

03零点问题

一、函数零点

1. 零点概念

对于函数 $y = f(x) (x \in D)$ ，把使 $f(x) = 0$ 成立的实数 x 叫做函数 $y = f(x) (x \in D)$ 的零点。

2. 求解不含参函数零点个数

【题型特点】含有指对函数，不含参数。

【解题思路】

①分离成两个基本函数，研究交点个数（与切线位置比较）。【零点转交点思想，首选方法】

②直接研究单调性与极值。（在不能分离时使用）

【四条必记切线】

指数函数 e^x ：① $y = ex$ （过原点的切线）。② $y = x + 1$ 。（常用不等式）

对数函数 $\ln x$ ：① $y = \frac{x}{e}$ （过原点的切线）。② $y = x - 1$ 。（常用不等式）

例1（零点转交点，画图）

1. 判断下列函数的零点个数。

(1) $f(x) = e^x - x - 2$

【答案】(1) 2个。

(2) 1个。

【解析】(1) $f'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ 。

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，

$f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

当 $x \in (0, +\infty)$ 时，

$f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值和最小值 $f(0) = -1 < 0$ 。

因为 $f(-2) = \frac{1}{e^2} > 0$ ， $f(0) = -1 < 0$ ，

所以，当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，

$f(x)$ 存在唯一零点,

因为 $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = e^2 - 4 > 0$,

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 存在唯一零点.

综上: $f(x) = e^x - x - 2$ 有两个零点.

故答案为: 2个.

(2) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = 1$.

当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$x = -\frac{1}{3}$ 取得极大值 $f\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$, $x = 1$ 取得极小值.

$f(1) < 0$, $f(2) > 0$, $f(x)$ 存在唯一零点.

故答案为: 1个.

【标注】 【知识点】 导数与极值

例2 (求导判断单调性, 画图)

2. 函数 $f(x) = x^2 + x - (x+1)\sin x$ 的零点的个数是 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 由 $f(x) = x^2 + x - (x+1)\sin x$

$$= (x+1)(x - \sin x),$$

故 $x = -1$ 是函数 $f(x)$ 的零点,

构造函数 $g(x) = x - \sin x$,

注意到 $g(0) = 0$,

$$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0,$$

$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

故 $g(x)$ 只有唯一零点 $x = 0$,

所以 $f(x)$ 有两个零点 $x = -1$ 或 $x = 0$,

故选B.

【标注】 【知识点】 直接求函数的零点 (不含参)

3. 函数 $f(x) = \sqrt{x+2} - \ln x - 2$ 的零点个数为 _____ .

【答案】 2

【解析】 $f(x) = \sqrt{x+2} - \ln x - 2$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{x},$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x+2}}{2x\sqrt{x+2}},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, x = 2\sqrt{3} + 2,$$

x	$(0, 2\sqrt{3} + 2)$	$2\sqrt{3} + 2$	$(2\sqrt{3} + 2, +\infty)$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 2\sqrt{3} + 2)$ 上单调递减, 在 $(2\sqrt{3} + 2, +\infty)$ 单调递增,

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \sqrt{2 + \frac{1}{e}} - 1 > 0,$$

$$f(1) = \sqrt{3} - 2 < 0,$$

$$f(e^6) = \sqrt{e^6 + 2} - 8 > e^3 - 8 > 0,$$

$\therefore f(x) = 0$ 有两个解,

即 $f(x)$ 的零点个数为 2 .

故答案为 2 .

【标注】 【知识点】直接求函数的零点 (不含参)

练2

4. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{3}x^3 + 1$ 的零点个数为 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 C

【解析】 $\because f'(x) = \frac{1}{x} - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x) \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$;
当 $x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x) \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$; 因此零点个数为 2, 选 C .

【标注】 【知识点】直接求函数的零点 (不含参)

3. 含参函数零点求解办法

🔗 分离变量

【核心思想】：零点转交点

- ① 函数 $y = f(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 与 x 轴有交点 .
- ② $f(x) = k$ 有几个根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 图象有几个交点
 $\Leftrightarrow$ 函数 $g(x) = f(x) - k$ 图象与 x 轴有几个交点 .
- ③ 方程 $f(x) = g(x)$ 有几个根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 与 函数 $y = g(x)$ 图象有几个交点
 $\Leftrightarrow$ 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的图象与 x 轴有几个交点 .

🔗 分类讨论

【核心思想】：画图

- ① 分类讨论，研究单调性 .
- ② 画图，判定极值的正负性，解不等式 .

二、 根据零点信息，求解参数取值范围（常见不分参模型）

🔗 分类讨论的详细步骤

【详细步骤】

（1）求导：利用等价导函数得到单调性。得到等价导函数的常用技巧如下：

- ① 恒大于零的因式直接“忽略” .
- ② 一定不要轻易把导函数随便展开，多去观察有没有公因式 .
- ③ “清君侧”，把 $\ln x$ 的系数除掉 .

（2）研究比较复杂的等价导函数正负性。（如果等价导函数很简单，则跳过此步）

猜零点：最常见的零点 0 与 1 （猜测首选）。比较罕见的零点 e 或 $\frac{1}{e}$.

若猜出零点：那么证明该零点是唯一零点。（继续求导，利用二阶导的正负性，证明一阶导单调）

【特别说明】：如果题目比较复习可能需要多次求导，重复猜零点的过程，求导之前一定要确定有零点，换句话说，如果有零点，就可以一直导下去】

若猜不出零点：那么证明一阶导没有零点。即恒大于零活恒小于零。（继续求导，利用极值研究最值，可得一阶导的正负性）

(3) 写出函数单调性, 并计算端点值.

单调性: 如果出现定义域断点, 单调性一定要分开写. (断点处是渐近线)

端点值: 洛必达法则, 算出每个单调性区间的端点极限值.

(4) 画出大致图像. (渐近线处一定要画的光滑)

【特别说明】

有一类题型, 一阶导零点猜不出来, 但是研究一阶导单调性发现, 一阶导是有零点的, 这类题型是隐零点问题, 比较复杂, 我们将在春季课程学习.

1. 一阶导零点可求

例1

5. 已知函数 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a (a > 0)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围.

【答案】见解析.

【解析】 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$,

$h'(x) = x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = a > 0$.

当 x 变化时, $h'(x), h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, a)$	a	$(a, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (a, +\infty)$; 单调递减区间为 $(-1, a)$,

故 $h(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 内单调递增, 在区间 $(-1, 0)$ 内单调递减,

从而函数 $h(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 当且仅当

$$\begin{cases} h(-2) < 0, \\ h(-1) > 0, \\ h(0) < 0 \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a < \frac{1}{3}, \text{ 所以 } a \text{ 的取值范围是 } \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 利用导数求函数的零点及个数; 导数与单调性

6. 已知函数 $f(x) = x - 1 + ae^x$.

(3) 当 $a = 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx - 1$ 没有公共点, 求 k 的取值范围.

【答案】(1) $a = -\frac{1}{e}$.

(2) 当 $a \geq 0$ 时, , 所以函数无极值;

当 $a < 0$ 时, $f(x)_{\text{极大值}} = \ln(-\frac{1}{a}) - 2$.

(3) $1 \leq k < e + 1$.

【解析】(1) $f'(x) = 1 + ae^x$,

因为 $f(x) = x - 1 + ae^x$,

在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴,

所以 $k = f'(1) = 1 + ae^1 = 0$,

所以 $a = -\frac{1}{e}$.

(2) 当 $a \geq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以函数无极值;

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 1 + ae^x = 0$, 解得 $x = \ln(-\frac{1}{a})$,

x	$(-\infty, \ln(-\frac{1}{a}))$	$\ln(-\frac{1}{a})$	$(\ln(-\frac{1}{a}), +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\ln(-\frac{1}{a}) - 2$	$\searrow$

$f(x)_{\text{极大值}} = \ln(-\frac{1}{a}) - 2$.

(3) 法一: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - 1 + e^x$ 与 $y = kx - 1$ 无公共点,

只需证 $h(x) = x(1 - k) + e^x$ 无零点,

即 $h(x) = 0$ 无根, 即 $e^x = (k - 1)x$,

由数形结合知:

当 $k = 1$ 时无零点;

当 $k < 1$ 时有一个零点;

当 $k > 1$ 时, e^x 与 $(k - 1)x$ 相切时, 有一个零点.

设切点 (x_0, y_0) , $e^{x_0} = \frac{e^{x_0}}{x_0}$, 所以 $x_0 = 1$,

所以切点为 $(1, e)$,

所以 $k - 1 = e$, 所以 $k = 1 + e$,

综上所述 $1 \leq k < e + 1$.

法二: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - 1 + e^x$ 与 $y = kx - 1$ 无公共点,

只需证 $h(x) = x(1 - k) + e^x$ 无零点,

$h'(x) = 1 - k + e^x$,

① 当 $k = 1$ 时, $h(x) = e^x$, 无零点;

② 当 $k < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

$h(\frac{1}{k-1}) = -1 + e^{\frac{1}{k-1}} < 0$, $h(0) = 1 > 0$,

所以 $h(x)$ 有一个零点；

③当 $k > 1$ 时，令 $h'(x) = e^x - k + 1 = 0$ ，

解得 $x = \ln(k - 1)$ ，

x	$(-\infty, \ln(k - 1))$	$\ln(k - 1)$	$(\ln(k - 1) + \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$

$h(x) = h(\ln(k - 1)) = (1 - k) \ln((k - 1) - 1)$ ，

当 $\ln(k - 1) = 1$ ，即 $k = e + 1$ ， $h'(x)_{\text{极小}} = 0$ ，有一个零点；

当 $\ln(k - 1) < 1$ ，即 $1 < k < e + 1$ ， $h'(x)_{\text{极小}} > 0$ ，无零点；

当 $\ln(k - 1) > 1$ ，即 $k > e + 1$ ， $h'(x)_{\text{极小}} < 0$ ， $h(0) = 1 > 0$ ，一定有零点。

综上所述： $1 \leq k < e + 1$ 。

【标注】 【知识点】求参数范围（含参指对型导函数）

练1

7. 若方程 $x^3 - 3ax + 2 = 0$ 有三个不同实根，则实数 a 的取值范围为（ ）。

A. $a > 0$

B. $a > 1$

C. $1 < a < 3$

D. $0 < a < 1$

【答案】 B

【解析】 令 $f(x) = x^3 - 3ax + 2$ ， $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ ，要方程有三个不同实根，必须 $a > 0$ （否则 $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 单调增长，最多只有一根）。

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{a})$ 上单调增加，在 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 上单调减少，在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调增加。

要 $f(x) = 0$ 有三个零点，当且仅当 $f(-\sqrt{a}) > 0$ ，且 $f(\sqrt{a}) < 0$ 。

解得 $a > 1$ 。

【标注】 【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

2. 导数为高次型

三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$ ，

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ， $\Delta = 4b^2 - 12ac$ 。

1，当 $\Delta \leq 0$ 时， $f'(x)$ 且不恒为0， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，函数 $f(x)$ 有且仅有1个零点，如下图1。

2，当 $\Delta > 0$ 时， $f(x)$ 有极大值和极小值；

①当 $f(x)$ 的极大值小于0或 $f(x)$ 的极小值大于0时， $f(x)$ 有且仅有1个零点；如图2和3；

②当 $f(x)$ 的极大值或 $f(x)$ 的极小值等于0时， $f(x)$ 有2个零点；如图4和5；

③当 $f(x)$ 的极大值大于0且 $f(x)$ 的极小值小于0时， $f(x)$ 有3个零点，如图6．

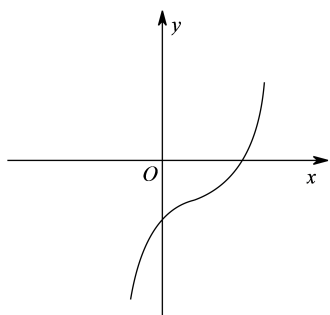


图1

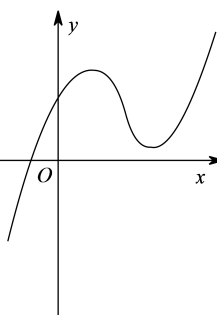


图2

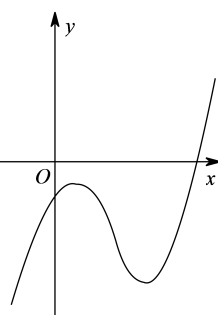


图3

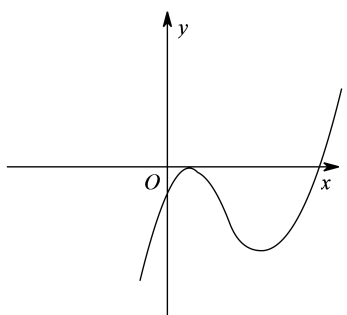


图4

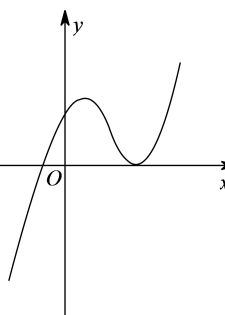


图5

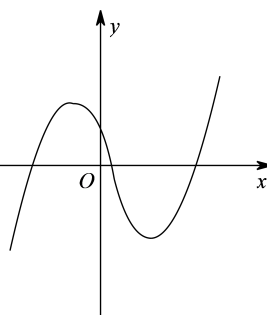


图6

例2

8. 已知函数 $f(x) = a(x - 2\ln x) + \frac{x-1}{x^2}$ ， $a \in \mathbf{R}$ ．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性．

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围．

【答案】 (1) 若 $a \leq 0$ ， $f(x)$ 在 $x \in (0, 2)$ 递增，在 $x \in (2, +\infty)$ 递减，

若 $0 < a < \frac{1}{4}$ ， $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 和 $(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty)$ 递增， $(2, \frac{\sqrt{a}}{a})$ 递减，

若 $a = \frac{1}{4}$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，

若 $a > \frac{1}{4}$ ， $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{a}}{a})$ 和 $(2, +\infty)$ 递增，在 $(\frac{\sqrt{a}}{a}, 2)$ 递减．

(2) $(-\frac{1}{8(1-\ln 2)}, 0)$ ．

【解析】 (1) $f'(x) = a(1 - \frac{2}{x}) - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x-2}{x^3}(ax^2 - 1)(x > 0)$ ，

①若 $a \leq 0$ ，则 $ax^2 - 1 < 0$ ，

$\therefore$ 当 $0 < x < 2$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x > 2$ 时， $f'(x) < 0$ ．

$$\textcircled{2} a = \frac{1}{4} \text{ 时, } f'(x) = \frac{x-2}{x^3} \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) = \frac{(x+2)}{4x} \cdot (x-2)^2 \geq 0,$$

$f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增.

$$\textcircled{3} 0 < a < \frac{1}{4} \text{ 时, } f'(x) = \frac{(x-2)}{x^3} (\sqrt{ax} + 1)(\sqrt{ax} - 1), 2 < \frac{\sqrt{a}}{a},$$

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $2 < x < \frac{\sqrt{a}}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x > \frac{\sqrt{a}}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$$\textcircled{4} \text{ 若 } a > \frac{1}{4} \text{ 时, } f'(x) = \frac{(\sqrt{ax} + 1)}{x^3} \cdot (x-2) \cdot (\sqrt{ax} - 1), \text{ 此时 } 0 < \frac{\sqrt{a}}{a} < 2,$$

$\therefore$ 当 $0 < x < \frac{\sqrt{a}}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

当 $\frac{\sqrt{a}}{a} < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上所述: 若 $a \leq 0$, $f(x)$ 在 $x \in (0, 2)$ 递增, 在 $x \in (2, +\infty)$ 递减,

若 $0 < a < \frac{1}{4}$, $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty\right)$ 递增, $\left(2, \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 递减,

若 $a = \frac{1}{4}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增,

若 $a > \frac{1}{4}$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 和 $(2, +\infty)$ 递增, 在 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a}, 2\right)$ 递减.

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } \textcircled{1} \text{ 若 } a < 0 \text{ 时, } f_{\max}(x) = f(2) = a(2 - 2\ln 2) + \frac{1}{4},$$

又 $\because f(1) = a < 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) < 0$,

$\therefore$ 只要 $f(2) > 0$ 即可, 解得 $0 > a > -\frac{1}{8(1 - \ln 2)}$ 时 $f(x)$ 有两个零点,

$\textcircled{2} a = 0$ 时, $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ 只有一个零点,

$\textcircled{3}$ 当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 2$ 时取得极大值, 在 $x = \frac{\sqrt{a}}{a}$ 处取得极小值.

$\because f(2) = a(2 - \ln 2) + \frac{1}{4}$, 在 $a > 0$ 时有 $f(2) > 0$,

$$\text{而 } f\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{a} - 2\ln \frac{\sqrt{a}}{a}\right) + a \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{a} - 1\right) = a \cdot \left[\frac{2\sqrt{a}}{a} - 2\ln \frac{\sqrt{a}}{a} - 1\right]$$

$$\text{令 } t = \frac{\sqrt{a}}{a} > 2, g(t) = 2t - 2\ln t - 1, g'(t) = 2 - \frac{2}{t} > 0,$$

$\therefore g(t)$ 在 $t > 2$ 时单调递增, $g(t) \geq g_{\min}(t) = g(2) = 4 - 2\ln 2 - 1 > 0$,

$$\therefore f\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{2\sqrt{a}}{a} - 2\ln \frac{\sqrt{a}}{a} - 1\right) > 0,$$

$f(x)$ 最多只有一个零点, 不成立.

$\textcircled{4} a = \frac{1}{4}$, $f(x)$ 单调递增, 不成立.

$\textcircled{5} a > \frac{1}{4}$, $f(x)$ 在 $x = 2$ 取得极小值.

$$\text{又 } \because f(2) = a(2 - \ln 2) + \frac{1}{4} > 0,$$

故 $f(x)$ 最多只有一个零点，不成立。

综上所述， a 的取值范围为 $a \in \left(-\frac{1}{8(1-\ln 2)}, 0\right)$ 。

【标注】 【知识点】求函数最值（含参二次型导函数）；求函数单调区间（含参二次型导函数）

三、根据零点信息，求解参数取值范围（分参型）

分离参数的详细步骤

【详细步骤】

①分离参数：将含有参数的部分与不含参数的部分，分到等号两侧，得到 $f(x) \cdot a = g(x)$ 。

②研究渐近线：研究 $f(x)$ 是否有零点。

③构造函数：将 $f(x)$ 除过去，得到 $a = \frac{g(x)}{f(x)}$ 。转化为 $y = a$ 与 $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ 交点问题。

④画图：令 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ ，画出 $h(x)$ 的大致图像。（图画具体步骤在后面）

（若②没有零点，则 $h(x)$ 连续。若②在有零点 x_0 ，则 $h(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在渐近线）

⑤交点个数（零点个数）：找到 a 的范围。

一阶导零点可求

1. 无渐近线

例1

9. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x - 2(a > 0)$ 。

（3）记 $g(x) = f(x) + x - b(b \in \mathbf{R})$ ，当 $a = 1$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $[e^{-1}, e]$ 上有两个零点，求实数 b 的取值范围。

【答案】（1）增区间为 $(2, +\infty)$ ，减区间为 $(0, 2)$ 。

（2） $\left(0, \frac{2}{e}\right)$ 。

（3） $\left(1, \frac{2}{e} + e - 1\right]$ 。

【解析】（1）直线 $y = x + 2$ 斜率为1， $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\because f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{a}{x},$$

$$\text{易知 } f'(1) = -\frac{2}{1^2} + \frac{a}{1} = -1,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{x} + \ln x - 2, f'(x) = \frac{x-2}{x^2},$$

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 为增函数,

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 为减函数,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(2, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, 2)$.

$$(2) f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{a}{x} = \frac{ax-2}{x^2},$$

$\therefore x > \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数,

$0 < x < \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数,

$$\therefore f(x)_{\min} = f\left(\frac{2}{a}\right),$$

$\therefore$ 对于 $\forall x \in (0, +\infty)$ 都有 $f(x) > 2(a-1)$ 成立,

$$\therefore f\left(\frac{2}{a}\right) > 2(a-1) \text{ 即可},$$

$$\text{则 } \frac{2}{\frac{2}{a}} + a \ln \frac{2}{a} - 2 > 2(a-1),$$

$$\text{由 } a \ln \frac{2}{a} > a \text{ 解得 } 0 < a < \frac{2}{e},$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{2}{e}\right).$$

$$(3) \text{ 依题得 } g(x) = \frac{2}{x} + \ln x + x - 2 - b,$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2},$$

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数,

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数,

又 $\because g(x)$ 在区间 $[e^{-1}, e]$ 上有两个零点,

$$\therefore \begin{cases} g(e^{-1}) \geq 0 \\ g(e) \geq 0 \\ g(1) < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 1 < b \leq \frac{2}{e} + e - 1,$$

$$\therefore b \text{ 的取值范围为 } \left(1, \frac{2}{e} + e - 1\right].$$

【标注】 【知识点】求参数范围 (含参二次型导函数); 利用导数解决不等式恒成立问题

练1

10. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

(2) 设 $a = b = 4$, 若函数 $f(x)$ 有三个不同零点, 求 c 的取值范围;

【答案】 (1) $y = bx + c$

$$(2) 0 < c < \frac{32}{27}$$

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 方法一: $f(0) = c$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f'(0) = b$,

所以切线方程为 $y - c = bx$, 即 $y = bx + c$.

方法二: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f'(0) = b$, $f(0) = c$, 所以切线方程为 $y = bx + c$.

$$(2) f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + c, f'(x) = 3x^2 + 8x + 4 = (3x + 2)(x + 2).$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = -\frac{2}{3} \text{ 或 } x = -2,$$

所以

x	$(-\infty, -2)$	-2	$\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

因为 $f(x)$ 有三个不同的零点, 所以 $\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f\left(-\frac{2}{3}\right) < 0 \end{cases}$, 解得 $0 < c < \frac{32}{27}$.

(3) 方法一: 先证必要性:

因为有三个不同的零点, 所以 $f(x)$ 不单调, 因为 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 二次函数

$$\Delta = 4a^2 - 12b > 0 \text{ 即 } a^2 - 3b > 0,$$

再证不充分:

由 (2) 知, 当 $a = b = 4$ 时, 满足不等式 $a^2 - 3b > 0$, 当 $c = -1$ 时没有三个零点, 不合题意, 故不充分.

方法二: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 若 $a^2 - 3b \leq 0$, 则 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 从而 $f(x)$ 单调递增, 于是 $f(x)$ 最多只有 1 个零点所以, $a^2 - 3b > 0$.

当 $a^2 - 3b > 0$ 时, $f'(x)$ 有两个实根 $x_1 < x_2$, $f(x)$ 在 x_1 取到极大值, 在 x_2 取到极小值, 若

$f(x_1) \leq 0$ 或者 $f(x_2) \geq 0$, 则 $f(x)$ 没有 3 个零点.

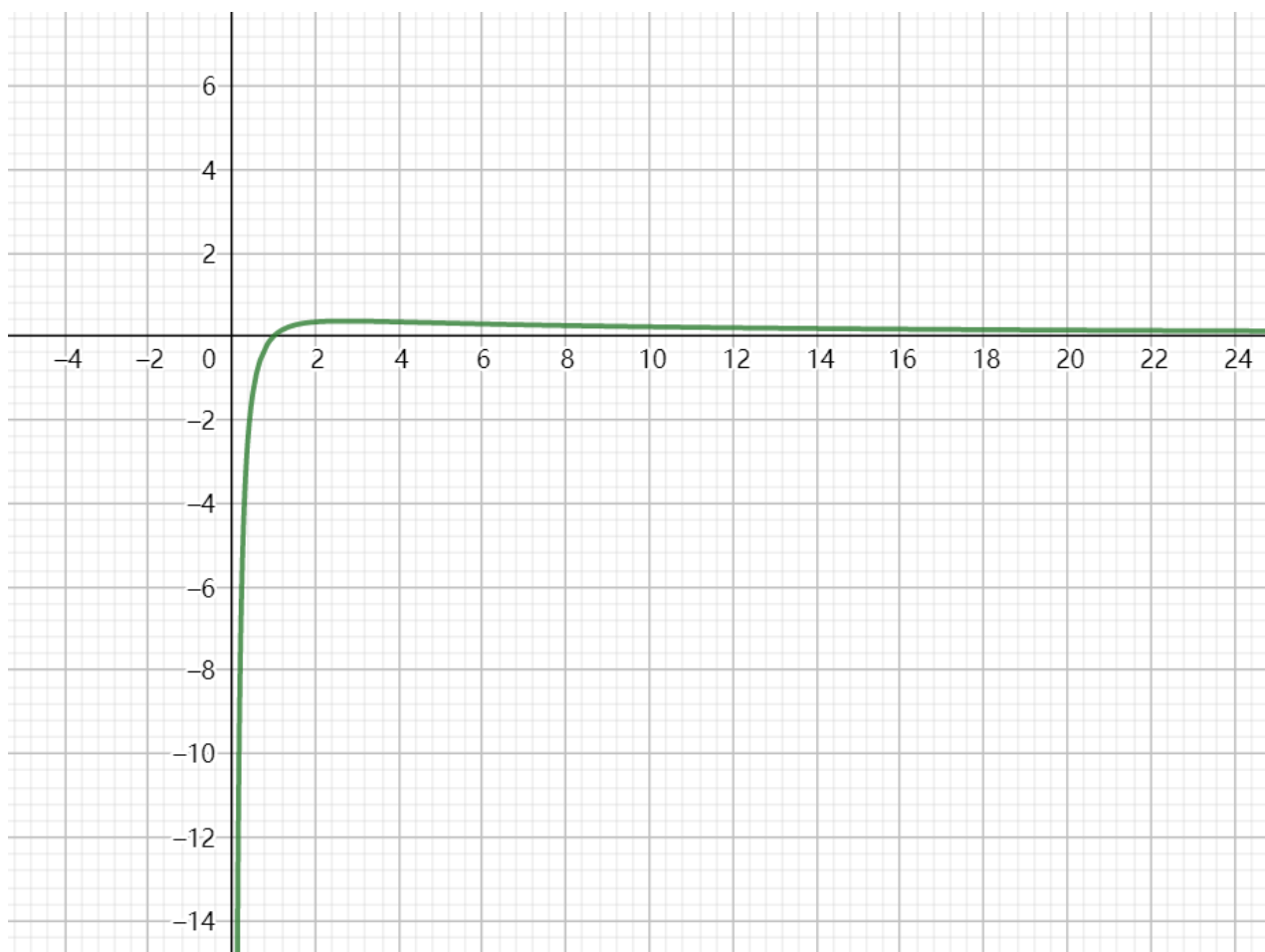
比如, 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 100$ 满足 $a^2 - 3b > 0$, 但没有三个不同零点.

【标注】【知识点】求函数零点 (含参二次型导函数)

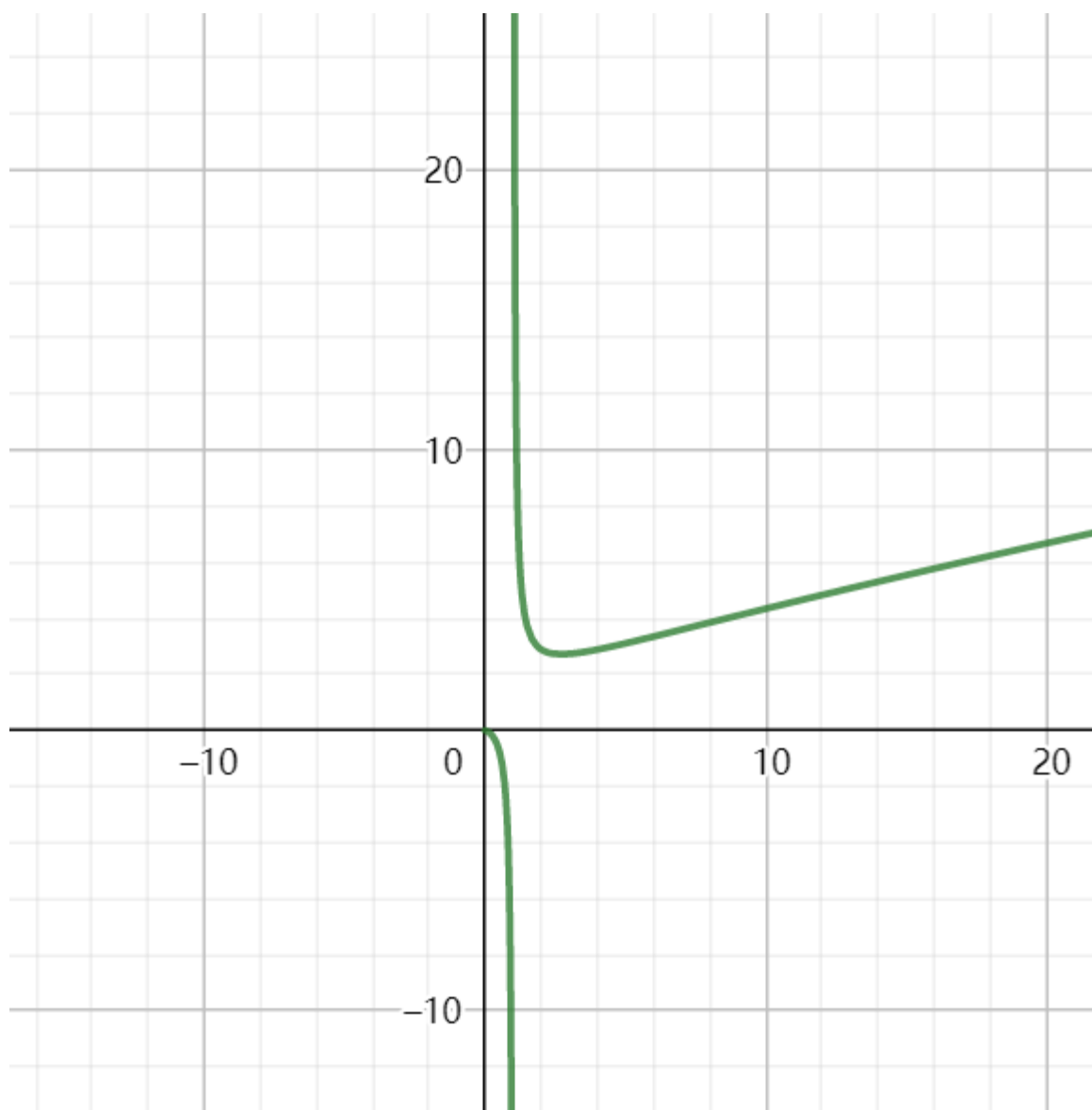
2. 有渐近线

常考察的渐近线图像

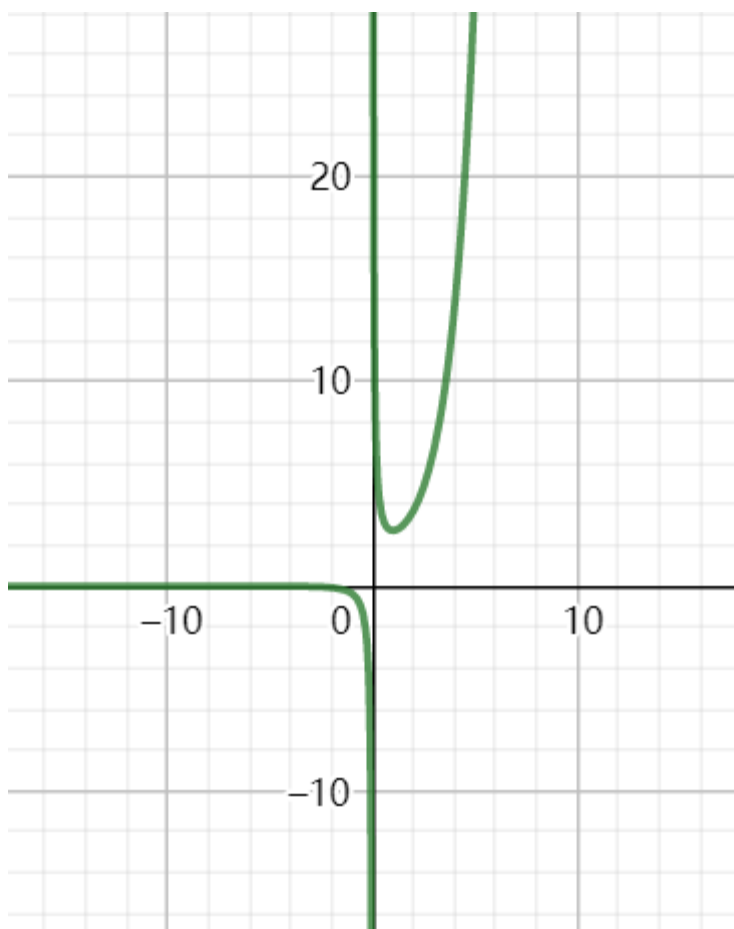
$$y = \frac{\ln x}{x} \text{ 型}$$



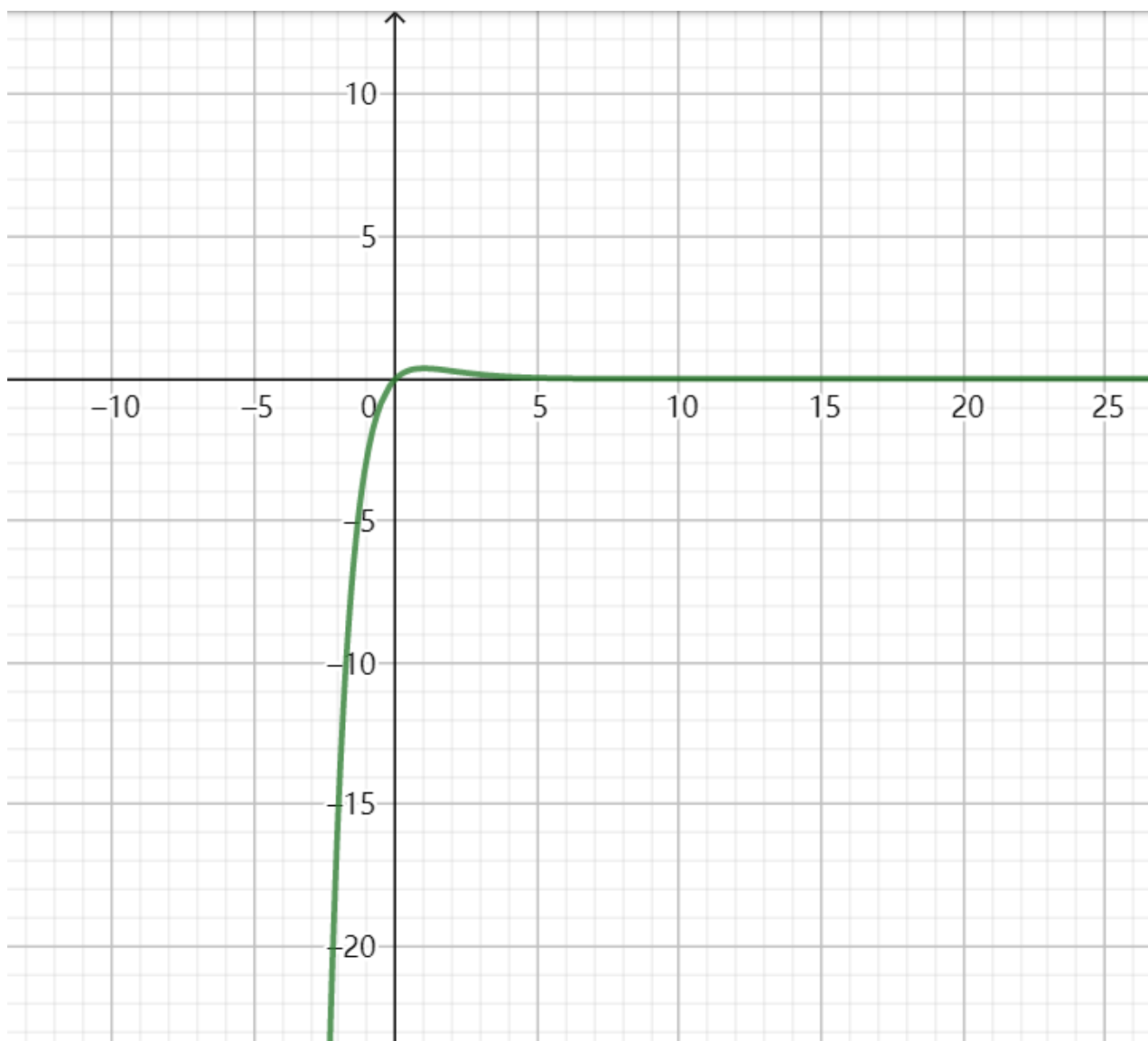
💡 $y = \frac{x}{\ln x}$ 型



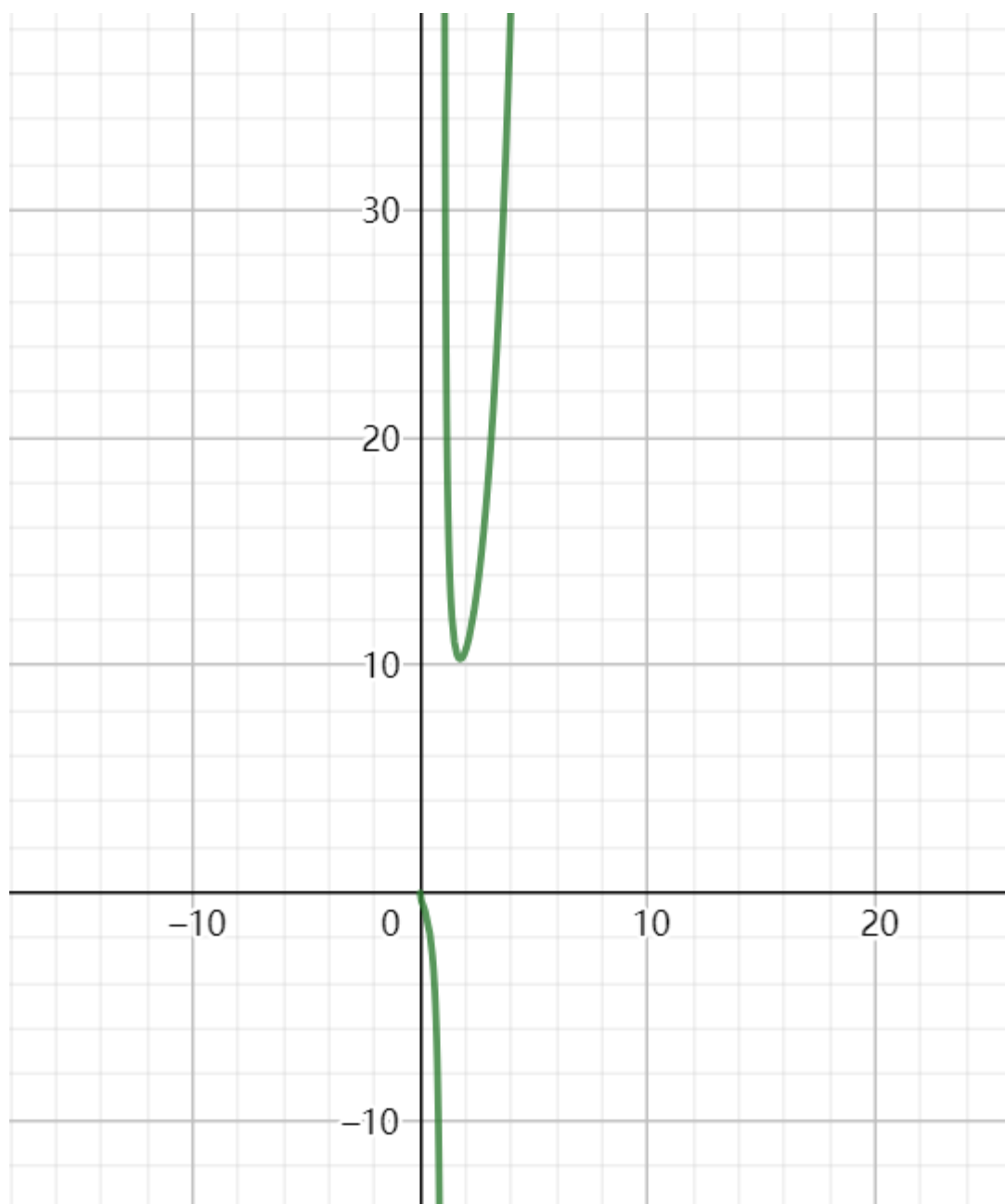
💡 $y = \frac{e^x}{x}$ 型



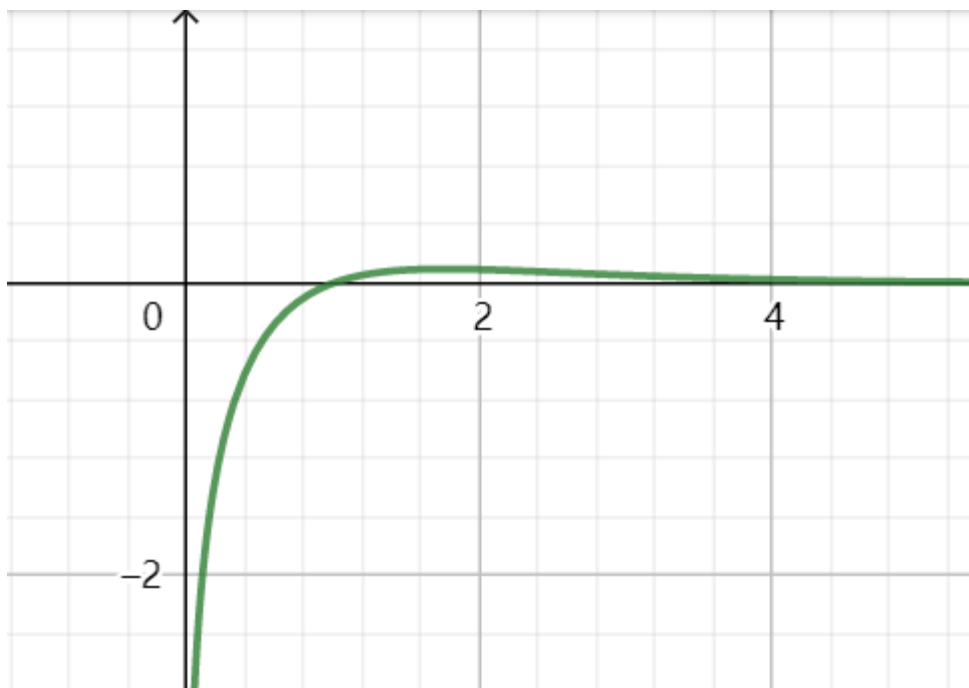
💡 $y = \frac{x}{e^x}$ 型



💡 $y = \frac{e^x}{\ln x}$ 型



🔍 $y = \frac{\ln x}{e^x}$ 型



例2

11. 已知函数 $f(x) = 2 \ln x - x \ln a$ 有两个零点, 则 a 的取值范围为 ().

A. $(0, 1)$

B. $(1, e)$

C. $\left(1, e^{\frac{2}{e}}\right)$

D. $\left(e^{\frac{2}{e}}, e\right)$

【答案】C

【解析】 $f'(x) = \frac{2}{x} - \ln a$.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{2}{\ln a}$.

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

若 $\frac{2}{\ln a} \leq 0$, 即 $0 < a < 1$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 与 $f(x)$ 有两个零点矛盾, 不符合题意;

若 $\frac{2}{\ln a} > 0$, 即 $a > 1$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2}{\ln a}\right)$ 上单调递增, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x = \frac{2}{\ln a}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f_{\max}(x) = f\left(\frac{2}{\ln a}\right) = 2 \ln \frac{2}{\ln a} - 2$.

$\therefore f(x)$ 有两个零点,

$\therefore 2 \ln \frac{2}{\ln a} - 2 > 0$.

即 $\ln \frac{2}{\ln a} > 1$,

$\therefore \frac{2}{\ln a} > e$, 即 $\ln a < \frac{2}{e}$.

$\therefore a < e^{\frac{2}{e}}$.

又 $a > 1$,

$\therefore 1 < a < e^{\frac{2}{e}}$.

故选：C .

【标注】 【知识点】 求参数范围（含参指对型导函数）

12. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$, 若 $f(x)$ 恰有两个不同的零点, 则 a 的取值范围为 () .

- A. $\left(\frac{1}{2e}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2e}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2e}\right]$

【答案】 C

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则函数 $f(x)$ 不存在两个不同的零点 .

当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$,

当 $0 < x < \sqrt{\frac{1}{2a}}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 有单调递增 ,

当 $x > \sqrt{\frac{1}{2a}}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减 ,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \ln \sqrt{\frac{1}{2a}} - a\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2 = -\frac{1}{2} \ln 2a - \frac{1}{2}$, 于是要使函数 $f(x)$ 恰有两个不同的零点, 则需满足 $-\frac{1}{2} \ln 2a - \frac{1}{2} > 0$, 即 $\ln 2a < -1$, 所以 $0 < 2a < \frac{1}{e}$, 即 $0 < a < \frac{1}{2e}$, 所以 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2e}\right)$.

故选C .

【标注】 【知识点】 已知零点或根情况求参数范围；函数零点的概念

🔗 练2

13. 若函数 $f(x) = \frac{k}{x} + \ln x$ 有2个零点, 则实数 k 的取值范围是 () .

- A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ B. $[e, +\infty)$ C. $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ D. $(e, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $f(x) = \frac{k}{x} + \ln x = 0$,

$-k = x \ln x$, 令 $g(x) = x \ln x$,

$g'(x) = 1 + \ln x$,

$x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增 ,

$0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$$g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e},$$

$g(x)$ 与 $y = -k$ 有两个交点,

$0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g(x) < 0$,

$$\therefore -\frac{1}{e} < -k < 0, 0 < k < \frac{1}{e}.$$

故选A.

【标注】 【知识点】已知零点或根情况求参数范围

3. 二阶导问题

例3

14. 若函数 $f(x) = ax + \ln x - \frac{x^2}{x - \ln x}$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{1}{e} - \frac{e}{e-1}, -1\right]$ B. $\left[1, \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e}\right]$ C. $\left(\frac{1}{e} - \frac{e}{e-1}, -1\right)$ D. $\left(1, \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e}\right)$

【答案】 D

【解析】 令 $f(x) = 0$, 可得 $a = \frac{x}{x - \ln x} - \frac{\ln x}{x}$,

$$\text{令 } g(x) = \frac{x}{x - \ln x} - \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = (1 - \ln x) \left(\frac{1}{(x - \ln x)^2} - \frac{1}{x^2} \right),$$

令 $g'(x) = 0$ 可得 $x = e$ 或 $x = 1$ 或 $2x = \ln x$,

令 $h(x) = 2x - \ln x$, 则 $h'(x) = 2 - \frac{1}{x}$,

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 单调递增,

$\therefore h(x)$ 的最小值为 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln \frac{1}{2} > 0$,

$\therefore$ 方程 $2x = \ln x$ 无解,

当 $0 < x < 1$ 时, $1 - \ln x > 0$, $x - \ln x > x$, 当 $1 < x < e$ 时, $1 - \ln x > 0$,

$0 < x - \ln x < x$, 当 $x > e$ 时, $1 - \ln x < 0$, $0 < x - \ln x < x$,

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $1 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得极小值 $g(1) = 1$, 当 $x = e$ 时, $g(x)$ 取得最大值 $g(e) = \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e}$,

$\therefore f(x)$ 有3个零点,

$\therefore a = g(x)$ 有3解,

$$\therefore 1 < a < \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 函数零点的概念；二阶导问题；已知零点或根情况求参数范围

四、论证零点存在性

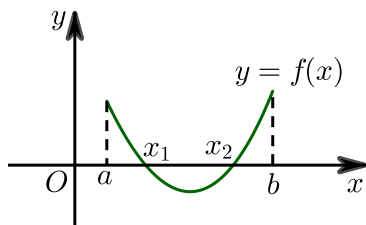
(1)函数零点存在性定理：一般地，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么，函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c) = 0$ ，这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根.

(2)对于函数零点存在性定理的理解，应注意以下四点：

①定理中函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点必须同时满足：函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线， $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，这两个条件缺一不可.可由函数 $y = \frac{1}{x}$ 来理解，易知 $f(-1) \cdot f(1) = -1 \times 1 < 0$ ，但显然 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 内没有零点，这是因为 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上的图象不连续.

②符合该定理的条件能确定 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个变号零点，也可能有其他的变号或不变号零点，即定理只说明零点存在，但零点不一定唯一.

③并不是所有的零点都可以用该定理来确定，若不满足该定理的条件，并不能说明函数在 (a, b) 内没有零点如图， $f(a) \cdot f(b) > 0$ ，但 $f(x)$ 在 (a, b) 内有零点 x_1, x_2 .



④若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的，且是单调函数， $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有唯一的零点.

例1

15. 证明下列函数零点相关问题：

- (1) 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 + a$ ，其中 $a > 0$ ，证明： $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.
- (2) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2} - a$ ，其中 $a > 0$ ，证明： $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.
- (3) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - a$ ，其中 $a > 0$ ，证明： $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.
- (4) 已知函数 $f(x) = x \ln x + a$ ，其中 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，证明： $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 有唯一零点.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

(4) 证明见解析.

【解析】(1) $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 最多一个零点,
 $f(1) = 0 + 1 + a > 0$, 令 $x < 1$ 时, $x^2 < 1$, 则 $f(x) < \ln x + 1 + a$,
 $f(e^{-a-1}) < \ln e^{-a-1}$, $0 < e^{-a-1} < 1$, 则 $f(x)$ 在 $(e^{-a-1}, 1)$ 上存在零点, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.

(2) $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2}{x^3} = 0$ 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 最多一个零点,
 $f(1) = 0 + 1 - a < 0$, 令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 则
 $x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 则 $x \in (0, 1)$ 时 $g(x) > g(1) > 0$, 即 $\ln x > -\frac{1}{x}$,
则 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) > -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - a$,
 $= \left(\frac{1}{2x^2} - a \right) + \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right)$
 $= \frac{1-2ax^2}{2x^2} + \frac{1-2x}{2x^2}$. 令 $x_0 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2a}} \right\}$ 则 $1-2x_0 \geq 0$, $1-2ax_0^2 \geq 0$, 则
 $f(x_0) > 0$,
由 $0 < x_0 < 1$, 可得 $f(x)$ 在 $(x_0, 1)$ 上存在零点, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.

(3) $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 最多一个零点,
 $f(1) = 0 + 1 - a < 0$,
令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 则 $x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 则 $x \in (0, 1)$ 时 $g(x) > g(1) > 0$, 即 $\ln x > -\frac{1}{x}$,
则 $x \in (0, 1)$ 时 $\ln \sqrt{x} > -\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\ln x > -\frac{2}{\sqrt{x}}$, 则 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - a$
 $= \left(\frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) + \left(\frac{1}{2x} - a \right)$
 $= \frac{1-4\sqrt{x}}{2x} + \frac{1-2ax}{2x}$.
令 $x_0 = \min \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{2a} \right\}$, 则 $1-4\sqrt{x_0} \geq 0$, $1-2ax_0 \geq 0$, 则 $f(x_0) > 0$,
由 $0 < x_0 < 1$, 可得 $f(x)$ 在 $(x_0, 1)$ 上存在零点, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点.

(4) $x \in \left(0, \frac{1}{e} \right)$ 时, $f'(x) = \ln x + 1 < 0$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e} \right)$ 单调递减, 最多一个零点,
 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right) \times (-1) + a < 0$. 令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

则 $x \in (0, 1)$ 时 $g(x) > g(1) > 0$, 即 $\ln x > -\frac{1}{x}$,
 则 $x \in (0, 1)$ 时 $\ln \sqrt{x} > -\frac{1}{\sqrt{x}}$, 即 $\ln x > -\frac{2}{\sqrt{x}}$,
 则 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $x \ln x > -2\sqrt{x}$, $f(x) > a - 2\sqrt{x}$, 则 $f\left(\frac{a^2}{4}\right) > 0$, $\frac{a^2}{4} < \frac{1}{e}$, 则
 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a^2}{4}, \frac{1}{e}\right)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 有唯一零点.

【标注】 【知识点】函数零点存在性定理；导数与单调性

练1

16. 证明下面与零点相关命题：

(1) 已知函数 $f(x) = \ln x - 4\sqrt{x} + a$, 其中 $a > 4$, 证明： $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 有唯一零点.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 4 \times \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{x}$,

$x > 1$ 时 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 最多一个零点,

$f(1) = 0 - 4 + a > 0$,

令 $g(x) = \ln x - x$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$,

$x > 1$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

则 $x > 1$ 时 $g(x) < g(1) < 0$, 即 $\ln x < x$,

则 $x > 1$ 时 $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, 即 $\ln x < 2\sqrt{x}$,

则 $f(x) < -2\sqrt{x} + a$, 则 $f\left(\frac{a^2}{4}\right) < 0$, 由 $a > 4$ 可得 $\frac{a^2}{4} > 1$,

则 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{a^2}{4}\right)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 有唯一零点.

(2) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > e$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 最多一个零点,

$f(e) = \frac{1}{e} - a > 0$,

令 $g(x) = \ln x - x$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$,

$x > 0$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

则 $x > e$ 时 $g(x) < g(e) < 0$, 即 $\ln x < x$,

则 $x > e$ 时 $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, 即 $\ln x < 2\sqrt{x}$,

则 $f(x) < \frac{2\sqrt{x}}{x} - a = \frac{2}{\sqrt{x}} - a$,

则 $f\left(\frac{4}{a^2}\right) < 0$, 由 $0 < a < \frac{1}{e}$ 可得 $\frac{4}{a^2} > e$,

则 $f(x)$ 在 $\left(e, \frac{4}{a^2}\right)$ 存在零点, 则 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 有唯一零点.

$$(3) f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

则 $x \in (0, 1)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$$f(1) = 1 - a < 0,$$

$x > 1$ 时, $\frac{1}{x} > 0$, $f(x) > \ln x - a$,

则 $f(e^a) > 0$, 由 $a > 1$ 可得 $e^a > 1$,

则 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 存在零点,

$$\text{令 } g(x) = \ln x + \frac{1}{x}, g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

$x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

则 $x \in (0, 1)$ 时 $g(x) > g(1) > 0$, 即 $\ln x > -\frac{1}{x}$,

则 $x \in (0, 1)$ 时 $\ln \sqrt{x} > -\frac{1}{\sqrt{x}}$, 即 $\ln x > -\frac{2}{\sqrt{x}}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) &> \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - a \\ &= \left(\frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \left(\frac{1}{2x} - a\right) \\ &= \frac{1-4\sqrt{x}}{2x} + \frac{1-2ax}{2x}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } x_0 = \min\left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{2a}\right\},$$

则 $1-4\sqrt{x} \geq 0$, $1-2ax \geq 0$,

即 $f(x_0) > 0$,

则 $f(x)$ 在 $(x_0, 1)$ 存在零点,

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点.

【标注】 【知识点】导数与最值

例2

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$.

(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$, $(3+2\sqrt{3}, +\infty)$, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 当 $a = 3$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 3x - 3$,

$$f'(x) = x^2 - 6x - 3,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0,$$

$$\therefore x^2 - 6x - 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{6 - \sqrt{48}}{2} = 3 - 2\sqrt{3}, x_2 = \frac{6 + \sqrt{48}}{2} = 3 + 2\sqrt{3},$$

所以, 当 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递增,

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上单调递减,

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述: $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 3 - 2\sqrt{3})$, $(3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$.

(2) 方法一: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a(x^2 + x + 1)$, 令 $f(x) = 0$, 可知 $\frac{1}{3}x^3 = a(x^2 + x + 1)$,

因为 $x^2 + x + 1 \neq 0$, 进一步有 $3a = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$,

要证 $f(x)$ 只有一个零点等价于函数 $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$ 与直线 $y = 3a$ 有且只有一个交点.

$$\begin{aligned}\therefore h(x) &= \frac{x^3}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{x^3 - 1 + 1}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 1}{x^2 + x + 1}\end{aligned}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1},$$

$$\begin{aligned}\therefore h'(x) &= 1 + \frac{-(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 - (2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2(x^2 + 2x + 3)} \\ &= \frac{x^2(x^2 + 2x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2} \geq 0,\end{aligned}$$

当且仅当 $x = 0$ 时, $h'(x) = 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

又 $x \rightarrow -\infty, h(x) \rightarrow -\infty$ 且 $x \rightarrow +\infty, h(x) \rightarrow +\infty$,

故直线 $y = 3a$ 与函数 $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$ 有且仅有一个交点.

综上, $f(x)$ 只有一个零点.

方法二：由于 $x^2 + x + 1 > 0$ ，所以 $f(x) = 0$ 等价于 $\frac{x^3}{x^2 + x + 1} - 3a = 0$.
 设 $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} - 3a$ ，则 $g'(x) = \frac{x^2(x^2 + 2x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2} \geq 0$ ，
 当且仅当 $x = 0$ 时， $g'(x) = 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增 .
 故 $g(x)$ 至多有一个零点，从而 $f(x)$ 至多有一个零点 .
 又 $f(3a - 1) = -6a^2 + 2a - \frac{1}{3} = -6\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} < 0$ ，
 $f(3a + 1) = \frac{1}{3} > 0$ ，故 $f(x)$ 只有一个零点，
 综上， $f(x)$ 只有一个零点 .

【标注】 【知识点】参变分离法求零点个数

练2

18. 已知函数 $f(x) = 2e^x - ax^2 - 2x - 2$.

(2) 当 $a \leq 0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 有且只有一个零点 .

【答案】 (1) $y = 0$.

(2) 证明见解析

(3) 当 $0 < a < 1$ 时， $f(x)$ 有两个零点 .

当 $a = 1$ 时， $f(x)$ 有一个零点；

当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 有两个零点 .

【解析】 (1) 因为函数 $f(x) = 2e^x - ax^2 - 2x - 2$ ，

所以 $f'(x) = 2e^x - 2ax - 2$.

故 $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 0$ ，

曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = 0$.

(2) 当 $a \leq 0$ 时，令 $g(x) = f'(x) = 2e^x - 2ax - 2$ ，则 $g'(x) = 2e^x - 2a > 0$ ，

故 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数 .

由 $g(0) = 0$ ，

故当 $x < 0$ 时， $g(x) < 0$ ，当 $x > 0$ 时， $g(x) > 0$.

即当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，在 $(0, +\infty)$ 单调递增 .

函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$

由 $f(0) = 0$ ，

故 $f(x)$ 有且仅有一个零点 .

(3) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 有一个零点;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

【标注】 【知识点】 求函数零点 (含参指对型导函数)

五、求零点个数

1. 静态取点

例1

19. 已知函数 $f(x) = e^{mx} - 1 - x (m > 0)$.

(2) 探讨 $f(x)$ 的零点个数.

【答案】 (1) $m \geq 1$.

(2) 当 $m = 1$ 时, $f(x)$ 有一个零点,

当 $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 时, 有两个零点.

【解析】 (1) $f(x) = e^{mx} - 1 - x (m > 0)$, $f(0) = 0$,

$$f'(x) = me^{mx} - 1,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = -\frac{\ln m}{m},$$

所以: ① 当 $0 < m < 1$ 时, $-\frac{\ln m}{m} > 0$, $f(x)$ 在 $\left[0, -\frac{\ln m}{m}\right)$ 递减,

又 $f(0) = 0$, 故当 $x \in \left(0, -\frac{\ln m}{m}\right)$ 时, $f(x) < 0$, 不满足.

② 当 $m \geq 1$ 时, $-\frac{\ln m}{m} \leq 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 递增,

$f(x) \geq f(0) = 0$, 满足条件,

所以 $m \geq 1$.

(2) 由 (1) 知, ① $0 < m < 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\ln m}{m}\right)$ 递减,

在 $\left(-\frac{\ln m}{m}, +\infty\right)$ 递增, $-\frac{\ln m}{m} > 0$, $f(0) = 0$, $f\left(-\frac{\ln m}{m}\right) < 0$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 有两个零点.

② $m = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递减, 在 $(0, +\infty)$ 递增,

$f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 有一个零点.

③ $m > 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\ln m}{m}\right)$ 递减,
 在 $\left(-\frac{\ln m}{m}, +\infty\right)$ 递增,
 $-\frac{\ln m}{m} < 0$, $f(0) = 0$, $f\left(-\frac{\ln m}{m}\right) < 0$,
 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) > 0$,
 所以 $f(x)$ 有两个零点.
 综上①②③, 当 $m = 1$ 时, $f(x)$ 有一个零点,
 当 $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 时, 有两个零点.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 求函数零点 (含参指对型导函数)

练1

20. 已知函数 $f(x) = (x+a)e^x$, $a < 1$, 试确定函数 $g(x) = f(x-a) - x^2$ 的零点个数, 并说明理由.

【答案】 见解析.

【解析】 结论: 函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点.

理由如下: 由 $g(x) = f(x-a) - x^2 = 0$, 得方程 $xe^{x-a} = x^2$,

显然 0 为此方程的一个实数解. 所以 0 是函数 $g(x)$ 的一个零点.

当 $x \neq 0$ 时, 方程可化简为 $e^{x-a} = x$.

设函数 $F(x) = e^{x-a} - x$, 则 $F'(x) = e^{x-a} - 1$,

令 $F'(x) = 0$, 得 $x = a$.

当 x 变化时, $F(x)$ 和 $F'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, +\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

即 $F(x)$ 的单调增区间为 $(a, +\infty)$; 单调减区间为 $(-\infty, a)$.

所以 $F(x)$ 的最小值 $F(x)_{\min} = F(a) = 1 - a$. 因为 $a < 1$,

所以 $F(x)_{\min} = F(a) = 1 - a > 0$, 所以对于任意 $x \in \mathbb{R}$, $F(x) > 0$,

因此方程 $e^{x-a} = x$ 无实数解. 所以当 $x \neq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 不存在零点.

综上, 函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点.

【标注】 【知识点】求函数零点 (含参指对型导函数)

21. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(3) 讨论函数 $g(x) = f'(x) - x$ 的零点个数.

【答案】 (1) $a = 2$.

(2) $a \leq 2$.

(3) 答案见解析.

【解析】 (1) 因为 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x - a}{x^2}$,

由已知 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 所以 $f'(1) = 0$.

解得 $a = 2$, 经检验 $a = 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 所以 $a = 2$.

(2) 由 (1) 知, $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + x - a}{x^2}, x > 0$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) \geq 0$ 在区间 $(1, 2)$ 上恒成立.

即 $a \leq x^2 + x$ 在区间 $(1, 2)$ 上恒成立. 所以 $a \leq 2$.

(3) 因为 $g(x) = f'(x) - x$, 所以 $g(x) = 1 - \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} - x, x > 0$.

令 $g(x) = 0$ 得 $a = -x^3 + x^2 + x$, 令 $h(x) = -x^3 + x^2 + x, x > 0$.

$h'(x) = -3x^2 + 2x + 1 = -(3x + 1)(x - 1)$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

$h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$. 综上: 当 $a > 1$ 时, 函数 $g(x)$ 无零点,

当 $a = 1$ 或 $a \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 有一个零点,

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $g(x)$ 有两个零点.

【标注】 【知识点】求函数零点 (含参二次型导函数); 区间上恒单调

22. 讨论函数 $f(x) = x + a \ln x$ 零点的个数.

【答案】 当 $a < -e$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点,

当 $a = -e$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点,

当 $-e < a < 0$ 时, $f(x)$ 无零点.

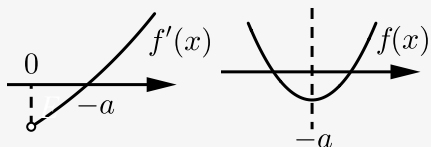
【解析】 含参单调性讨论+极限值 $\Rightarrow f(x)$ 准确图象,

① $a = 0$ 时, $f(x) = x (x > 0)$, 无零点,

② $a > 0$ 时, 由 $\uparrow + \uparrow = \uparrow$ 得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty) \uparrow$,

又 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 由零点存在性定理知必有一零点,

③ $a < 0$ 时, $f'(x) = 1 + \frac{a}{x} = \frac{x+a}{x}$,



$$y_{\min} = f(-a) = -a + a \ln(-a),$$

$$f(x) \text{ 有 2 个零点} \Leftrightarrow y_{\min} < 0 \Rightarrow \ln(-a) > 1 \Rightarrow a < -e,$$

$$f(x) \text{ 有 2 个零点} \Leftrightarrow y_{\min} = 0 \Leftrightarrow a = -e,$$

$$f(x) \text{ 无零点} \Leftrightarrow y_{\min} > 0 \Leftrightarrow -e < a < 0,$$

综上所述,

当 $a < -e$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点,

当 $a = -e$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点,

当 $-e < a < 0$ 时, $f(x)$ 无零点.

【标注】 【知识点】函数零点存在定理; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数求函数的零点及个数

2. 动态取点

例2

23. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} (a \in \mathbf{R})$.

(3) 当 $a > 0$ 时, 讨论函数 $y = f(x)$ 零点的个数.

【答案】 (1) $x - y = 0$.

(2) $a \leq 2\sqrt{2}$.

(3) 当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在定义域内无零点;

当 $a = e$ 时, $f(x)$ 在定义域内有唯一的零点;

当 $a > e$ 时, $f(x)$ 在定义域内有两个零点.

【解析】 (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x}$, $f(1) = 1$,

$$\text{即有 } f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}, f'(1) = 1.$$

$$\text{则切线方程为 } y - 1 = x - 1,$$

$$\text{即为 } x - y = 0;$$

(2) 由 $g(x) = f(x) - 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{等价于 } g'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} - 2 \leq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 恒成立,}$$

变形得 $a \leq 2x + \frac{1}{x} (a > 0)$ 恒成立,

而 $2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$,

(当且仅当 $2x = \frac{1}{x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立.)

则有 $a \leq 2\sqrt{2}$.

$$(3) f'(x) = \frac{ax-1}{x^2},$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$.

x	$\left(0, \frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

即有 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = a \ln \frac{1}{a} + a = a(1 - \ln a)$.

(i) 当 $0 < a < e$ 时, $f(x)_{\min} > 0$, 即有 $f(x)$ 在定义域内无零点;

(ii) 当 $a = e$ 时, $f(x)_{\min} = 0$, 则 $f(x)$ 在定义域内有唯一的零点;

(iii) 当 $a > e$ 时, $f(x)_{\min} < 0$,

① 由 $f(1) = 1 > 0$, $\therefore f(x)$ 在增区间 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 内有唯一零点;

② $f\left(\frac{1}{a^2}\right) = a(a - 2\ln a)$,

设 $h(a) = a - 2\ln a$, 则 $h'(a) = 1 - \frac{2}{a}$,

$\therefore a > e$, $\therefore h'(a) > 0$, 即 $h(a)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调增,

即有 $h(a) > h(e) > 0$, 即 $f\left(\frac{1}{a^2}\right) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在减区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 内有唯一的零点.

则 $a > e$ 时, $f(x)$ 在定义域内有两个零点.

综上所述: 当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在定义域内无零点;

当 $a = e$ 时, $f(x)$ 在定义域内有唯一的零点;

当 $a > e$ 时, $f(x)$ 在定义域内有两个零点.

【标注】 【知识点】 区间上恒单调; 求函数零点 (含参一次型导函数)

练2

24.

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x^2}{2} - (a+1)x$, $a \in R$.

(2) 当 $a \leq 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

【答案】(1) 最小值 $f(1) = \frac{1}{2}$.

(2) $0 \leq a \leq 1$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 有一个零点;

$a < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 无零点;

$-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x > 0\}$.

当 $a = -1$ 时, $f(x) = -\ln x + \frac{x^2}{2}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + x = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x}.$$

由 $\frac{(x+1)(x-1)}{x} > 0 (x > 0)$ 解得 $x > 1$; 由 $\frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0 (x > 0)$ 解得

$$0 < x < 1.$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增.

所以 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 $f(1) = \frac{1}{2}$.

$$(2) f'(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{x}, x > 0.$$

(1) 当 $a \leq 0$ 时,

$x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时取得最小值 $f(1) = -a - \frac{1}{2}$.

(i) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = \frac{x^2}{2} - x$, 由于 $x > 0$, 令 $f(x) = 0$, $x = 2$, 则 $f(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上有一个零点;

(ii) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 即 $f(1) = 0$ 时, $f(x)$ 有一个零点;

(iii) 当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 即 $f(1) > 0$ 时, $f(x)$ 无零点.

(iv) 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 即 $f(1) < 0$ 时,

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $0 < e^{\frac{1}{a}} < 1$, $0 < a+1 < 1$,

所以 $0 < (a+1)e^{\frac{1}{a}} < 1$,

$$\text{所以 } f\left(e^{\frac{1}{a}}\right) = 1 + \frac{e^{\frac{2}{a}}}{2} - (a+1)e^{\frac{1}{a}} > \frac{e^{\frac{2}{a}}}{2} > 0,$$

因为 $-\frac{1}{2} < a < 0$, 易得 $a(3-a) > -2$, $(a+1)e^{3-a} < e^{3-a} < e^4$,

$$\text{所以 } f(e^{3-a}) = a(3-a) + \frac{(e^{3-a})^2}{2} - (a+1)e^{3-a} > \frac{e^{6-2a}}{2} - 2 - e^4 > e^6 - 2 - e^4 > 0$$

所以 $f(x)$ 有两个零点.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,

$x \in (0, a)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数;

$x \in (a, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取极大值, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极小值.

$$f(a) = a \ln a + \frac{1}{2}a^2 - (a+1)a = a \ln a - \frac{1}{2}a^2 - a.$$

当 $0 < a < 1$ 时, $f(a) < 0$, 即在 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$.

而 $f(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 时为增函数, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

所以此时 $f(x)$ 有一个零点.

(3) 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 为增函数.

且 $x \rightarrow 0$ (从右侧趋近0) 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

所以 $f(x)$ 有一个零点.

综上所述, $0 \leq a \leq 1$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 有一个零点; $a < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 无零点;

$$-\frac{1}{2} < a < 0$$

$f(x)$ 有两个零点.

【标注】 【知识点】求函数零点 (含参二次型导函数)