

04不等式证明（二）练习题

1. 若对于任意的 $0 < x_1 < x_2 < a$, 都有 $\frac{x_2 \ln x_1 - x_1 \ln x_2}{x_1 - x_2} > 1$, 则 a 的最大值为 () .
A. $2e$ B. e C. 1 D. $\frac{1}{2}$
2. 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x} (a \in \mathbf{R})$, 对于 $\forall x_1, x_2 \in [e^2, e^4]$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{1}{x_1 x_2}$ 恒成立 , 则实数 a 的取值范围为 () .
A. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
3. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.
(1) 求函数 $h(x) = \frac{2}{x} f(x) + \frac{x}{2}$ 在 $[t, t+1] (t > 0)$ 的最小值 .
(2) 若任意 $b > a > 0$, 总有 $m[g(b) - g(a)] > f(b) - f(a)$ 成立 , 求实数 m 的值 .
4. 已知函数 $f(x) = x + x \ln x$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, 1)$ 处的切线方程 .
(2) 若 $k \in \mathbf{Z}$, 且 $k(x-1) < f(x)$ 对任意 $x > 1$ 恒成立 , 求 k 的最大值 .
(3) 当 $n > m \geq 4$ 时 , 证明 : $(mn^n)^m > (nm^m)^n$.