

02含参函数的极值与最值讨论

一、含参函数极值的分类讨论

1. 已知极值点信息，求参数值

例1

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a^2 - a)\ln x - x \left(a \leq \frac{1}{2}\right)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

【答案】 (1) $4x + 2y - 3 = 0$.

【解析】 (1) 由 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a^2 - a)\ln x - x$,

$$\text{得 } f'(x) = x - \frac{a(a-1)}{x} - 1 .$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值 ,

$$\therefore f'(2) = 0, \text{ 即 } 2 - \frac{a(a-1)}{2} - 1 = 0 ,$$

解得 $a = -1$ 或 $a = 2$ (舍去) ,

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln x - x, f'(x) = x - \frac{2}{x} - 1 ,$$

$$\therefore f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = -2 ,$$

故曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - \frac{1}{2} = -2(x - 1)$,

$$\text{即 } 4x + 2y - 3 = 0 .$$

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题；求函数单调区间（含参二次型导函数）

2. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值，求 a 的值 .

【答案】 -1

【解析】 $\because f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$, $\therefore$ 函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) = \frac{1 - 2ax^2 + (a-2)x}{x} = \frac{-(2x-1)(ax+1)}{x} .$$

$\because f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值，即 $f'(1) = -(2-1)(a+1) = 0$,

$\therefore a = -1$. 当 $a = -1$ 时，在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内 $f'(x) < 0$ ，在 $(1, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$,

$\therefore x = 1$ 是函数 $y = f(x)$ 的极小值点 $\therefore a = -1$.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数值

练1

3. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x + 1$ 在 $x = -2$ 时取得极值.

(1) 求实数 a 的值.

【答案】(1) $a = 4$.

【解析】(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 4$,

因为 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极值,

所以 $f'(-2) = 0$,

解得 $a = 4$,

当 $a = 4$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -2$ 或 $x = -\frac{2}{3}$,

当 $x < -2$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增,

当 $-2 < x < -\frac{2}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-2, -\frac{2}{3})$ 上单调递减,

当 $x > -\frac{2}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $a = 4$ 时, $f(x)$ 在 $x = -2$ 取得极大值.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数值; 直接求函数的最值 (不含参)

4. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】(1) $a = \frac{1}{2e^2}$, 单调递增区间为: $(2, +\infty)$, 单调递减区间为: $(0, 2)$.

【解析】(1) 由题可知: 函数 $f(x)$ 的定义域为: $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = ae^x - \frac{1}{x},$$

$\therefore x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点,

$$\therefore f'(2) = ae^2 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2e^2},$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2e^2} e^x - \frac{1}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 解得: } x > 2,$$

$$\text{令 } f'(x) < 0, \text{ 解得: } 0 < x < 2,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为: } (2, +\infty).$$

$$f(x) \text{ 的单调递减区间为: } (0, 2).$$

【标注】【知识点】直接求函数的单调性（不含参）；通过构造函数证明不等式；二阶导问题

2. 已知极值点信息，求参数取值范围

例2

5. 设函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ ，若 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则实数 a 的取值范围是（ ）.

A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $[1, +\infty)$

D. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【答案】 A

【解析】 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx (x > 0),$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + b = \frac{2ax^2 + bx + 1}{x},$$

$\because x = 1$ 是 $f(x)$ 极大值点，

$$\therefore f'(1) = 0, 2a + b + 1 = 0, b = -2a - 1,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2ax^2 - (2a+1)x + 1}{x} = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x}, x = 1 \text{ 或 } \frac{1}{2a},$$

$$\textcircled{1} a = 0 \text{ 时 } f'(x) = \frac{-x+1}{x} = 0, x = 1.$$

$x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 递增.

$x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 递减.

$\therefore x = 1$ 为极大值点.

$\textcircled{2}$ 当 $a < 0$ 时，

$x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 递增.

$x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 递减.

$\therefore x = 1$ 为极大值点.

$\textcircled{3} a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时，

$x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 递增.

$x \in \left(1, \frac{1}{2a}\right)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 递减.

$x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增.

$\therefore x = 1$ 为极大值点.

④ $a = \frac{1}{2}$ 时

$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 递增.

$\therefore$ 无极值点.

⑤ $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时,

$x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增.

$x \in \left(\frac{1}{2a}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减.

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增.

$\therefore x = 1$ 为极小值点.

$\therefore$ 综上, $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

故选 A.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数范围

练2

6. 已知函数 $f(x) = x(x-m)^2$ 在 $x = -1$ 处有极小值, 则实数 m 的值为 ().

A. 3

B. 1

C. -1

D. -3

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = x(x-m)^2$,

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 4mx + m^2,$$

又 $f(x) = x(x-m)^2$ 在 $x = -1$ 处有极值,

$$\therefore f'(-1) = 3 + 4m + m^2 = 0,$$

解得 $m = -1$ 或 $m = -3$,

又函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处有极小值,

$\therefore m = -3$, 如图所示:

当 $m = -1$ 时, 函数 $f(x) = x(x-m)^2$ 在 $x = -1$ 处有极大值.

故选 D.

【答案】 $(-1, 0)$

【解析】 $\because f(x) = e^x(x^2 + ax + a)$,
 $\therefore f'(x) = e^x(x^2 + ax + a + 2x + a) = e^x(x + 2)(x + a)$,
 $\therefore$ 函数在区间 $(0, 1)$ 上存在极值 ,
 $\therefore -1 < a < 0$.

【标注】 【知识点】 已知极值情况求参数范围

9. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a + 6)x + 1$ 有极大值和极小值 , 则 a 的取值范围为 () .
A. $[-3, 6]$ B. $(-3, 6)$ C. $(-\infty, -3] \cup [6, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a + 6)x + 1$, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + (a + 6)$,
 $\therefore$ 函数有极大值和极小值 , $\therefore$ 方程 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根 ,
即 $3x^2 + 2ax + (a + 6) = 0$ 有两个不相等的实数根 ,
 $\therefore \Delta > 0$, $\therefore (2a)^2 - 4 \times 3 \times (a + 6) > 0$, 解得 : $a < -3$ 或 $a > 6$.
故选 D .

【标注】 【素养】 数学运算

练4

10. 函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 有极值的一个充分不必要条件是 () .
A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $a < -1$ D. $a < 1$

【答案】 C

【解析】 $f'(x) = 3ax^2 + 1$. $f(x)$ 有极值 $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ 有两不等根 $\Leftrightarrow a < 0$.
 $\therefore f(x)$ 有极值的充要条件是 $a < 0$.
通过与选项的对比 , 有 $f(x)$ 有极值的一个充分而不必要条件是 $a < -1$.
故选 C .

【标注】 【知识点】 已知极值情况求参数范围

11. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2ax + (a + 6) \cdot \ln x$ 有极大值和极小值 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-6, -3)$

【解析】 $f'(x) = 3x + 2a + \frac{a+6}{x} \quad (x > 0)$
 $= \frac{3x^2 + 2ax + a + 6}{x},$

令 $g(x) = 3x^2 + 2ax + a + 6,$

则 $g(x) = 0$ 有两个正根,

$$\begin{cases} -\frac{2a}{6} > 0 \\ g(0) = a + 6 > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \text{解得 } -6 < a < -3.$$

故答案为 $(-6, -3)$.

【标注】 【知识点】 已知极值情况求参数范围

例5 (分段函数的导数)

12. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - (3m+1)x + 3, & x \leq 0 \\ mx^2 + x \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 恰有三个极值点, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ B. $(-\frac{1}{2}, 0)$ C. $(-1, -\frac{1}{3})$ D. $(-1, -\frac{1}{2})$

【答案】 A

【解析】 由题意知 $f'(x) = \begin{cases} 2x - (3m+1), & x \leq 0 \\ 2mx + \ln x + 1, & x > 0 \end{cases}$

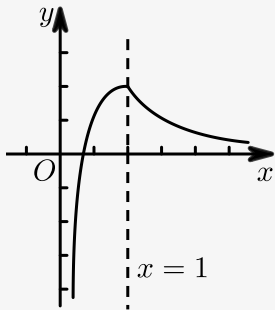
当 $x > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0,$

可化为: $-2m = \frac{\ln x + 1}{x},$

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x},$ 则 $g'(x) = -\frac{\ln x}{x^2},$

则函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减,

$g(x)$ 的图象如图所示:



故 $0 < -2m < 1$ 即 $-\frac{1}{2} < m < 0$ 时,

$f'(x) = 0$ 有 2 个不同的解,

当 $x \leq 0$ 时, 令 $f'(x) = 0, x = \frac{3m+1}{2} < 0,$

解得： $m < -\frac{1}{3}$ ，
 综上， $m \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ，
 故选：A.

【标注】【知识点】已知极值情况求参数范围

例6 (高次型)

13. 已知函数 $f(x) = (m+1)x + \ln x (m \in \mathbf{R})$.

(1) 若函数 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有且只有一个极值点，求 m 的取值范围.

【答案】(1) $-2 < m < \frac{1}{4}$.

【解析】(1) 因为 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - (m+1)x - \ln x$ ，
 所以 $g'(x) = x - \frac{1}{x^2} - (m+1) - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - (m+1)x^2 - x - 1}{x^2}$.
 令 $h(x) = x^3 - (m+1)x^2 - x - 1$ ， $h'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - 1$.
 若函数 $g(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有且只有一个极值点，
 则函数 $h(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内存在零点.
 又 $h'(0) = -1 < 0$ ，
 所以 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点 x_0 .
 且 $x \in (0, x_0)$ 时， $h'(x) < 0$ ，
 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，
 则 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内为减函数，在 $(x_0, +\infty)$ 内为增函数.
 又因为 $h(0) = -1 < 0$ 且 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在零点，
 所以 $\begin{cases} h(1) < 0 \\ h(2) > 0 \end{cases}$
 解得 $-2 < m < \frac{1}{4}$.
 显然 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有唯一零点，记为 x_1 .
 当 $x \in (1, x_1)$ 时， $h(x) < 0$ ， $x \in (x_1, 2)$ 时， $h(x) > 0$ ，
 所以 $h(x)$ 在 x_1 点两侧异号，即 $g'(x)$ 在 x_1 点两侧异号，
 x_1 为函数 $g(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内唯一极值点.
 当 $m \leq -2$ 时， $h(1) = -m - 2 \geq 0$ ，
 又 $h'(1) > 0$ ， $h'(x) > 0$ 在 $(1, 2)$ 内成立，
 所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增，故 $g(x)$ 无极值点.

$$\text{当 } m \geq \frac{1}{4} \text{ 时, } \begin{cases} h(0) < 0 \\ h(2) \leq 0 \end{cases},$$

易得 $x \in (1, 2)$ 时, $h(x) < 0$ 故 $g(x)$ 无极值点.

所以当且仅当 $-2 < m < \frac{1}{4}$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有且只有一个极值点.

【标注】【知识点】求函数单调区间（含参一次型导函数）；二阶导问题；已知极值情况求参数范围

14. 若函数 $f(x) = [x^3 + 3x^2 + (a+6)x + 6 - a]e^{-x}$ 在区间 $(2, 4)$ 上存在极大值点, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, -32)$ B. $(-\infty, -27)$ C. $(-32, -27)$ D. $(-32, -27]$

【答案】 C

【解析】 $f'(x) = -(x-2)\left(\frac{x^3}{x-2} + a\right)e^{-x},$
 令 $h(x) = \frac{x^3}{x-2} + a, h'(x) = \frac{x^2(2x-6)}{(x-2)^2},$

在 $(2, 3)$ 上单调递减, $(3, 4)$ 上单调递增,

函数 $f(x) = [x^3 + 3x^2 + (a+6)x + 6 - a]e^{-x}$ 在区间 $(2, 4)$ 上存在极大值点,

$$\text{则 } h'(4) = 32 + a > 0, h'(3) = 27 + a < 0,$$

$$\therefore -32 < a < -27,$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-32, -27)$.

故选: C.

【标注】【知识点】导数与极值；已知零点或根情况求参数范围

【思想】 函数思想

【素养】 数学运算；逻辑推理

【方法】 构造法

4. 根据参数范围讨论函数极值情况

例7

15. 已知函数 $f(x) = \ln x - x, g(x) = ax^2 + 2x (a < 0)$.

(1) 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的极值点.

【答案】 (1)

$x_2 = -\frac{1 + \sqrt{1-8a}}{4a}$ 为函数 $h(x)$ 的极大值点, 函数 $h(x)$ 无极小值点.

【解析】(1) 依题意, $h(x) = f(x) + g(x) = \ln x + ax^2 + x$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + 1 = \frac{2ax^2 + x + 1}{x},$$

当 $a < 0$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 则 $2ax^2 + x + 1 = 0$.

因为 $\Delta = 1 - 8a > 0$, 所以 $h'(x) = \frac{2ax^2 + x + 1}{x} = \frac{2a(x - x_1)(x - x_2)}{x}$,

$$\text{其中 } x_1 = -\frac{1 - \sqrt{1-8a}}{4a}, \quad x_2 = -\frac{1 + \sqrt{1-8a}}{4a}.$$

因为 $a < 0$, 所以 $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, 所以当 $0 < x < x_2$ 时, $h'(x) > 0$,

当 $x > x_2$ 时, $h'(x) < 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, x_2)$ 上是增函数, 在 $(x_2, +\infty)$ 上是减函数,

故 $x_2 = -\frac{1 + \sqrt{1-8a}}{4a}$ 为函数 $h(x)$ 的极大值点, 函数 $h(x)$ 无极小值点.

【标注】【知识点】求解函数极值; 利用导数求函数的最值

练7

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0)$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

【答案】(1) $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 的极小值为 0; 当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $\frac{1}{3a^2}$

【解析】(1) $f'(x) = 2x - 2ax^2$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{a}$,

$\because a > 0$,

$\therefore f(x)$, $f'(x)$ 随 x 变化情况如下表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单减	极小值 0	单增	极大值 $\frac{1}{3a^2}$	单减

由表得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$

当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 的极小值为 0;

当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $\frac{1}{3a^2}$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式能成立问题

二、含参函数最值的分类讨论

1. 已知最值，求参数值

例1

17. 已知函数 $f(x) = (4x^2 + 4ax + a^2)\sqrt{x}$ ，其中 $a < 0$ ，若 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最小值为 8，求 a 的值。

【答案】 $a = -10$.

【解析】 $f'(x) = \frac{(10x + a)(2x + a)}{2\sqrt{x}}$, $(x \geq 0) a < 0$,

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\frac{a}{10}$ 或 $x = -\frac{a}{2}$.

当 $x \in \left[0, -\frac{a}{10}\right)$ 时, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in \left(-\frac{a}{10}, -\frac{a}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(-\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 时, $f(x)$ 单调递增.

易知 $f(x) = (2x + a)^2\sqrt{x} \geq 0$, 且 $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$.

① 当 $-\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $-2 \leq a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $f(1)$, 由 $f(1) = 4 + 4a + a^2 = 8$, 得 $a = \pm 2\sqrt{2} - 2$, 均不符合题意.

② 当 $1 < -\frac{a}{2} \leq 4$, 即 $-8 \leq a < -2$ 时, $f(x)$ 在 $\left[1, -\frac{a}{2}\right]$ 单调递减, 在 $\left[-\frac{a}{2}, 4\right]$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$, 不符合题意.

③ 当 $-\frac{a}{2} > 4$, 即 $a < -8$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值可能在 $x = 1$ 或 $x = 4$ 处取得, 而 $f(1) \neq 8$, 由 $f(4) = 2(64 + 16a + a^2) = 8$ 得 $a = -10$ 或 $a = -6$ (舍去), 当 $a = -10$ 时 $f(x)$ 在 $(1, 4)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $f(4) = 8$, 符合题意. 综上, $a = -10$.

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导; 利用导数求函数的最值

18. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ (其中 a, b 为常数且 $a \neq 0$) 在 $x = 1$ 处取得极值.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上的最大值为 1, 求 a 的值.

【答案】 (1) $a = \frac{1}{e-2}$ 或 $a = -2$.

【解析】 (1) 因为 $f'(x) = \frac{2ax^2 - (2a+1)x + 1}{x} = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x} (x > 0)$,
令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2a}$,

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 所以 $x_2 = \frac{1}{2a} \neq x_1 = 1$.

(i) 当 $\frac{1}{2a} < 0$, 即 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, e]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最大值为 $f(1)$, 由 $f(1) = 1$, 解得 $a = -2$.

(ii) 当 $a > 0$ 时, $x_2 = \frac{1}{2a} > 0$,

①当 $\frac{1}{2a} < 1$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递增, $(\frac{1}{2a}, 1)$ 上单调递减, $(1, e]$ 上单调递增,

所以最大值1可能在 $x = \frac{1}{2a}$ 或 $x = e$ 处取得.

而 $f(\frac{1}{2a}) = \ln \frac{1}{2a} + a(\frac{1}{2a})^2 - (2a+1)\frac{1}{2a} = \ln \frac{1}{2a} - \frac{1}{4a} - 1 < 0$,

所以 $f(e) = \ln e + ae^2 - (2a+1)e = 1$, 解得 $a = \frac{1}{e-2}$, 满足 $a > \frac{1}{2}$.

②当 $1 < \frac{1}{2a} < e$ 时, 即 $\frac{1}{2e} < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增,

$(1, \frac{1}{2a})$ 上单调递减,

$(\frac{1}{2a}, e]$ 上单调递增.

所以最大值1可能在 $x=1$ 或 $x=e$ 处取得.

而 $f(1) = \ln 1 + a - (2a+1) < 0$,

所以 $f(e) = \ln e + ae^2 - (2a+1)e = 1$, 解得 $a = \frac{1}{e-2} > \frac{1}{2}$, 与 $\frac{1}{2e} < a < \frac{1}{2}$ 矛盾.

③当 $x_2 = \frac{1}{2a} \geq e$ 即 $0 < a \leq \frac{1}{2e}$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, e)$ 上单调递减,

所以最大值1可能在 $x=1$ 处取得, 而 $f(1) = \ln 1 + a - (2a+1) < 0$, 矛盾.

综上所述 $a = \frac{1}{e-2}$ 或 $a = -2$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性(不含参); 已知极值情况求参数值

练1

19. 若函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{x} (m \in \mathbf{R})$ 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值4, 求实数 m .

【答案】 $-3e$.

【解析】 先对函数求导, 有 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2} = \frac{x+m}{x^2} (x > 0)$, 讨论给定区间内的最(极)

值, 可按照函数本身有无极值点、极值点是否在区间内等步骤进行, 故可分如下讨论:

①当 $m \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 故函数在 $[1, e]$ 上单调增, 即最小值为

$$f(1) = -m = 4 \Rightarrow m = -4$$

, 不满足题设要求, 舍去;

②当 $m < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -m$, 且易知 $f(x)$ 在 $(0, -m)$ 上单调减, 在

$(-m, +\infty)$ 上单调增, 即是考虑 $x = -m$ 与区间 $[1, e]$ 的位置关系, 故有:

(1)当 $-m \leq 1 \Rightarrow m \geq -1$ 时, $[1, e] \subseteq (-m, +\infty)$, 故函数在 $[1, e]$ 上单调增, 即最小值为 $f(1) \Rightarrow m = -4$, 不满足;

(2)当 $1 < -m < e \Rightarrow m \in (-e, -1)$ 时, 函数在 $(1, -m)$ 上单调减, 在 $(-m, e)$ 上单调增, 故函数的最小值为 $f(-m) = \ln(-m) + 1 = 4 \Rightarrow m = -e^3$, 而 $-e^3 \notin (-e, -1)$, 故不满足;

(3)当 $-m \geq e \Rightarrow m \leq -e$ 时, $[1, e] \subseteq (0, -m)$, 故函数在区间内单调递减, 即最小值为 $f(e) = 1 - \frac{m}{e}$

$$= 4 \Rightarrow m = -3e, \text{符合题意, 故得.}$$

故答案为: $-3e$.

【标注】【知识点】已知最值情况求参数值或解析式

2. 分类讨论求解函数最值

例2

20. 已知函数 $f(x) = xe^x - a(\frac{1}{2}x^2 + x)$, 求函数在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值.

【答案】当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{e} + \frac{a}{2}$;

当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{2}a\ln^2 a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $f(1) = e - \frac{3}{2}a$.

【解析】 $f'(x) = (x+1)(e^x - a)$.

①当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, 在区间 $[-1, 1]$, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

所以 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{a}{2}$

②当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, 在区间 $[-1, \ln a]$, $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, \ln a]$ 上单调递减,

在区间 $[\ln a, 1]$, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[\ln a, 1]$ 上单调递增,

所以 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(\ln a) = -\frac{1}{2}a\ln^2 a$.

③当 $a \geq e$ 时, 在区间 $[-1, 1]$, $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减,

所以 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(1) = e - \frac{3}{2}a$.

综上所述, 当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{e} + \frac{a}{2}$;

当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $-\frac{1}{2}a \ln^2 a$;

当 $a \geq e$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值是 $f(1) = e - \frac{3}{2}a$.

【标注】【知识点】求函数最值 (含参指对型导函数)

21. 求函数 $\varphi(x) = (x+a)(\frac{8}{a}x^2 + 3x)$, $a \in [3, +\infty)$ 的单调区间, 并求函数在区间 $[-2, -1]$ 上的最小值.

【答案】 答案见解析

【解析】 $\therefore \varphi'(x) = \frac{1}{a}(24x^2 + 22ax + 3a^2) = \frac{1}{a}(4x + 3a)(6x + a)$,

令 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{3}{4}a$, 或 $x = -\frac{1}{6}a$,

$\therefore$ 因为 $a \in [3, +\infty)$, $\therefore$ 所以 $-\frac{3}{4}a < -\frac{1}{6}a$,

$\therefore$ 故当 $x < -\frac{3}{4}a$, 或 $x > -\frac{1}{6}a$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 当 $-\frac{3}{4}a < x < -\frac{1}{6}a$ 时, $\varphi'(x) < 0$

$\therefore$ 函数 $\varphi(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\frac{3}{4}a)$, $(-\frac{1}{6}a, +\infty)$,

单调递减区间是 $(-\frac{3}{4}a, -\frac{1}{6}a)$,

$\therefore a \in [3, +\infty)$, $\therefore -\frac{3}{4}a \leq -\frac{9}{4}$, $-\frac{a}{6} \leq -\frac{1}{2}$,

当 $-\frac{a}{6} \leq -2$, 即 $a \geq 12$ 时, $\therefore \varphi(x)$ 在 $[-2, -1]$ 单调递增,

$\therefore \varphi(x)$ 在该区间的最小值为 $\varphi(-2) = -\frac{64}{a} + 44 - 6a$,

当 $-2 < -\frac{a}{6} < -1$ 时, 即 $6 < a < 12$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[-2, -\frac{a}{6})$ 单调递减, 在 $(-\frac{a}{6}, -1]$ 单调递增,

$\therefore \varphi(x)$ 在该区间的最小值为 $\varphi(-\frac{a}{6}) = -\frac{25}{108}a^2$,

$-\frac{a}{6} \geq -1$ 时, 即 $3 \leq a \leq 6$ 时, $\therefore \varphi(x)$ 在 $[-2, -1]$ 单调递减,

$\therefore \varphi(x)$ 在该区间的最小值为 $\varphi(-1) = -\frac{8}{a} + 11 - 3a$,

综上所述, 当 $3 \leq a \leq 6$ 时, 最小值为 $-\frac{8}{a} + 11 - 3a$;

当 $6 < a < 12$ 时, 最小值为 $-\frac{25}{108}a^2$;

当 $a \geq 12$ 时, 最小值为 $-\frac{64}{a} + 44 - 6a$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值; 利用导数求函数的单调性、单调区间

 练2

22. 设函数 $f(x) = a \ln x - x^2, a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

【答案】 $\frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$

【解析】 $f(x) = a \ln x - x^2$.

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{a}{x} - 2x = \frac{-2x^2 + a}{x} = \frac{-2(x^2 - \frac{a}{2})}{x},$$

(1) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = -2x$. 因为 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无最大值.

(2) 当 $a < 0$ 时, $x^2 - \frac{a}{2} > 0$, 所以 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无最大值.

$$(3) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{-2(x + \sqrt{\frac{a}{2}})(x - \sqrt{\frac{a}{2}})}{x}.$$

$$\text{因为 } f'(x) > 0 \text{ 时, } 0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}, f'(x) < 0 \text{ 时, } x > \sqrt{\frac{a}{2}},$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上单调递增, 在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{所以 } f_{\max}(x) = f(\sqrt{\frac{a}{2}}) = \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} - \frac{a}{2}.$$

【标注】 【知识点】求函数最值 (含参指对型导函数)

23. 已知函数 $f(x) = x \ln x + mx^2$.

(1) 当 $m < 0$ 时, 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.

【答案】 (1) 答案见解析.

【解析】 (1) 因为 $g'(x) = \frac{1}{x} + m = \frac{1+mx}{x}$, $x \in [1, 2]$,

$$\text{令 } \frac{1+mx}{x} = 0, \text{ 则 } x = -\frac{1}{m},$$

$$\text{当 } m \leq -1 \text{ 时, } 0 < -\frac{1}{m} \leq 1,$$

$g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 为减函数,

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1) = m$,

$$\text{当 } -1 < m < -\frac{1}{2} \text{ 时, } 1 < -\frac{1}{m} < 2 \text{ 时,}$$

x	$(1 - \frac{1}{m})$	$-\frac{1}{m}$	$(-\frac{1}{m}, 2)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大	↘

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(-\frac{1}{m}) = -1 - \ln(-m)$,
 当 $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ 时, $-\frac{1}{m} \geq 2$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x)$ 为增函数 .
 所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(2) = 2m + \ln 2$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程；导数的几何意义；利用导数求函数的最值；利用导数解决不等式恒成立问题

例3

24. 已知函数 $f(x) = x - e^{ax} (a > 0)$, 求函数在 $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$ 上的最大值 .

【答案】 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, 最大值为 $\frac{2}{a} - e^2$; $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, 最大值为 $\frac{-\ln a - 1}{a}$; $a > \frac{1}{e}$ 时, 最大值为 $\frac{1}{a} - e$.

【解析】 $f'(x) = 1 - ae^{ax}$, 令 $f'(x) = 0$ 可得 $e^{ax} = \frac{1}{a}$, 则 $x = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$, 则 $x \in (-\infty, \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a})$

时, $f'(x) > 0$

, $f(x)$ 单调递增; $x \in (\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

① $\frac{2}{a} \leq \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$ 即 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$ 单调递增, 最大值为 $f(\frac{2}{a}) = \frac{2}{a} - e^2$;

② $\frac{1}{a} < \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} < \frac{2}{a}$ 即 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a})$ 单调递增, $(\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}, \frac{2}{a})$ 单调递减, 最大值为 $f(\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} \ln a - \frac{1}{a} = \frac{-\ln a - 1}{a}$;

③ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$ 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$ 单调递减, 最大值为 $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a} - e$; 综上所述, $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, 最大值为 $\frac{2}{a} - e^2$; $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, 最大值为 $\frac{-\ln a - 1}{a}$; $a > \frac{1}{e}$ 时, 最大值为 $\frac{1}{a} - e$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值

25. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$, 求函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值 .

【答案】 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $\ln a - a^3 + a^2 - 2a$;

当 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $\frac{a}{4} - 1 - \ln 2$;

当 $1 > a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $2 \ln a - a^5 + a^3 - 2a^2$.

【解析】 $\because 0 < a^2 < a, \therefore 0 < a < 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) = \frac{1-2ax^2+(a-2)x}{x} = -\frac{(2x-1)(ax+1)}{x} (x > 0)$$

$\because x \in (0, +\infty), \therefore ax+1 > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增; 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

① 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 单调递增,

$$\therefore f_{\max}(x) = f(a) = \ln a - a^3 + a^2 - 2a;$$

② 当 $\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a^2 < \frac{1}{2} \end{cases}$, 即 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $\left(a^2, \frac{1}{2}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, a\right)$ 单调递减,

$$\therefore f_{\max}(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{a}{4} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{4} - 1 - \ln 2;$$

③ 当 $\frac{1}{2} \leq a^2$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 单调递减,

$$\therefore f_{\max}(x) = f(a^2) = 2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2.$$

综上所述,

当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $\ln a - a^3 + a^2 - 2a$;

当 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $\frac{a}{4} - 1 - \ln 2$;

当 $1 > a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值

练3

26. 已知函数 $f(x) = x \ln x, g(x) = -x^2 + ax - 3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2] (t > 0)$ 上的最小值.

【答案】(1) 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$, 当 $t \geq \frac{1}{e}$ 时, $f_{\min}(x) = t \ln t$.

【解析】(1) $f(x) = x \ln x$,

$$f'(x) = \ln x + 1, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{e}.$$

① 当 $0 < t < \frac{1}{e}$ 时, 在 $x \in \left[t, \frac{1}{e}\right)$ 上 $f'(x) < 0$; 在 $x \in \left(\frac{1}{e}, t+2\right]$ 上 $f'(x) > 0$

因此, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取得极小值, 也是最小值. $f_{\min}(x) = -\frac{1}{e}$.

② 当 $t \geq \frac{1}{e}$, $f'(x) \geq 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递增,

$$f_{\min}(x) = f(t) = t \ln t.$$

【标注】【知识点】直接求函数的最值（不含参）；求函数零点（含参指对型导函数）；利用导数解决不等式恒成立问题

27. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值.

【答案】 (1) $a = -1$

(2) 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $\ln a - a^3 + a^2 - 2a$;

当 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $\frac{a}{4} - 1 - \ln 2$;

当 $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2$.

【解析】 (1) $\because f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) = \frac{1 - 2ax^2 + (a-2)x}{x} = \frac{-(2x-1)(ax+1)}{x}$$

.

$\because f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值,

$$\text{即 } f'(1) = -(2-1)(a+1) = 0,$$

$$\therefore a = -1.$$

当 $a = -1$ 时, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内 $f'(x) < 0$, 在 $(1, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$,

$\therefore x=1$ 是函数 $y = f(x)$ 的极小值点. $\therefore a = -1$.

(2) $\because a^2 < a, \therefore 0 < a < 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (a-2) = \frac{1 - 2ax^2 + (a-2)x}{x} = -\frac{(2x-1)(ax+1)}{x}$$

$\because x \in (0, +\infty), \therefore ax+1 > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增; 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

① 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 单调递增,

$$\therefore f_{\max}(x) = f(a) = \ln a - a^3 + a^2 - 2a;$$

$$\text{② 当 } \begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a^2 < \frac{1}{2} \end{cases},$$

即 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(a^2, \frac{1}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, a)$ 单调递减,

$$\therefore f_{\max}(x) = f(\frac{1}{2}) = -\ln 2 - \frac{a}{4} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{4} - 1 - \ln 2;$$

③ 当 $\frac{1}{2} \leq a^2$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 单调递减,

$$\therefore f_{\max}(x) = f(a^2) = 2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2.$$

综上所述, 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是

$$\ln a - a^3 + a^2 - 2a;$$

当 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $\frac{a}{4} - 1 - \ln 2$;

当 $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值是 $2\ln a - a^5 + a^3 - 2a^2$.

【标注】【知识点】已知极值情况求函数解析式; 利用导数求函数的最值; 利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用公式和四则运算法则求导

3. 含参函数有最值, 求参数取值范围

例4

28. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值为 -2 , 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \geq 1$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a > 0$ 时, $f'(x) = 2ax - (a+2) + \frac{1}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 即 $f'(x) = \frac{2ax^2 - (a+2)x + 1}{x}$,

$\therefore x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{a}$.

当 $0 < \frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(1) = -2$;

当 $1 < \frac{1}{a} < e$, 即 $\frac{1}{e} < a < 1$ 时,

$f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f\left(\frac{1}{a}\right) < f(1) = -2$, 不合题意;

当 $\frac{1}{a} \geq e$, 即 $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(e) < f(1) = -2$, 不合题意.

综上可得 $a \geq 1$.

【标注】【知识点】已知最值情况求参数范围; 利用导数解决不等式恒成立问题

练4

29. 已知函数 $f(x) = \frac{m^2x}{x^2 - m}$, 且 $m \neq 0$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 有最值 , 写出 m 的取值范围 . (只需写出结论)

【答案】 (1) $m < 0$.

【解析】 (1) $m < 0$.

【标注】 【知识点】 求函数单调区间 (含参二次型导函数) ; 已知最值情况求参数范围

三、含参函数极值、最值证明题

例1

30. 已知函数 $f(x) = e^x \cdot (a + \ln x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$. 当 $a \in (0, \ln 2)$ 时 , 证明 : $g(x)$ 存在极小值点 x_0 , 且 $f(x_0) < 0$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 由 (1) 得 $g(x) = e^x \cdot (a + \frac{1}{x} + \ln x)$, $\therefore$
 $g'(x) = e^x \cdot (a + \frac{1}{x} + \ln x) + e^x \cdot (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = e^x \cdot (a + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x)$. $\because$
 $e^x > 0$, $\therefore g'(x)$ 与 $a + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x$ 同号 .
 设 $h(x) = a + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x$,
 则 $h'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} = \frac{(x-1)^2 + 1}{x^3}$.
 $\therefore$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 有 $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增 .
 $\because a \in (0, \ln 2)$, $\therefore h(1) = a + 1 > 0$, $h(\frac{1}{2}) = a + \ln \frac{1}{2} < 0$,
 故存在 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $h(x_0) = 0$.
 $g(x)$ 与 $g'(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上的情况如下 :

x	$(\frac{1}{2}, x_0)$	x_0	$(x_0, 1)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$\therefore g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, x_0)$ 上单调递减 , 在区间 $(x_0, 1)$ 上单调递增 .

$\therefore$ 若 $a \in (0, \ln 2)$, 存在 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 x_0 是 $g(x)$ 的极小值点 .

$$\begin{aligned} \text{令 } h(x_0) = 0, \text{ 得 } a + \ln x_0 &= \frac{1-2x_0}{x_0^2}, \\ \therefore f(x_0) = e^{x_0} \cdot (a + \ln x_0) &= e^{x_0} \cdot \frac{1-2x_0}{x_0^2} < 0. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】求函数极值（含参指对型导函数）

例2

31. 设函数 $f(x) = x^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 0$;
- (3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【答案】(1) 递减区间为 $(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3})$, 递增区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty)$.

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

【解析】(1) 由 $f(x) = x^3 - ax - b$, 可得 $f'(x) = 3x^2 - a$, 下面分两种情况讨论:

① 当 $a \leq 0$ 时, 有 $f'(x) = 3x^2 - a \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, +\infty)$.

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x = -\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 、 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3})$	$\frac{\sqrt{3a}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3})$, 单调递增区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty)$.

(2) 因为 $f(x)$ 存在极值点, 所以由 (1) 知 $a > 0$ 且 $x_0 \neq 0$.

由题意得 $f'(x_0) = 3x_0^2 - a = 0$, 即 $x_0^2 = \frac{a}{3}$,

进而 $f(x_0) = x_0^3 - ax_0 - b = -\frac{2a}{3}x_0 - b$,

又 $f(-2x_0) = -8x_0^3 + 2ax_0 - b = -\frac{8a}{3}x_0 + 2ax_0 - b = -\frac{2a}{3}x_0 - b = f(x_0)$, 且 $-2x_0 \neq x_0$,

由题意及 (1) 知, 存在唯一实数 x_1 满足 $f(x_1) = f(x_0)$, 且 $x_1 \neq x_0$, 因此 $x_1 = -2x_0$, 所以 $x_1 + 2x_0 = 0$.

(3) 设 $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 M , $\max\{x, y\}$ 表示 x, y 两数的最大值,

下面分三种情况讨论:

① 当 $a \geq 3$ 时, $-\frac{\sqrt{3a}}{3} \leq -1 \leq 1 \leq \frac{\sqrt{3a}}{3}$, 由 (I) 知 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的值域为 $[f(1), f(-1)]$,

$$\begin{aligned} \text{因此, } M &= \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} = \max\{|1-a-b|, |-1+a-b|\} \\ &= \max\{|a-1+b|, |a-1-b|\} = \begin{cases} a-1+b, & b \geq 0 \\ a-1-b, & b < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $M = a-1+|b| \geq 2$;

② 当 $\frac{3}{4} \leq a < 3$ 时, $-\frac{2\sqrt{3a}}{3} \leq -1 < -\frac{\sqrt{3a}}{3} < \frac{\sqrt{3a}}{3} < 1 \leq \frac{2\sqrt{3a}}{3}$,

由 (I) 和 (II) 知,

$$f(-1) \geq f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3a}}{3}), f(1) \leq f(\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3a}}{3}),$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围为 $[f(\frac{\sqrt{3a}}{3}), f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})]$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } M &= \max\{|f(\frac{\sqrt{3a}}{3})|, |f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})|\} = \max\{|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|, |\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+b|\} \\ &= \max\{|\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+b|, |\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b|\} = \frac{2a}{9}\sqrt{3a}+|b| \geq \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{3 \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

③ 当 $0 < a < \frac{3}{4}$ 时, $-1 < -\frac{2\sqrt{3a}}{3} < \frac{2\sqrt{3a}}{3} < 1$,

由 (I) 和 (II) 知,

$$f(-1) < f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3a}}{3}), f(1) > f(\frac{2\sqrt{3a}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3a}}{3}),$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的取值范围为 $[f(1), f(-1)]$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } M &= \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} = \max\{|1-a-b|, |-1+a-b|\} \\ &= \max\{|1-a-b|, |1-a+b|\} = 1-a+|b| > \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

综上所述, 当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数); 求函数最值 (含参二次型导函数)