

03零点问题练习题

一、确定函数零点个数

1. 判断下列函数的零点个数 .

(1) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

二、已知零点信息，求参数取值范围

2. 函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + x$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是 _____ .

3. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为 _____ .

4. 若函数 $f(x) = ax - \ln x$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围为 () .

A. $(-\infty, \frac{1}{e})$

B. $(-\infty, e)$

C. $(0, \frac{1}{e})$

D. $(0, e)$

三、论证零点存在

5. 证明下面与零点相关命题：

(1) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a$ ，其中 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，证明： $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 有唯一零点 .

(2) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - a$ ，其中 $a > 1$ ，证明： $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点 .

四、求解零点个数

6. 设 $n \in \mathbf{N}^*$ ，函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ ，函数 $g(x) = \frac{e^x}{x^n}$ ， $x \in (0, +\infty)$.

(1) 当 $n = 1$ 时，写出函数 $y = f(x) - 1$ 零点个数，并说明理由；

7. 已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}(a+2)x^2 + 6x - 3$

(1) 当 $a > 2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

(2) 若 $a < 2$ ，试讨论曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴公共点的个数 .