

03不等式证明（一）

一、不等式问题

题型概览：

证明 $f(x) < g(x), x \in (a, b)$ ，可以直接构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，证明 $x \in (a, b)$ 时，有 $F(x) < 0$ ，即证明了 $f(x) < g(x)$ ，有时需对不等式等价变形后间接，若上述方法通过导数不便于讨论 $F(x)$ 的符号，分别研究 $f(x)g(x)$ 的单调性与最值情况，有时需对不等式进行等价转化。

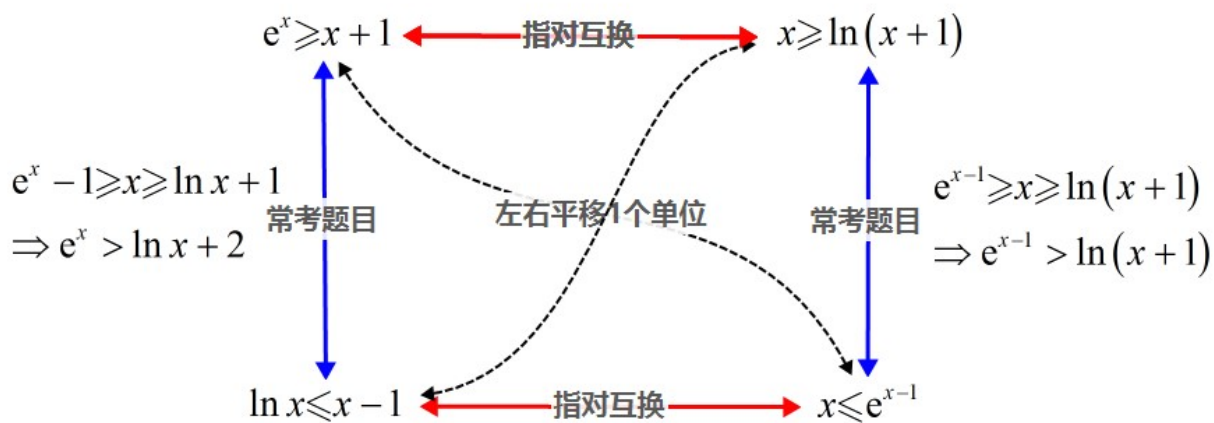
证明单元不等式 $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ 恒成立；

方法1：构造新函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，证明 $F(x) = f(x) - g(x)$ ，证明 $F(x) \leq 0, \forall x \in I$

方法2：证明一个更强不等式成立 $f(x)_{\max} \leq g(x)_{\min}$ ，从而 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立；

其中：方法1考查较多，方法2考查较少

1. 常见不等式的证明



例1：证明指数不等式

1. 证明如下指数不等式：

(1) $e^x \geq x+1$ (当 $x=0$ 时取等)

(2) $e^x \geq ex$ (当 $x=1$ 时取等)。

【答案】(1) 略

(2) 略

【标注】【知识点】导数的应用

🔗 练1：同理推导如下指数不等式

指数不等式 (I)：以 $-x$ 代替 $x \Rightarrow e^{-x} \geq 1-x$ ，当 $x < 1$ 时有 $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ （当 $x=0$ 时取等），这是为数不多的可以放大指数结构的不等式；

指数不等式 (II)：当 $x \geq 0$ 时有 $e^x \geq ex \geq 2x$

🔗 例2：证明如下对数不等式

2. 证明如下对数不等式：

(1) $\ln x \leq x-1$ （当 $x=1$ 时取等）；

(2) $\ln x \leq \frac{x}{e}$ （当 $x=e$ 时取等）。

【答案】(1) 略

(2) 略

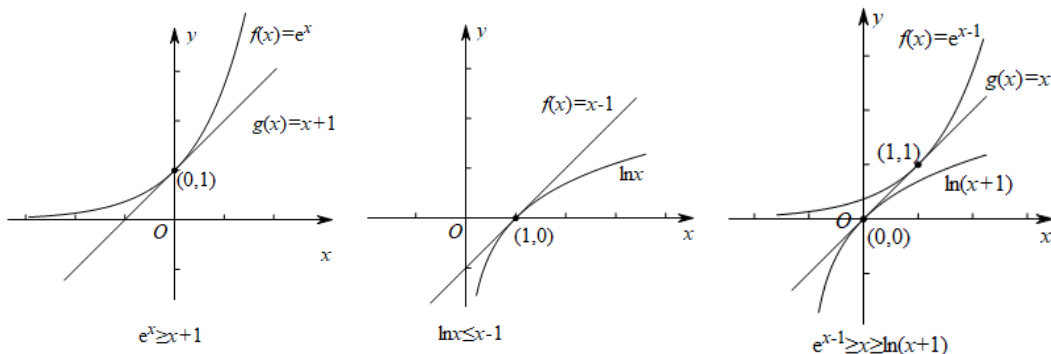
【标注】【知识点】导数的应用

🔗 练2：同理推导如下指数不等式

对数不等式 (I)：以 $\frac{1}{x}$ 代替 $x \Rightarrow \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$ ，整理得： $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ （当 $x=1$ 时取等）；

对数不等式 (II)： $\ln x \leq \frac{x}{e} < \frac{x}{2}$ ，即 $\ln x^2 < x$ ，以 $\sqrt{x}$ 代替 $x \Rightarrow \ln x < \sqrt{x}$ 。

2. 常见指对函数的图象及切线



【仅教师可见】

在不含参的不等式证明中，如果证明题的前面出现了确定的不等式，或者是求解函数在特殊点处的切线，亦或是证明题中的式子明显与切线方程相关联。那么需要特别注意——往往第(1)问的结论就

是为下一问做铺垫的。

 例3：利用切线方程放缩函数

3. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) 求证：当 $x > 0$ 时， $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

【答案】 (1) $y = (e-2)x + 1$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - 2x$, 由题设得 $f'(1) = e - 2$, $f(1) = e - 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = (e-2)x + 1$.

(2) $f'(x) = e^x - 2x$, $f''(x) = e^x - 2$,

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x) \geq f'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = e - 1$, $x \in [0, 1]$. $f(x)$ 过点 $(1, e-1)$, 且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = (e-2)x + 1$,

故可猜测：当 $x > 0$, $x \neq 1$ 时， $f(x)$ 的图象恒在切线 $y = (e-2)x + 1$ 的上方 .

易证：当 $x > 0$ 时， $f(x) \geq (e-2)x + 1$,

设 $g(x) = f(x) - (e-2)x - 1$, $x > 0$, 则 $g'(x) = e^x - 2x - (e-2)$, $g''(x) = e^x - 2$,

$g'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增，又 $g'(0) = 3 - e > 0$, $g'(1) = 0$

, $0 < \ln 2 < 1$, $\therefore g'(\ln 2) < 0$,

所以，存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

所以，当 $x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, 1)$ 时， $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0) = g(1) = 0$,

$\therefore g(x) = e^x - x^2 - (e-2)x - 1 \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号，故

$\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq x$, $x > 0$.

又 $x \geq \ln x + 1$, 即 $\frac{e^x + (2-e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$, 当 $x = 1$ 时，等号成立 .

【标注】【知识点】导数的实际应用；导数与单调性

 例4：利用已知确定不等式放缩函数

4. 函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + ax (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = e^x + \frac{3}{2}x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的极值点的个数.

(2) 若对于 $\forall x > 0$, 总有 $f(x) \leq g(x)$,

① 求实数 a 的范围;

② 求证: 对于 $\forall x > 0$, 不等式 $e^x + x - (e+1) + \frac{e}{x} > 2$ 成立.

【答案】 (1) $a < -2$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个极值点; 当 $a \geq -2$ 时, 函数 $f(x)$ 没有极值点.

(2) ① $a \leq e+1$.

② 证明见解析.

【解析】 (1) 方法一: 由题意得 $f'(x) = x + \frac{1}{x} + a = \frac{x^2 + ax + 1}{x} (x > 0)$, 令 $\Delta = a^2 - 4$.

(1) 当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 即 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 对 $x > 0$ 恒成立, 即

$f'(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x} \geq 0$ 对 $x > 0$ 恒成立, 此时 $f(x)$ 没有极值点;

(2) 当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 即 $a < -2$ 或 $a > 2$, ① $a < -2$ 时, 设方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 两个不同实根为 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 + x_2 = -a > 0, x_1 x_2 = 1 > 0$, 故 $x_2 > x_1 > 0$, $\therefore 0 < x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$; 在 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$, 故 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点.

② $a > 2$ 时, 设方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 两个不同实根为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 + x_2 = -a < 0, x_1 x_2 = 1 > 0$, 故 $x_2 < 0, x_1 < 0$, $\therefore x > 0$ 时, $f'(x) > 0$; 故函数 $f(x)$ 没有极值点.

综上, $a < -2$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个极值点; 当 $a \geq -2$ 时, 函数 $f(x)$ 没有极值点.

方法二: $f'(x) = x + \frac{1}{x} + a$,

$\because x > 0, \therefore f'(x) \in [a+2, +\infty)$,

当 $a+2 \geq 0$, 即 $a \in [-2, +\infty)$ 时, $f'(x) \geq 0$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $f(x)$ 没有极值点;

② 当 $a+2 < 0$, 即 $a \in (-\infty, -2)$ 时, 方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有两个不等正数解 x_1, x_2 ,

$f'(x) = x + \frac{1}{x} + a = \frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} (x > 0)$, 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 则

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 增; $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 减; $x \in (x_2, +\infty)$

时, $f'(x) > 0, f(x)$ 增, 所以 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 极大值点和极小值点, $f(x)$ 有两个极值点, 综上所述, 当 $a \in [-2, +\infty)$ 时, $f(x)$ 没有极值点;

当 $a \in (-\infty, -2)$ 时, $f(x)$ 有两个极值点.

(2) ① $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow e^x - \ln x + x^2 \geq ax$, 由 $x > 0$, 即 $a \leq \frac{e^x + x^2 - \ln x}{x}$ 对于 $\forall x > 0$ 恒成立,

设 $\varphi(x) = \frac{e^x + x^2 - \ln x}{x} (x > 0)$,

$\varphi'(x) = \frac{(e^x + 2x - \frac{1}{x})x - (e^x + x^2 - \ln x)}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + \ln x + (x+1)(x-1)}{x^2}$,

$\therefore x > 0, \therefore x \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x) < 0, \varphi(x)$ 减, $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0, \varphi(x)$ 增,
 $\therefore \varphi(x) \geq \varphi(1) = e + 1, \therefore a \leq e + 1$.

② 由(i)知, 当 $a \leq e + 1$ 时有 $f(x) \leq g(x)$, 即: $e^x + \frac{3}{2}x^2 \geq \ln x + \frac{1}{2}x^2 + (e + 1)x$,
 $\Leftrightarrow e^x + x^2 - (e + 1)x \geq \ln x$.

① 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 以下证明: $\ln x + \frac{e}{x} \geq 2$, 设

$$\theta(x) = \ln x + \frac{e}{x}, \theta'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x - e}{x^2},$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, e)$ 时 $\theta'(x) < 0, \theta(x)$ 减, $x \in (e, +\infty)$ 时, $\theta'(x) > 0, \theta(x)$ 增,

$$\therefore \theta(x) \geq \theta(e) = 2, \therefore \ln x + \frac{e}{x} \geq 2.$$

② 当且仅当 $x = e$ 时取等号;

由于①②等号不同时成立, 故有 $e^x + x^2 - (e + 1)x + \frac{e}{x} > 2$.

【标注】【知识点】求解函数极值; 已知极值情况求参数范围; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 导数与最值

练4

5. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (a + 2)x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 设 $a \in \mathbf{Z}$, 若对任意的 $x > 0, f(x) \leq 0$ 恒成立, 求整数 a 的最大值.

(3) 求证: 当 $x > 0$ 时, $e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > 0$.

【答案】 (1) ① 若 $a \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

② 若 $a < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增; 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) -2 .

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + a + 2 = \frac{2ax^2 + (a + 2)x + 1}{x}$
 $= \frac{(2x + 1)(ax + 1)}{x} (x > 0),$

① 若 $a \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

② 若 $a < 0$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < -\frac{1}{a}$; 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > -\frac{1}{a}$,
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增; 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 若 $a \geq 0$, 则 $f(1) = 2a + 3 > 0$,

$\therefore$ 不满足 $f(x) \leq 0$ 恒成立,

若 $a < 0$, 由 (1) 可知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增; 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

$$\begin{aligned}
&\therefore f(x)_{\max} = f\left(-\frac{1}{a}\right) = \ln\left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}, \text{ 又 } f(x) \leq 0 \text{ 恒成立,} \\
&\therefore f(x)_{\max} \leq 0, \text{ 即 } \ln\left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a} \leq 0, \\
&\text{设 } g(x) = \ln x + x, \text{ 则 } g\left(-\frac{1}{a}\right) \leq 0, \\
&\therefore g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \\
&\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 且 } g(1) = 1 > 0, g\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 + \frac{1}{2} < 0, \\
&\therefore \text{存在唯一的 } x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } g(x_0) = 0, \\
&\text{当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } g(x) < 0, \text{ 当 } x \in (x_0, +\infty) \text{ 时, } g(x) > 0, \\
&\therefore 0 < -\frac{1}{a} \leq x_0, \text{ 解得 } a \leq -\frac{1}{x_0} \in (-2, -1), \text{ 又 } a \in \mathbf{Z}, \\
&\therefore a \leq -2, \text{ 整数 } a \text{ 的最大值为 } -2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \text{ 由 (2) 可知, } a = -2 \text{ 时, } f(x) = \ln x - 2x^2 + 1 < 0, \\
&\therefore \ln x < 2x^2 - 1, \\
&\therefore -x \ln x > -2x^3 + x, \\
&\therefore e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > e^x - 2x^3 + x + 2x^3 - x^2 + x - 1 \\
&= e^x - x^2 + 2x - 1, \\
&\text{记 } u(x) = e^x - x^2 + 2x - 1 (x > 0), \text{ 则 } u'(x) = e^x - 2x + 2, \\
&\text{记 } h(x) = e^x - 2x + 2 (x > 0), \text{ 则 } h'(x) = e^x - 2, \text{ 当 } x \in (0, \ln 2) \text{ 时, } h'(x) < 0; \\
&x \in (\ln 2, +\infty) \text{ 时, } h'(x) > 0, \\
&\therefore \text{函数 } h(x) \text{ 在 } (0, \ln 2) \text{ 上单调递减; 在 } (\ln 2, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\
&\text{所以 } h(x)_{\min} = h(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 + 2 = 4 - 2 \ln 2 > 0, \\
&\therefore h(x) > 0, \text{ 即 } u'(x) > 0, \text{ 故函数 } u(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\
&\therefore u(x) > u(0) = e^0 - 1 = 0, \text{ 即 } e^x - x^2 + 2x - 1 > 0, \\
&\text{所以 } e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > 0.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式；二阶导问题；利用导数解决不等式恒成立问题；求函数单调区间（含参二次型导函数）

6. 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

- (1) 当 $a = 0$ 时, 求证: $f(x) \geq 0$.
- (2) 当 $x \geq 0$ 时, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
- (3) 若 $x > 0$, 证明 $(e^x - 1) \ln(x + 1) > x^2$.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $a=0$ 时, $f(x) = e^x - 1 - x$, $f'(x) = e^x - 1$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$f(x)_{\min} = f(0) = 0$,

$\therefore f(x) \geq 0$.

(2) $f'(x) = e^x - 1 - 2ax$,

令 $h(x) = e^x - 1 - 2ax$, 则 $h'(x) = e^x - 2a$,

① 当 $2a \leq 1$ 时, 在 $[0, +\infty)$ 上, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 递增, $h(x) \geq h(0)$,

即 $f'(x) \geq f'(0) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 为增函数,

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$,

$\therefore a \leq \frac{1}{2}$ 时满足条件;

② 当 $2a > 1$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 2a$,

当 $x \in [0, \ln 2a)$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$\therefore x \in [0, \ln 2a)$ 时, 有 $h(x) < h(0) = 0$, 即 $f'(x) < f'(0) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $[0, \ln 2a)$ 为减函数,

$\therefore f(x) < f(0) = 0$, 不合题意,

综上得实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(3) 由 (2) 得, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $x > 0$, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

即 $e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2}$,

欲证不等式 $(e^x - 1) \ln(x+1) > x^2$, 只需证 $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$,

设 $F(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$,

则 $F'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$,

$\therefore x > 0$ 时, $F'(x) > 0$ 恒成立, 且 $F(0) = 0$,

$\therefore F(x) > 0$ 恒成立,

所以原不等式得证.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 通过构造函数证明不等式; 二阶导问题

例5: 清君侧+利用常用指数不等式进行放缩

7. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 证明: $f(x) > \frac{x+1}{e^x}$ (其中 e 是自然对数的底数, $e = 2.71828 \dots$).

【答案】 (1) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 在 $(1, +\infty)$ 上也单调递减.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 定义域是 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}.$$

$$\text{令 } u(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x, \text{ 则 } u'(x) = \frac{1-x}{x^2},$$

所以 $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 递增, 在 $(1, +\infty)$ 递减,

故 $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 时, $u(x) < u(1) = 0$, 也即 $f'(x) < 0$,

因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 在 $(1, +\infty)$ 上也单调递减.

(2) 即证明 $\frac{\ln x}{x-1} > \frac{x+1}{e^x}$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$,

① 先证明 $x \in (1, +\infty)$ 时的情况:

此时问题等价于 $\ln x - \frac{x^2-1}{e^x} > 0$,

$$\text{令 } g(x) = \ln x - \frac{x^2-1}{e^x}, \quad g'(x) = \frac{e^x + x^3 - 2x^2 - x}{xe^x}.$$

令 $h(x) = e^x + x^3 - 2x^2 - x$, 则 $h'(x) = e^x + 3x^2 - 4x - 1$, $h''(x) = e^x + 6x - 4 > 0$,
($x > 1$),

故 $h'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增, 故 $h'(x) > h'(1) = e - 2 > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增.

于是 $h(x) > h(1) = e - 2 > 0$, 故 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增,

因此 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) > g(1) = 0$, 即 $\ln x - \frac{x^2-1}{e^x} > 0$.

② 下面证明 $x \in (0, 1)$ 时的情况 (相对更难一点):

$$\text{令 } m(x) = e^x - x - 1, \quad g'(x) = e^x - 1 > 0,$$

故 $m(x)$ 在 $[0, 1)$ 递增,

于是 $x \in (0, 1)$ 时, $m(x) > m(0) = 0$, 故 $\frac{x+1}{e^x} < 1$,

$$\text{令 } n(x) = \ln x - x + 1, \quad n'(x) = \frac{1-x}{x} > 0, \text{ 故 } n(x) \text{ 在 } (0, 1] \text{ 递增,}$$

故 $x \in (0, 1)$ 时, $n(x) < n(1) = 0$, 即 $\ln x - x + 1 < 0$,

即 $\frac{\ln x}{x-1} > 1 > \frac{x+1}{e^x}$, 证毕.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

二、高阶导问题

1. 隐零点问题（运算代换、等价转化）

基本解题思路为：

形式上虚设；运算上代换；数值上估计；策略上等价转化；方法上分离函数（参数）；技巧上反客为主。

例1（运算上代换）

8. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ae^x - \ln x$.

(1) 设 $x = \frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的极值点，求实数 a 的值，并求 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 当 $a > 0$ 时，求证： $f(x) > \frac{1}{2}$.

【答案】 (1) $a = \frac{3\sqrt{e}}{2e}$, $f(x)$ 的递减区间为 $(0, \frac{1}{2})$, 递增区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{又 } f'(x) = x + ae^x - \frac{1}{x} ,$$

$$\because x = \frac{1}{2} \text{ 是 } f(x) \text{ 的极值点 ,}$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + ae^{\frac{1}{2}} - 2 = 0 ,$$

$$\therefore a = \frac{3\sqrt{e}}{2e} ,$$

$$\because f'(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增 , 且 } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 ,$$

$$\therefore f'(x) > 0 \text{ 时 , } x > \frac{1}{2} , f'(x) < 0 \text{ 时 , } x < \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的递减区间为 } \left(0, \frac{1}{2}\right) , \text{ 递增区间为 } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) .$$

(2) 方法一：由(1)可得 $a > 0$ 时， $f'(x) = x + ae^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{又因为 } f'(1) = 1 + ae - 1 = ae > 0 ,$$

当 x 趋近于 0 时， $f'(x)$ 趋近于 $-\infty$ ，

$$\therefore \exists x_0 \in (0, 1) \text{ 使得 } f'(x_0) = 0 , \text{ 即 } x_0 + ae^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 ,$$

$$\text{当 } x \in (0, x_0) \text{ 时 , } f'(x_0) < 0 , x \in (x_0, +\infty) \text{ 时 , } f'(x_0) > 0 ,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (0, x_0) \text{ 递减 , 在 } (x_0, +\infty) \text{ 递增 ,}$$

$$\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2 + ae^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{x_0} - x_0 - \ln x_0 , (0 < x_0 < 1) ,$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{x} - \ln x (0 < x < 1) ,$$

$$g'(x) = x - 1 - \frac{x+1}{x^2} , \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上 } g'(x) < 0 ,$$

$$\therefore g'(x) \text{ 单调递减 ,}$$

$$\therefore g(x) > g(1) = \frac{1}{2} ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{当 } a > 0 \text{ 时, } f(x) > \frac{1}{2}. \\
&\text{方法二: 令 } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x - \frac{1}{2}, (x > 0), \\
&g'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}, \\
&\text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } g'(x) < 0, \text{ 当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } g'(x) > 0, \\
&\therefore g(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 递减, 在 } (1, +\infty) \text{ 递增,} \\
&\therefore g(x) \geq g(1) = \frac{1}{2}, \\
&\therefore g(x) \geq \frac{1}{2}, \\
&\therefore a > 0, \\
&\therefore ae^x > 0, \\
&\therefore \frac{1}{2}x^2 + ae^x - \ln x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】通过构造函数证明不等式

练1

9. 已知 $f(x) = xe^x$.

(1) 证明: $f(x) \geq \ln x + x + 1$.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 设 $g(x) = xe^x - x - \ln x - 1$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (x+1)e^x - \frac{x+1}{x} \\
&= (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right), \\
&\text{令 } u(x) = e^x - \frac{1}{x}, \\
u'(x) &= e^x + \frac{1}{x^2} > 0, \\
&\therefore u(x) \text{ 单调递增, } u\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, u(1) = e - 1 > 0, \\
&\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使 } u(x_0) = 0, \\
&\text{即 } e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, \ln x_0 = -x_0, \\
&\therefore g(x) \geq g(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 - 1 = 0, \\
&\text{即 } f(x) \geq \ln x + x + 1.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】隐零点问题; 二阶导问题; 利用导数解决不等式恒成立问题

2. 隐零点问题 (端点比较)

当 $f(x) > (<) 0$ 在某区间 (a, b) 上恒/能成立, 或者 $f(x) \geq (\leq) 0$ 在某区间 $[a, b]$ 上恒成立, 但 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 时. 此时它的端点值恰好贴着恒成立限制条件的边界, 因此会对原函数的端点处的导数符号有一个限制条件.

以下以 $f(x) > 0$ 在 (a, b) 上恒成立且 $f(a) = 0$ 为例, 来看一下解题步骤

(1) 正常求导, 求出导函数的零点

(2) 进行零点位置的分类讨论:

①当 $f(x)$ 在 (a, b) 上恒单调递增时, 即 $f'(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立时, 由于 $f(a) = 0$, 结论显然成立;

②如果有个 x_0 使得 $f(x)$ 在 (a, x_0) 上单调递减时, 根据单调性, $f(x_0) < f(a) = 0$, 所以**一定不成立**!

这样, 综上①②取值范围就求出来了.

换言之, $f(x_0)$ 是几, 根本不用算!!

只要极值点和端点位置一做比较, 问题就能迎刃而解, 这就是这类问题的优势所在.

例2 (形式上虚设)

10. 已知函数 $f(x) = (ax^2 + x + a)e^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a \geq 0$, 函数 $f(x)$ 的极大值为 $\frac{3}{e}$, 求实数 a 的值.

(2) 若对任意的 $a \leq 0$, $f(x) \leq b \ln(x+1)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 b 的取值范围.

【答案】 (1) $a = 1$.

(2) $b \geq 1$.

【解析】 (1) 由题意, $f'(x) = (2ax + 1)e^{-x} - (ax^2 + x + a)e^{-x}$

$$= -e^{-x}[ax^2 + (1 - 2a)x + a - 1] = -e^{-x}(x - 1)(ax + 1 - a)$$

(I) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = -e^{-x}(x - 1)$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 1$; $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增, $(1, +\infty)$ 单调递减所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = \frac{1}{e} \neq \frac{3}{e}$, 不合题意.

(II) 当 $a > 0$ 时, $1 - \frac{1}{a} < 1$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $1 - \frac{1}{a} < x < 1$; $f'(x) < 0$, 得 $x < 1 - \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$,

所以 $f(x)$ 在 $(1 - \frac{1}{a}, 1)$ 单调递增, $(-\infty, 1 - \frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$ 单调递减,

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = \frac{2a+1}{e} = \frac{3}{e}$, 得 $a = 1$.

综上所述, $a = 1$.

(2) 令 $g(a) = e^{-x}(x^2 + 1)a + xe^{-x}$, $a \in (-\infty, 0]$, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $e^{-x}(x^2 + 1) \geq 0$,

则 $g(a) \leq b \ln(x+1)$ 对 $\forall a \in (-\infty, 0]$ 恒成立等价于 $g(a) \leq g(0) \leq b \ln(x+1)$,

即 $xe^{-x} \leq b \ln(x+1)$, 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立.

(I) 当 $b \leq 0$ 时, $\forall x \in (0, +\infty)$, $b \ln(x+1) < 0$, $xe^{-x} > 0$, 此时 $xe^{-x} > b \ln(x+1)$, 不合题意.

(II) 当 $b > 0$ 时, 令 $h(x) = b \ln(x+1) - xe^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$,

则 $h'(x) = \frac{b}{x+1} - (e^{-x} - xe^{-x}) = \frac{be^x + x^2 - 1}{(x+1)e^x}$, 其中 $(x+1)e^x > 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$,

令 $p(x) = be^x + x^2 - 1$, $x \in [0, +\infty)$, 则 $p(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

① $b \geq 1$ 时, $p(x) \geq p(0) = b - 1 \geq 0$, 所以对 $\forall x \in [0, +\infty)$, $h'(x) \geq 0$, 从而 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以对任意 $x \in [0, +\infty)$, $h(x) \geq h(0) = 0$, 即不等式 $b \ln(x+1) \geq xe^{-x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立.

② $0 < b < 1$ 时, 由 $p(0) = b - 1 < 0$, $p(1) = be > 0$ 及 $p(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以存在唯一的 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $p(x_0) = 0$, 且 $x \in (0, x_0)$ 时, $p(x) < 0$.

从而 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减,

则 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < h(0) = 0$, 即 $b \ln(x+1) < xe^{-x}$, 不符合题意.

综上所述, $b \geq 1$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

练2

11. 已知函数 $f(x) = ax - b(x+1)\ln(x+1) + 1$, 曲线在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $x - y + b = 0$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 若当 $x \geq 0$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq kx^2 + x + 1$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

【答案】 (1) $a = 2, b = 1$.

(2) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = ax - b(x+1)\ln(x+1) + 1$,

导数为 $f'(x) = a - b(\ln(x+1) + 1)$,

曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $x - y + b = 0$,

可得 $a - b = 1, b = 1$, 则 $a = 2$,

即有 $a = 2, b = 1$.

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq kx^2 + x + 1$ 恒成立,

可得 $2x - (x+1)\ln(x+1) + 1 \geq kx^2 + x + 1$ 恒成立,

即有 $kx^2 - x + (x+1)\ln(x+1) \leq 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立,

可设 $g(x) = kx^2 - x + (x+1)\ln(x+1)$,

导数为 $g'(x) = 2kx + \ln(x+1)$,

设 $h(x) = 2kx + \ln(x+1)$, $x \geq 0$,

$$h'(x) = 2k + \frac{1}{x+1},$$

当 $2k \geq 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $x \geq 0$ 递增, 可得 $h(x) \geq h(0) = 0$,

则 $g(x)$ 在 $x \geq 0$ 递增, $g(x) \geq g(0) = 0$, 与题设矛盾;

当 $2k < 0$, $h'(x) = 0$, 可得 $x = -1 - \frac{1}{2k}$,

① 当 $k \leq -\frac{1}{2}$ 时, $-1 - \frac{1}{2k} < 0$, 在 $x \geq 0$ 时, $h'(x) \leq 0$, $h(x)$ 递减, 可得

$$h(x) \leq h(0) = 0,$$

则 $y = g(x)$ 在 $x \geq 0$ 递减, 可得 $g(x) \leq g(0) = 0$ 恒成立;

② 当 $k > -\frac{1}{2}$ 时, $-1 - \frac{1}{2k} > 0$, 在 $x \in \left(0, -1 - \frac{1}{2k}\right)$ 上 $h(x)$ 递增,

在 $x \in \left(-1 - \frac{1}{2k}, +\infty\right)$ 递减, 且 $h(0) = 0$,

所以在 $x \in \left(0, -1 - \frac{1}{2k}\right)$ 上 $h(x) > h(0) = 0$, 故在 $x \in \left(0, -1 - \frac{1}{2k}\right)$ 上 $g(x)$ 递增,

$g(x) \geq g(0) = 0$, 与题设矛盾.

综上可得, k 的范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

【标注】【知识点】二阶导问题; 利用导数解决不等式恒成立问题

3. 多次构造函数求导, 进行端点分析

例3

12. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - 2\ln x + x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 证明: $f(x) \geq (x-2)^3 - 3(x-2)$.

【答案】 (1) $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$,

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{2}{x} + 1,$$

易知 $f'(x) = e^{x-1} - \frac{2}{x} + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f'(1) = 0$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 设 $g(x) = (x-2)^3 - 3(x-2)(x > 0)$, $g'(x) = 3(x-1)(x-3)$,

令 $g'(x) < 0$, 得 $1 < x < 3$, 令 $g'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > 3$,

所以当 $x = 1$ 时 , $g(x)$ 取得极大值 , 且极大值为 2 ,

由 (1) 知 , $f(x)_{\min} = f(1) = 2$, 故当 $0 < x \leq 3$ 时 , $f(x) \geq (x-2)^3 - 3(x-2)$,

设 $h(x) = f(x) - g(x) = e^{x-1} - 2\ln x - (x-2)^3 + 4x - 6(x > 3)$,

$h'(x) = e^{x-1} - \frac{2}{x} - 3(x-2)^2 + 4$, 设 $p(x) = h'(x)$, $p'(x) = e^{x-1} + \frac{2}{x^2} - 6(x-2)$,

设 $q(x) = p'(x)$, $q'(x) = e^{x-1} - \frac{4}{x^2} - 6$, 易知 $q'(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增 ,

则 $q'(x) > q'(3) = e^2 - \frac{4}{27} - 6 > 0$, 则 $q(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增 ,

从而 $p'(x) > p'(3) = e^2 + \frac{2}{9} - 6 > 0$, 则 $h'(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增 ,

则 $h'(x) > h'(3) = e^2 + \frac{1}{3} > 0$, 从而 $h(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增 ,

所以 $h(x) > h(3) = e^2 + 5 - 2\ln 3 > 0$, 故当 $x > 3$ 时 , $f(x) \geq (x-2)^2 - 3(x-2)$,

从而 $f(x) \geq (x-2)^3 - 3(x-2)$ 得证 .

【标注】【知识点】 通过构造函数证明不等式 ; 二阶导问题 ; 利用导数证明不等式恒成立问题 ; 利用导数求函数的单调性、单调区间 ; 利用导数求函数的最值