

02含参函数的极值与最值讨论

一、含参函数极值的分类讨论

1. 已知极值点信息，求参数值

例1

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a^2 - a)\ln x - x \left(a \leq \frac{1}{2}\right)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

2. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a - 2)x$ ， $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值，求 a 的值 .

练1

3. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x + 1$ 在 $x = -2$ 时取得极值 .

(1) 求实数 a 的值 .

4. 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a ，并求 $f(x)$ 的单调区间 .

2. 已知极值点信息，求参数取值范围

例2

5. 设函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ ，若 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $[1, +\infty)$ D. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

练2

6. 已知函数 $f(x) = x(x - m)^2$ 在 $x = -1$ 处有极小值，则实数 m 的值为 () .

- A. 3 B. 1 C. -1 D. -3

3. 已知极值存在，求参数取值范围

例3 (一次型)

7. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，若函数 $y = x + a \ln x$ 在区间 $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ 有极值点，则 a 取值范围为 () .

A. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$
 C. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$

B. $\left(-e, -\frac{1}{e}\right)$
 D. $(-\infty, -e) \cup \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

例4 (二次型)

8. 函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + a)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在极值, 则 a 的取值范围是 _____ .
9. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 1$ 有极大值和极小值, 则 a 的取值范围为 () .
- A. $[-3, 6]$ B. $(-3, 6)$ C. $(-\infty, -3] \cup [6, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$

练4

10. 函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 有极值的一个充分不必要条件是 () .
- A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $a < -1$ D. $a < 1$
11. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2ax + (a+6) \cdot \ln x$ 有极大值和极小值, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

例5 (分段函数的导数)

12. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - (3m+1)x + 3, & x \leq 0 \\ mx^2 + x \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 恰有三个极值点, 则 m 的取值范围是 () .
- A. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

例6 (高次型)

13. 已知函数 $f(x) = (m+1)x + \ln x (m \in \mathbf{R})$.
- (1) 若函数 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有且只有一个极值点, 求 m 的取值范围 .
14. 若函数 $f(x) = [x^3 + 3x^2 + (a+6)x + 6 - a]e^{-x}$ 在区间 $(2, 4)$ 上存在极大值点, 则实数 a 的取值范围是 () .
- A. $(-\infty, -32)$ B. $(-\infty, -27)$ C. $(-32, -27)$ D. $(-32, -27]$

4. 根据参数范围讨论函数极值情况

例7

15. 已知函数 $f(x) = \ln x - x$, $g(x) = ax^2 + 2x (a < 0)$.
- (1) 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的极值点 .

练7

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3 (a > 0)$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

二、含参函数最值的分类讨论

1. 已知最值, 求参数值

例1

17. 已知函数 $f(x) = (4x^2 + 4ax + a^2)\sqrt{x}$, 其中 $a < 0$, 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最小值为 8, 求 a 的值.

18. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx$ (其中 a, b 为常数且 $a \neq 0$) 在 $x = 1$ 处取得极值.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上的最大值为 1, 求 a 的值.

练1

19. 若函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{x}$ ($m \in \mathbf{R}$) 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值 4, 求实数 m .

2. 分类讨论求解函数最值

例2

20. 已知函数 $f(x) = xe^x - a(\frac{1}{2}x^2 + x)$, 求函数在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值.

21. 求函数 $\varphi(x) = (x+a)(\frac{8}{a}x^2 + 3x)$, $a \in [3, +\infty)$ 的单调区间, 并求函数在区间 $[-2, -1]$ 上的最小值.

练2

22. 设函数 $f(x) = a \ln x - x^2$, $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

23. 已知函数 $f(x) = x \ln x + mx^2$.

(1) 当 $m < 0$ 时, 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.

例3

24. 已知函数 $f(x) = x - e^{ax}$ ($a > 0$), 求函数在 $[\frac{1}{a}, \frac{2}{a}]$ 上的最大值.

25. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$, 求函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值.

练3

26. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ ($t > 0$) 上的最小值.

27. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-2)x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上的最大值.

3. 含参函数有最值, 求参数取值范围

例4

28. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+2)x + \ln x$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值为 -2 , 求 a 的取值范围.

练4

29. 已知函数 $f(x) = \frac{m^2 x}{x^2 - m}$, 且 $m \neq 0$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 有最值, 写出 m 的取值范围. (只需写出结论)

三、含参函数极值、最值证明题

例1

30. 已知函数 $f(x) = e^x \cdot (a + \ln x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$. 当 $a \in (0, \ln 2)$ 时, 证明: $g(x)$ 存在极小值点 x_0 , 且 $f(x_0) < 0$.

例2

31. 设函数 $f(x) = x^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 0$;

(3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.