因为甲、乙不相邻，中间有隔档，可用“插空法”，
 第一步先让甲、乙以外的4个人站队，有 A_4^4 种；
 第二步再将甲、乙排在4人形成的5个空档（含两端）中，有 A_5^2 种，
 故共有站法为 $A_4^4 A_5^2 = 480$ （种）．
- (4) 先将甲、乙以外的4人从6个位置中挑选4个位置进行排列共有 A_6^4 种，剩下的两个位置，左边的就是甲，右边的就是乙，全部排完，故共有 $A_6^4 = 360$ 种．
- (5) 方法一：首先考虑特殊元素，甲、乙先站两端，有 A_2^2 种，再让其他4人在中间位置作全排列，有 A_4^4 种，根据分步计数原理，共有 $A_2^2 A_4^4 = 48$ （种）．
 方法二：首先考虑两端两个特殊位置，甲、乙去站有 A_2^2 种站法，然后考虑中间4个位置，由剩下的4人去站，有 A_4^4 种站法，由分步计数原理共有 $A_2^2 A_4^4 = 48$ 种站法．

【标注】【知识点】特殊位置优先法；捆绑法；特殊元素优先法；插空法；排除法