

01恒成立问题与能成立问题

考点分析

高频考点

- ①恒、能成立问题的转化
- ②(转化后)函数的极最值的求法
- ③参变分离的方法运用
- ④分类讨论思想

考试难点

- ①原命题的化归与转化
- ②含参问题的分类讨论

易错点

- ①定义域限制的自变量范围需注意,特别是给定范围上的恒/能成立问题
- ②如需分类讨论时,讨论需要不重不漏

一、单变量的恒成立与能成立问题

1. 恒成立问题、能成立问题与函数最值的关系

先说一下,单变量的恒能成立问题,一定要先把它变成咱们熟悉的极最值问题再说~
那么怎么变呢?请看下面

- (1) $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > k$
- (2) $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} > 0$
- (3) $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < k$
- (4) $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} < 0$
- (5) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > k$ 能够成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > k$
- (6) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) > g(x_0)$ 能够成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} > 0$
- (7) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < k$ 能够成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} < k$
- (8) $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < g(x_0)$ 能够成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} < 0$

把这些恒能成立的话翻译成最值，接下来就求导列表找最值就OK了

2. 恒成立、能成立证明题（不含参）

例1

1. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) 求证：当 $x > 0$ 时， $\frac{e^x + (2 - e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$.

【答案】 (1) $y = (e - 2)x + 1$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $f'(x) = e^x - 2x$, 由题设得 $f'(1) = e - 2$, $f(1) = e - 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = (e - 2)x + 1$.

(2) $f'(x) = e^x - 2x$, $f''(x) = e^x - 2$,

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x) \geq f'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = e - 1$, $x \in [0, 1]$. $f(x)$ 过点 $(1, e - 1)$, 且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = (e - 2)x + 1$,

故可猜测：当 $x > 0$, $x \neq 1$ 时， $f(x)$ 的图象恒在切线 $y = (e - 2)x + 1$ 的上方 .

易证：当 $x > 0$ 时， $f(x) \geq (e - 2)x + 1$,

设 $g(x) = f(x) - (e - 2)x - 1$, $x > 0$, 则 $g'(x) = e^x - 2x - (e - 2)$,

$g''(x) = e^x - 2$, $g'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增，又

$g'(0) = 3 - e > 0$, $g'(1) = 0$, $0 < \ln 2 < 1$, $\therefore g'(\ln 2) < 0$,

所以，存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

所以，当 $x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, 1)$ 时， $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0) = g(1) = 0$,

$\therefore g(x) = e^x - x^2 - (e - 2)x - 1 \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号，故

$\frac{e^x + (2 - e)x - 1}{x} \geq x$, $x > 0$.

又 $x \geq \ln x + 1$, 即 $\frac{e^x + (2 - e)x - 1}{x} \geq \ln x + 1$, 当 $x = 1$ 时，等号成立 .

【标注】【知识点】导数的实际应用；导数与单调性

练1

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} (x > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 求证: $f(x) > e^{-\frac{x}{2}} (x > 0)$.

【答案】 (1) 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 已知函数 $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} (x > 0)$,

$$\text{导函数为 } f'(x) = \frac{1 + x - e^{-x}}{x^2 e^x} ,$$

$$\text{令 } h(x) = e^x - x - 1, h'(x) = e^x - 1 ,$$

当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)_{\min} = h(0) = 0$, 即 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立 .

由已知 $x > 0$, 得 $e^x > x + 1$, $f'(x) < 0$,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

(2) $f(x) > e^{-\frac{x}{2}} (x > 0)$,

$$\text{等价于 } e^{-x} + x e^{-\frac{x}{2}} - 1 < 0 (x > 0) ,$$

$$\text{令 } g(x) = e^{-x} + x e^{-\frac{x}{2}} - 1, x > 0 ,$$

$$g'(x) = -e^{-\frac{x}{2}} \left(e^{-\frac{x}{2}} - \left(-\frac{x}{2} + 1 \right) \right) ,$$

由(1), 易得 $e^{-\frac{x}{2}} > -\frac{x}{2} + 1$, 所以, $g'(x) < 0$,

所以, 当 $x > 0$ 时, 有 $g(x) < g(0) = 0$,

$$\text{即 } e^{-x} + x e^{-\frac{x}{2}} - 1 < 0 (x > 0) ,$$

$$\text{故 } f(x) > e^{-\frac{x}{2}} (x > 0) .$$

【标注】【知识点】利用导数求单调性证不等式

二、单变量的恒成立与能成立 (分离参数)

1. 简单分离参数型

当一个函数中的参数在函数中以**加减法**的形式孤立存在时, 可以直接把它移到不等号一侧 .

这样就完成了参变分离的过程, 而此时另一侧留下的是一个不含参的函数 .

不用分类讨论, 多开心啊 .

PS：其实这种问题，因为形式比较简单，无论是否做了参变分离，结果是一样的。

例1

3. 已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - mx$ ($m \in \mathbf{R}$) .

若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减，求 m 的取值范围 .

【答案】 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

【解析】 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减，

则 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 .

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - m \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 .

即 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \leq m$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 .

设 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$) ,

则 $m \geq [g(x)]_{\max}$.

因为 $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1$ ($x > 0$) ,

所以当 $x = 1$ 时， $g(x)$ 有最大值 1 .

所以 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

【标注】 【题型】利用导数求单调性证不等式；已知单调性求参数的取值范围

【知识点】导数与单调性；导数与最值

【方法点睛】

原函数 $f(x)$ 恒单调递增 $\Rightarrow$ 导函数 $f'(x) \geq 0$ 恒成立；

原函数 $f(x)$ 恒单调递减 $\Rightarrow$ 导函数 $f'(x) \leq 0$ 恒成立；

然后再转化成恒成立问题去解决即可；

2. 整理分离型

①如果一个函数中的参数和函数中的变量乘/除在一起，但很容易能够分离开来；

②且在分离时，要乘/除的部分的符号是确定无需讨论的；

③而且，乘/除过去的部分不太复杂；

那么仍然可以完成参变分离的过程，一侧留下参数，一侧留下不含参的函数 .

又不用分类讨论了，还是很开心嘛 .

例2

4. 已知函数 $f(x) = 1 + \ln x - a \cdot e^x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与 x 轴平行, 求实数 a 的值.

(2) 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $a = \frac{1}{e}$.
(2) $a \geq \frac{1}{e}$.

【解析】(1) $\because f(x) = 1 + \ln x - ae^x$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - ae^x, x \in (0, +\infty).$$

由于曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与 x 轴平行,

$$\text{所以 } f'(1) = 1 - ae = 0.$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{e}.$$

(2) 由条件知对任意 $x \in (0, +\infty)$,

不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立,

此命题等价于 $a \geq \frac{1 + \ln x}{e^x}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

$$\text{令 } h(x) = \frac{1 + \ln x}{e^x}, x \in (0, +\infty),$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x} = \frac{1}{e^x} \left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x \right), x \in (0, +\infty),$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x, x \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \text{ 且 } g'(x) < 0,$$

$\therefore$ 函数 $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递减,

注意到 $g(1) = 0$, 即 $x = 1$ 是 $g(x)$ 的零点,

而当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - x \ln x > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$.

又 $e^x > 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时,

$h'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$.

则当 x 变化时, $h'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$	极大值 $\frac{1}{e}$	$\searrow$

因此, 函数 $h(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 取得最大值 $h(1) = \frac{1}{e}$,

所以实数 $a \geq \frac{1}{e}$.

【标注】【知识点】二阶导问题；利用导数解决不等式恒成立问题

练2

5. 已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 若对于任意 $x \in [\frac{1}{e}, e]$, 都有 $f(x) \leq ax - 1$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $a \geq e - 1$.

【解析】(1) 当 $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ 时, “ $f(x) \leq ax - 1$ ” 等价于 “ $a \geq \ln x + \frac{1}{x}$ ”.

$$\text{令 } g(x) = \ln x + \frac{1}{x}, x \in [\frac{1}{e}, e],$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, x \in [\frac{1}{e}, e].$$

当 $x \in (\frac{1}{e}, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$ 单调递减.

当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $(1, e)$ 单调递增.

$$\text{而 } g(\frac{1}{e}) = \ln e + e = e - 1 > 1.5,$$

$$g(e) = \ln e + \frac{1}{e} = 1 + \frac{1}{e} < 1.5.$$

所以 $g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最大值为 $g(\frac{1}{e}) = e - 1$.

所以当 $a \geq e - 1$ 时, 对于任意 $x \in [\frac{1}{e}, e]$, 都有 $f(x) \leq ax - 1$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

例3 (隐零点)

6. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - ax$.

若 $1 < a < 2$, 求证: $f(x) < -1$.

【答案】证明见解析.

【解析】(这里只给出一种参变分离的方法, 常规做法可查看2018朝阳一模详解)

$\frac{\ln x - 1}{x} - ax < -1$ 恒成立, 即 $ax > \frac{\ln x - 1}{x} + 1$, $a > \frac{\ln x - 1}{x^2} + \frac{1}{x}$ 恒成立即可.

设 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} + \frac{1}{x}$, 那么只要 $a > g(x)$ 恒成立, 即 $a > g(x)_{\max}$ 成立.

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(\ln x - 1)}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \frac{3 - 2\ln x - x}{x^3}.$$

令 $h(x) = 3 - 2\ln x - x$, 则 $h'(x) = -\frac{2}{x} - 1 < 0$ 恒成立. 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒单调递减.

又因为 $h(1) = 3 - 2\ln 1 - 1 = 2 > 0$, $h(e) = 3 - 2\ln e - e = 1 - e < 0$,

所以在区间 $(1, e)$ 上 $h(x)$ 存在一个唯一零点 x_0 .

于是 $3 - 2\ln x_0 - x_0 = 0$, 即 $\ln x_0 = \frac{3 - x_0}{2}$

对 $g(x)$ 列表如下:

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x)_{\max} = g(x_0) = \frac{\ln x_0 - 1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0} = \frac{1 - x_0}{2x_0^2} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_0}$.

因为 $x_0 > 1$, 所以 $g(x_0) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

又因为 $a > 1$, 所以 $a > 1 > g(x)_{\max}$ 成立.

【标注】【知识点】导数与单调性；导数与极值

3. 变形题：构造新函数

例4

7. 已知函数 $f(x) = (a + 1)\ln x + ax^2 + 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 设 $a < -1$. 如果对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 4|x_1 - x_2|$, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

当 $a \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

当 $-1 < 0 < a$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{-\frac{a+1}{2a}}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}, +\infty\right)$ 单调递减.

(2) $(-\infty, -2]$.

【解析】 (1) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a+1}{x} + 2ax = \frac{2ax^2 + a + 1}{x}$.

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

当 $a \leq -1$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

当 $-1 < 0 < a$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt{-\frac{a+1}{2a}}$.

则当 $x \in \left(0, \sqrt{-\frac{a+1}{2a}}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in \left(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{-\frac{a+1}{2a}}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}, +\infty\right)$ 单调递减.

(2) 不妨假设 $x_1 \geq x_2$, 而 $a < -1$, 由 (1) 知在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

从而 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), |f(x_1) - f(x_2)| \geq 4|x_1 - x_2|$,

等价于 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), f(x_2) + 4x_2 \geq f(x_1) + 4x_1$ ①

令 $g(x) = f(x) + 4x$, 则 $g'(x) = \frac{a+1}{x} + 2ax + 4$,

① 等价于 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 即 $\frac{a+1}{x} + 2ax + 4 \leq 0$.

从而, $a \leq \frac{-4x-1}{2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2-2}{2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2}{2x^2+1} - 2$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty, -2]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

三、单变量的恒成立与能成立（不分参）

在恒能成立问题中, 当一个函数中的某个参数

不能够被通过各种手段, 移到等号或不等号的一侧;

或移动过程中涉及分类讨论或出现 0/0 型的端点问题

或移动的部分很复杂

那么就可以不考虑参变分离了, 正常分类讨论也是可以解决问题的.

其中, 端点问题的处理手段比较特殊, 我们会在下面再详加总结!

1. 函数单调性可确定

例1

8. 已知函数 $f(x) = ax \ln x$, 当 $a < 0$ 时, 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) < 3ax + 1$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】见解析.

【解析】解法一:

当 $a < 0$ 时, 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) < 3ax + 1$ 成立,

即 $ax \ln x < 3ax + 1$. 所以 $ax \ln x - 3ax - 1 < 0$.

设 $g(x) = ax \ln x - 3ax - 1$ 因为 $g'(x) = a \ln x + a - 3a = a(\ln x - 2)$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = e^2$. 因为 $a < 0$,

所以随着 x 变化时, $g(x)$ 和 $g'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(0, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

即函数 $g(x)$ 在 $(0, e^2)$ 上单调递增, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $g_{\max}(x) = g(e^2) = ae^2 \ln e^2 - 3ae^2 - 1 = -ae^2 - 1$.

所以 $-ae^2 - 1 < 0$. 所以 $a > -\frac{1}{e^2}$. 所以 a 的取值范围为 $(-\frac{1}{e^2}, 0)$.

解法二:

当 $a < 0$ 时, 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) < 3ax + 1$ 成立,

即 $ax \ln x < 3ax + 1$. 所以 $a(x \ln x - 3x) < 1$. 即 $\frac{1}{a} < x \ln x - 3x$.

设 $g(x) = x \ln x - 3x$. 因为 $g'(x) = \ln x - 2$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = e^2$.

所以随着 x 变化时, $g(x)$ 和 $g'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(0, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

即函数 $g(x)$ 在 $(0, e^2)$ 上单调递减, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $g_{\min}(x) = g(e^2) = e^2 \ln e^2 - 3e^2 = -e^2$. 所以 $\frac{1}{a} < -e^2$.

所以 $a > -\frac{1}{e^2}$. 所以 a 的取值范围为 $(-\frac{1}{e^2}, 0)$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

练1

9. 设函数 $f(x) = (x - a) \cdot e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求证: 对于 $\forall x \in [-5, +\infty)$, $f(x) + x + 5 \geq -\frac{6}{e^5}$ 恒成立.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】(1) 令 $h(x) = f(x) + x$,

$$\text{所以 } h'(x) = xe^x + 1,$$

$$\text{所以 } h''(x) = (x+1)e^x.$$

$$\text{令 } h''(x) = (x+1)e^x = 0,$$

$$\text{解得 } x = -1,$$

所以当 $x \in [-5, -1)$ 时, $h''(x) < 0$, $h'(x)$ 单调递减;

当 $x \in [-1, +\infty)$ 时, $h''(x) > 0$, $h'(x)$ 单调递增;

$$\text{所以当 } x = -1 \text{ 时, } h'(x)_{\min} = h'(-1) = 1 - \frac{1}{e} > 0.$$

所以函数 $h(x)$ 在 $[-5, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } h(x) \geq h(-5) = -\frac{6}{e^5} - 5.$$

$$\text{所以 } \forall x \in [-5, +\infty), f(x) + x + 5 \geq -\frac{6}{e^5} \text{ 恒成立.}$$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 二阶导问题; 求函数最值 (含参一次型导函数)

2. 端点值特殊型

端点问题

定义: 当 $f(x) > (<) 0$ 在某区间 (a, b) 上恒/能成立, 或者 $f(x) \geq (\leq) 0$ 在某区间 $[a, b]$ 上恒成立, 但 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 时.

此时它的端点值恰好贴着恒成立限制条件的边界, 因此会对原函数的端点处的导数符号有一个限制条件.

做法: 以下以 $f(x) > 0$ 在 (a, b) 上恒成立且 $f(a) = 0$ 为例, 来看一下解题步骤

(1) 正常求导, 求出导函数的零点

(2) 进行零点位置的分类讨论:

① 当 $f(x)$ 在 (a, b) 上恒单调递增时, 即 $f'(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立时, 由于 $f(a) = 0$, 结论显然成立;

② 如果有个 x_0 使得 $f(x)$ 在 (a, x_0) 上单调递减时, 象征性的列个表~

然后, 根据单调性, $f(x_0) < f(a) = 0$, 所以一定不成立!

这样, 综上①②取值范围就求出来了.

换言之, $f(x_0)$ 是几, 根本不用算!!

只要极值点和端点位置一做比较, 问题就能迎刃而解, 这就是这类问题的优势所在.

例2

10. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 4(a-1)\ln(x+1)$, 其中实数 $a < 3$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \leq 2$.

【解析】 (1) 方法一: 法1: 易知 $f(0) = 0$, 由 (1) 可知,

当 $a \leq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减,

所以有 $f(x) \leq 0$ 恒成立;

当 $1 < a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a-2]$ 上单调递增,

所以 $f(a-2) > f(0) = 0$, 所以不等式不能恒成立;

所以 $a \leq 2$ 时, 有 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上恒成立.

法2:

易知 $f(0) = 0$,

因为 $f'(x) = \frac{[2(x-1)[x-(a-2)]}{x+1}$

又因为 $a < 3$, 所以 $a-2 < 1$,

所以当 $a \leq 2$ 时, 在区间 $[0, 1]$ 上 $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 单调递减,

所以有 $f(x) \leq 0$ 恒成立;

当 $2 < a < 3$ 时, 在区间 $[0, a-2]$ 上 $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(a-2) > f(0) = 0$, 所以不等式不能恒成立;

所以 $a \leq 2$ 时, 有 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上恒成立.

方法二: 由函数 $f(x) \leq 0$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 等价于求满足 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值小

于等于0的所有 a 的值.

当 $a \leq 2$ 时, $a-2 \leq 0$, 由(1)可得 $\forall x \in (0, 1) f'(x) < 0$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore f(x) \leq f(0) = 0$, 满足题意;

当 $2 < a < 3$ 时, 当 $x \in (0, a-2)$ 时有 $f'(x) > 0$; $x \in (a-2, 1)$ 时, 有 $f'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, a-2)$ 上单调递增, 在 $(a-2, 1)$ 上单调递减,

$\therefore f(a-2)$ 是 $f(x)$ 的最大值, 又 $\because f(a-2) > f(0) = 0$,

不满足 $f(x)$ 的最大值小于等于0, 舍

综上 $a \leq 2$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 求函数极值 (含参二次型导函数)

练2

11. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

(1) 设实数 k 使得 $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

【答案】(1) k 最大值为 2.

【解析】(1) $\ln \frac{1+x}{1-x} > k(x + \frac{x^3}{3}), x \in (0, 1)$

设 $t(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - k(x + \frac{x^3}{3}) > 0, x \in (0, 1)$

$t'(x) = \frac{2}{1-x^2} - k(1+x^2) = \frac{kx^4 + 2 - k}{1-x^2}, x \in (0, 1)$

$k \in [0, 2], t'(x) \geq 0$, 函数 $t(x)$ 是单调递增, $t'(x) > t(0)$ 显然成立

当 $k > 2$ 时, 令 $t'(x) = 0$, 得 $x_0^4 = \frac{k-2}{k} \in (0, 1)$

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, 1)$
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	↓	极值	↑

$t(x_0) < t(0) = 0$, 显然不成立, 由此可知 k 最大值为 2.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

12. 已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(1) 求证: $f(x) \leq 0$;

(2) 若 $a < \frac{\sin x}{x} < b$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 求 a 的最大值与 b 的最小值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $a_{\max} = \frac{2}{\pi}, b_{\min} = 1$.

【解析】(1) 证明: $f'(x) = \cos x + x(-\sin x) - \cos x = -x \sin x$,

$\because x \in [0, \frac{\pi}{2}], \therefore f'(x) \leq 0$,

即 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(0) = 0$,

所以 $f(x) \leq 0$.

(2) 令 $g(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

则 $g'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}$, 由 (1) 可知, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 从而 $g(x) > g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$,

故 $a \leq \frac{2}{\pi}$, 所以 $a_{\max} = \frac{2}{\pi}$.

令 $h(x) = \sin x - bx$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $h'(x) = \cos x - b$,

当 $b \geq 1$ 时, $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 从而

$h(x) < h(0) = 0$,

所以 $h(x) = \sin x - bx < 0$ 恒成立.

当 $b < 1$ 时, $h'(x) = \cos x - b = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 有唯一解 x_0 , 且 $x \in (0, x_0)$,

$h'(x) > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 从而 $h(x) > h(0) = 0$,

即 $\sin x - bx > 0 \Rightarrow \sin x > bx \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > b$ 与 $\frac{\sin x}{x} < b$ 恒成立矛盾,

综上, $b \geq 1$, 故 $b_{\min} = 1$.

【标注】【知识点】利用导数求单调性证不等式; 直接求函数的最值(不含参)

3. 含参的分类讨论

例3 (恒成立)

13. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a \geq 1$ 时, 若 $f(x) > 1$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, \frac{1}{a})$.

当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 1)$.

(2) $a > 2$.

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$,

$$f'(x) = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x^2} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}.$$

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $ax - 1 < 0$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 1$, 函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$ 或 $x > \frac{1}{a}$, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < \frac{1}{a}$, 函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(1, \frac{1}{a})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, \frac{1}{a})$.

(3) 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(4) 当 $a > 1$ 时, $0 < \frac{1}{a} < 1$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$,

$(1, +\infty)$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $\frac{1}{a} < x < 1$, 则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 1)$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 1)$.

(2) 依题意, 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上 $f(x)_{\min} > 1$.

$$f'(x) = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x^2} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}, \quad a \geq 1.$$

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{a}$.

若 $a \geq e$, 则由 $f'(x) > 0$ 得, $1 < x \leq e$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增.

由 $f'(x) < 0$ 得, $\frac{1}{e} \leq x < 1$, 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 上单调递减.

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = a - 1 > 1$, 满足条件;

若 $1 < a < e$, 则由 $f'(x) > 0$ 得, $\frac{1}{e} < x < \frac{1}{a}$ 或 $1 < x < e$;

由 $f'(x) < 0$ 得, $\frac{1}{a} < x < 1$.

函数 $f(x)$ 在 $(1, e)$, $(\frac{1}{e}, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减.

$$f(x)_{\min} = \min\{f(\frac{1}{e}), f(1)\},$$

依题意 $\begin{cases} f(\frac{1}{e}) > 1 \\ f(1) > 1 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a > \frac{e^2}{e+1} \\ a > 2 \end{cases}$, 所以 $2 < a < e$;

若 $a = 1$, 则 $f'(x) \geq 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{e}) > 1$, 不满足条件;

综上, $a > 2$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 求函数单调区间 (含参二次型导函数)

练3

14. 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, 其中 a 为常数, 且 $a \leq -1$, 若 $f(x) \leq e-1$ 对任意 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 $(-\infty, \frac{-e^2 + e - 1}{2}]$.

【解析】 由 $f'(x) = 1 + \frac{a}{x}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $1 + \frac{a}{x} = 0$, 即 $x = -a$,

当 $x \in (0, -a)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减;

当 $x \in (-a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增;

若 $1 \leq -a \leq e$, 即 $-e \leq a \leq -1$, 易得函数 $f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上为增函数,

此时 $f(x)_{\max} = f(e^2)$, 要使 $f(x) \leq e-1$ 对 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 只需 $f(e^2) \leq e-1$ 即可,

所以有 $e^2 + 2a \leq e-1$, 即 $a \leq \frac{-e^2 + e - 1}{2}$

而 $\frac{-e^2 + e - 1}{2} - (-e) = \frac{-(e^2 - 3e + 1)}{2} < 0$, 即 $\frac{-e^2 + e - 1}{2} < -e$, 所以此时无解.

若 $e < -a < e^2$, 即 $-e > a > -e^2$, 易知函数 $f(x)$ 在 $[e, -a]$ 上为减函数, 在 $[-a, e^2]$ 上为增函数,

要使 $f(x) \leq e-1$ 对 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 只需 $\begin{cases} f(e) \leq e-1 \\ f(e^2) \leq e-1 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \leq -1 \\ a \leq \frac{-e^2 + e - 1}{2} \end{cases}$,

由 $\frac{-e^2 + e - 1}{2} - (-1) = \frac{-e^2 + e + 1}{2} < 0$ 和 $\frac{-e^2 + e - 1}{2} - (-e^2) = \frac{e^2 + e - 1}{2} > 0$

得 $-e^2 < a \leq \frac{-e^2 + e - 1}{2}$

若 $-a \geq e^2$, 即 $a \leq -e^2$, 易得函数 $f(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上为减函数,

此时, $f(x)_{\max} = f(e)$, 要使 $f(x) \leq e-1$ 对 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 只需 $f(e) \leq e-1$ 即可,

所以有 $e + a \leq e-1$, 即 $a \leq -1$, 又因为 $a \leq -e^2$, 所以 $a \leq -e^2$.

综合上述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{-e^2 + e - 1}{2}]$.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题; 导数与最值

例4 (能成立)

15. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + a)$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq e^a$ 在 $[a, +\infty)$ 上有解, 求实数 a 的取值范围;

【答案】 (1) $a \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

【解析】(1) 因为 $f(x) \leq e^a$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有解,

所以 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的最小值小于等于 e^a .

因为 $f'(x) = e^x(x+2)(x+a)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2$, $x_2 = -a$.

当 $-a \leq -2$ 时, 即 $a \geq 2$ 时,

因为 $f'(x) > 0$ 对 $x \in [a, +\infty)$ 成立, 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)$,

所以 $f(a) = e^a(a^2 + a^2 + a) \leq e^a$,

解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以此种情形不成立,

当 $-a > -2$, 即 $a < 2$ 时,

若 $a \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$ 对 $x \in [a, +\infty)$ 成立, 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)$, 所以 $f(a) = e^a(a^2 + a^2 + a) \leq e^a$,

解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

若 $a < 0$,

若 $a \geq -2$, 则 $f'(x) < 0$ 对 $x \in (a, -a)$ 成立, $f'(x) > 0$ 对 $x \in [-a, +\infty)$ 成立.

则 $f(x)$ 在 $(a, -a)$ 上单调递减, 在 $[-a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(-a)$,

所以有 $f(-a) = e^{-a}(a^2 - a^2 + a) = e^{-a} \cdot a \leq e^a$, 解得 $-2 \leq a < 0$,

当 $a < -2$ 时, 注意到 $-a \in [a, +\infty)$, 而

$f(-a) = e^{-a}(a^2 - a^2 + a) = e^{-a} \cdot a \leq e^a$,

此时结论成立.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

法二: 因为 $f(x) \leq e^a$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有解,

所以 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的最小值小于等于 e^a ,

当 $a \leq 0$ 时, 显然 $0 \in [a, +\infty)$, 而 $f(0) = a \leq 0 \leq e^a$ 成立,

当 $a > 0$ 时, $f'(x) > 0$ 对 $x \in [a, +\infty)$ 成立, 所以 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a)$,

所以有 $f(a) = e^a(a^2 + a^2 + a) \leq e^a$,

解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

综上, $a \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

【标注】【知识点】直接求函数的单调性(不含参); 利用导数解决不等式能成立问题