

01排列

一、两种计数原理

1. 分类加法计数原理

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法．

【补充说明】

分类加法原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事．

例1

1. 某学生去书店，发现3本好书，决定至少买其中一本，则购买方式共有（ ）．
A. 3种 B. 6种 C. 7种 D. 9种
2. 从0, 1, 2, 3, 4中任选两个不同的数字组成一个两位数，其中偶数的个数是（ ）．
A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

练1

3. 如果一条直线与一个平面平行，那么称此直线与平面构成一个“平行线面组”，在一个长方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“平行线面组”的个数是（ ）．
A. 60 B. 48 C. 36 D. 24
4. 如果某年年份的各位数字之和为7，我们称该年为“七巧年”．例如，今年年份2014的各位数字之和为7，所以今年恰为“七巧年”．那么从2000年到2999年中“七巧年”共有（ ）．
A. 24个 B. 21个 C. 19个 D. 18个

2. 分布乘法计数原理

做一件事，完成它需要分成 n 个子步骤，做第一个步骤有 m_1 种不同的方法，做第二个步骤有 m_2 种不同方法，……，做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法．

【补充说明】

分步乘法原理针对的是“分步”问题，各步之间相互关联，只有把各个步骤依次全部完成，才能把这件事做完。

例2

5. 有不同的语文书9本，不同的数学书7本，不同的英语书5本，从中选出不属于同一学科的书2本，则不同的选法有（ ）种。

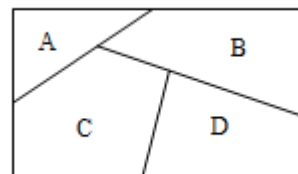
- A. 21 B. 315 C. 143 D. 153

练2

6. 某单位安排甲、乙、丙、丁4名工作人员从周一到周五值班，每天有且只有1人值班，每人至少安排一天且甲连续两天值班，则不同的安排方法种数为（ ）。

- A. 18 B. 24 C. 48 D. 96

7. 如图，用5种不同颜色给图中的A, B, C, D四个区域涂色，规定一个区域只涂一种颜色，相邻区域必须涂不同的颜色，则不同的涂色方案共有 _____ 种。



8. 回答下列各题。

- (1) 将4封信投入3个邮筒，有多少种不同的投法？
(2) 三位旅客到4个旅馆住宿，有多少种不同的住宿方法？

二、两种基本计数原理的综合应用

解决有些计数问题时需要兼顾两种基本计数原理，此时要结合题目内容仔细分析“分类”与“分步”的顺序，而且，在具体的“分类”和“分步”的过程中，要明确“分类”的标准和“分步”的步骤，避免重复或遗漏的情况。

对于较复杂的一类问题，甚至会出现“分类中有分步，分步中有分类”的情况。

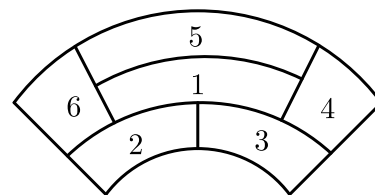
例3

9. 在5双不同的鞋子中任取4只，这4只鞋子中至少有2只鞋子原来是同一双的可能取法种数为（ ）。

- A. 30 B. 90 C. 130 D. 140

练3

10. 某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为6个部分（如图）现要栽种4种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有 _____ 种。（以数字回答）



11. 现有5幅不同的国画，2幅不同的油画，7幅不同的水彩画．
- （1）从中任选一幅画布置房间，有几种不同的选法？
 - （2）从这些国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间，有几种不同的选法？
 - （3）从这些画中选出两幅不同种类的画布置房间，有几种不同的选法？

三、排列

1. 定义

一般地，从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列．

2. 排列数

从 n 个不同的元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示．

3. 排列数公式

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1), \quad m, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } m \leq n.$$

4. 全排列

一般地， n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个全排列．

$$\text{全排列公式 } A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

5. 阶乘

正整数由1到 n 的连续乘积，叫作 n 的阶乘，用 $n!$ 表示．

所以 n 个不同元素的全排列公式可以写成 $A_n^n = n!$ ．

规定： $0! = 1$ ．

因此，借助于阶乘的定义，可以将排列数公式改写成： $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 。

例1

12. 计算：

(1) $A_{10}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $2A_3^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $A_9^4 - A_9^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) $A_9^1 A_9^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) $\frac{2A_{12}^7 A_5^3}{A_{12}^{12}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知自然数 x 满足 $3A_{x+1}^3 = 2A_{x+2}^2 + 6A_{x+1}^2$ ，则 $x = (\quad)$.

A. 3

B. 5

C. 4

D. 6

练1

14. 已知 $A_n^2 = 7A_{n-4}^2$ ，则 n 的值为 $(\quad)$.

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

15. $(n-3)(n-4)\cdots(n-9)(n-10)$ ($n \in \mathbf{N}, n > 10$) 可表示为 $(\quad)$.

A. A_{n-3}^9

B. A_{n-3}^8

C. A_{n-3}^7

D. C_{n-3}^7

16. 若不等式 $A_8^{m+2} < 6A_8^m$ 成立，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 下列等式中不成立的是 $(\quad)$.

A. $A_n^3 = (n-2)A_n^2$

B. $\frac{1}{n} A_{n+1}^n = A_{n+1}^{n-1}$

C. $nA_{n-1}^{n-2} = A_n^n$

D. $\frac{n}{n-m} A_{n-1}^m = A_n^m$

四、常见排列问题

1. 优先法（元素优先与位置优先）

如果某些元素或位置特殊，则优先安排特殊元素或特殊位置。

例1

18. 甲、乙、丙、丁四名同学和1名老师站成一排合影留念，老师站在中间，甲同学不和老师站在一起的不同站法种数为 $(\quad)$.

A. 120种

B. 24种

C. 16种

D. 12种

19. 用数字0, 1, 2, 3, 4组成没有重复数字的五位数, 其中比30000大的偶数共有() .

A. 18

B. 12

C. 30

D. 24

练1

20. 某台小型晚会由6个节目组成, 演出顺序有如下要求: 节目甲必须排在前两位, 节目乙不能排在第一位, 节目丙必须排在最后一位. 该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 _____ 种

21. 从6名志愿者中选出4人, 分别从事搜救、医疗、心理辅导、后勤四种不同工作, 若其中甲、乙两名志愿者都不能从事心理辅导工作, 则不同的选派方案共有() .

A. 280种

B. 240种

C. 180种

D. 96种

2. 捆绑法 (相邻排列问题)

(1) 模型: 将 n 个不同元素排成一排, 其中某 k 个元素**相邻**.

(2) 思路: 将相邻的 k 个元素“捆绑”在一起看成一个整体, 此时变为 $n - k + 1$ 个元素的全排列, 排法为 A_{n-k+1}^{n-k+1} ; 再将“捆绑”在一起的元素内部排列, 排法为 A_k^k . 根据分步乘法计数原理, 符合条件的排法种数有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} \cdot A_k^k$ 种.

例2

22. A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边, 那么不同的排法共有() .

A. 60种

B. 48种

C. 36种

D. 24种

练2

23. 一排9个座位坐了3个三口之家. 若每家人坐在一起, 则不同的坐法种数为() .

A. $3 \times 3!$

B. $3 \times (3!)^3$

C. $(3!)^4$

D. $9!$

24. 停车场划出一排12个停车位, 今有8辆不同的车需要停放, 若要求剩余的4个空车位连在一起, 则不同的停车方法有() .

A. A_{12}^8 种

B. $2A_8^8 A_4^4$ 种

C. $8A_8^8$ 种

D. $9A_8^8$ 种

25. 现将5张连号的电影票分给甲乙等5个人, 每人一张, 且甲乙分得的电影票连号, 则共有 _____ 种不同的分法 (用数字作答) .

3. 插空法 (间隔排列问题)

(1) 模型: 将 n 个不同的元素排成一排, 其中某 k 个元素**互不相邻** ($k \leq n - k + 1$) .

(2) 思路:

①将没有要求的 $n-k$ 个元素全排列，排列方法有 A_{n-k}^{n-k} 种；

②将要求互不相邻的 k 个元素插入 $n-k+1$ 个空隙中，相当于从 $n-k+1$ 个空隙中选取 k 个分配给互不相邻的那 k 个元素，其排列方法有 A_{n-k+1}^k 种．根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k}^{n-k} \cdot A_{n-k+1}^k$ 种．

例3

26. 由数字0, 1, 2, 3, 4, 5组成的奇偶数字相间且无重复数字的六位数的个数是()．

- A. 60 B. 48 C. 36 D. 24

练3

27. 3个老师和5个同学照相，老师不能坐在最左端．任何老师不能相邻，则不同的坐法种数是()．

- A. A_8^8 B. $A_5^5 A_3^3$ C. $A_5^5 A_3^3$ D. $A_5^5 A_8^3$

28. 某班星期一上午安排5节课，若数学2节，语文、物理、化学各1节，且物理、化学不相邻，2节数学相邻，则星期一上午不同课程安排种数为()．

- A. 6 B. 12 C. 24 D. 48

29. 某电视台曾在某时间段连续播放5个不同的商业广告，现在要在该时间段只保留其中的2个商业广告，新增播一个商业广告与两个不同的公益宣传广告，且要求两个公益宣传广告既不能连续播放也不能在首尾播放，则不同的播放顺序共有()．

- A. 60种 B. 120种 C. 144种 D. 300种

4. 排除法（正难则反）

对于给定附加条件的问题，正面考虑情况较为复杂时，可以考察否定附加条件下问题的情况，然后从无附加条件中排除上述情况即可．

例4

30. 从4名男同学和6名女同学中选取3人参加某社团活动，选出的3人中男女同学都有的不同选法种数是_____．（用数字作答）

练4

31. 某班班会准备从甲、乙等7名学生中选派4名学生发言，要求甲、乙两人至少有一人参加，当甲、乙同时参加时，他们两人的发言不能相邻，那么不同的发言顺序的种数为()．

- A. 3600 B. 520 C. 720 D. 600

32. 甲、乙、丙、丁、戊5人站成一排，要求甲、乙均不与丙相邻，则不同的排法种类为()．

A. 72种

B. 52种

C. 36种

D. 24种

5. 除序法

在有些排列问题中，某些元素的前后顺序是固定的（但是不一定相邻），具体如下：

（1）模型：将 $m+n$ 个不同的元素排成一排，其中 m 个元素之间的顺序固定不变，求不同的排法种数的方法。

（2）思路：

①整体法：先将 $m+n$ 个元素全排列，共有 A_{m+n}^{m+n} 种排列方法。然后任取一种排列，固定另外 n 个元素的位置不动，将 m 个元素交换顺序，共有 A_m^m 种排列方法，而其中只有一种排列是我们所需要的，因此共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种不同的排列方法。

②插空法：先从 $m+n$ 个位置选出 n 个进行排列，然后将顺序固定的 m 个元素插入相应空当中，所以排法种数为 $A_{m+n}^n \times 1 = A_{m+n}^n$ 种。

例5

33. A 、 B 、 C 、 D 、 E 五人站成一排，如果 A 必须站在 B 的左边（ A 、 B 可以不相邻），则不同的排法有（ ）。

A. 24种

B. 60种

C. 90种

D. 120种

练5

34. 六名同学站一排照相，要求 A 、 B 、 C 三人按从左到右的顺序站（可以不相邻，也可以相邻），则不同的排法共有（ ）。

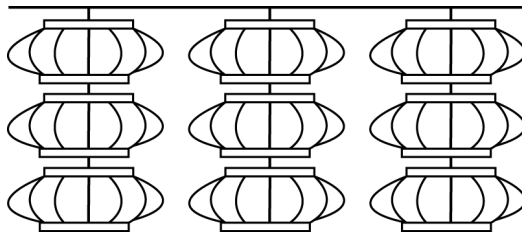
A. 720种

B. 360种

C. 120种

D. 90种

35. 元宵节灯展后，如图悬挂有9盏不同的花灯需要取下，每次取1盏，共有 _____ 种不同取法。（用数字作答）



6. 错位排列问题

（1）模型：将编号为 $1 \sim n$ 的 n 个小球放入编号为 $1 \sim n$ 的 n 个盒子中，规定 i 号小球不许放入 i 号盒子，求不同的放法种数，此种排列称为全错位排列，相应的排列数称为全错位排列数。

(2) 当 $n = 2, 3, 4, 5$ 时的全错位排列数各为 $1, 2, 9, 44$. 关于 $5, 6, 7$ 个元素的错位排列的计算, 可以用剔除法转化为 2 个、 3 个、 4 个元素的错位排列的问题.

【拓展】 n 个元素的全错位排列数公式为:

$$P_n = (n!) \cdot \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right], \text{ 有兴趣的同学可以利用数列的知识进行推导.}$$

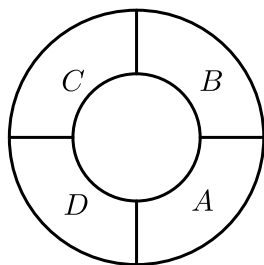
例6

36. 同寝室4人各写一张贺卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人送来的贺卡, 则四张贺年卡不同的分配方式有 _____.

7. 综合问题

练6

37. 由 $1, 2, 3, \dots, 8$ 组成无重复数字的八位数, 要求 1 与 2 相邻, 3 与 4 相邻, 7 与 8 相邻, 5 与 6 不相邻, 共有 _____ 种排法.
38. 如图, 一环形花坛分成 A, B, C, D 四块, 现有 4 种不同的花供选种, 要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为 ().



- A. 96 B. 84 C. 60 D. 48
39. 《红海行动》是一部现代化海军题材影片, 该片讲述了中国海军“蛟龙突击队”奉命执行撤侨任务的故事. 撤侨过程中, 海军舰长要求队员们依次完成六项任务, 并对任务的顺序提出了如下要求: 重点任务 A 必须排在前三位, 且任务 E, F 必须排在一起, 则这六项任务的不同安排方案共有 ().
- A. 240种 B. 188种 C. 156种 D. 120种
40. 六人按下列要求站一横排, 分别有多少种不同的站法?
- (1) 甲不站两端.
 - (2) 甲、乙必须相邻.
 - (3) 甲、乙不相邻.
 - (4) 甲、乙按自左至右顺序排队 (可以不相邻).
 - (5) 甲、乙站在两端.