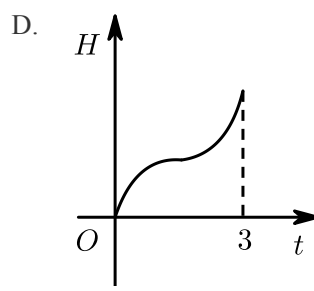
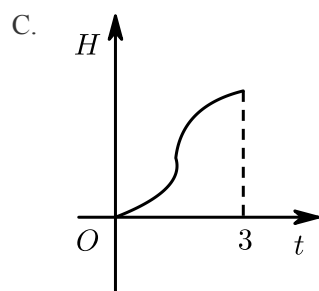
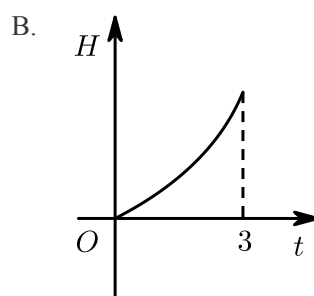
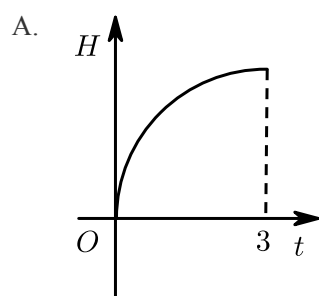
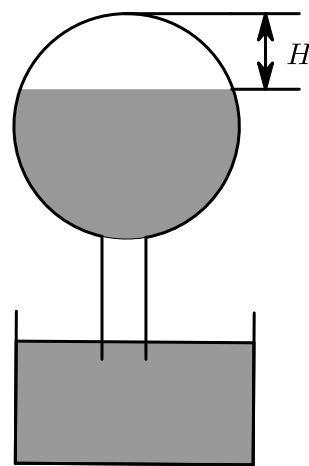


01导数的定义与运算及几何意义练习题

一、 运算

1. 如左图所示，液体从球形漏斗漏入一圆柱形烧杯中，开始时漏斗中盛满液体，经过3分钟漏完，已知烧杯中液面上升的速度是一个常量， H 是漏斗中液面下落的距离，则 H 与下落时间 t (分)的函数关系用图象表示可能是右图中的() .



【答案】 D

【解析】 每当 t 增加一个单位增量 Δt ， H 的变化开始增量 ΔH 越来越小，经过中截面后越来越大，故 H 关于 t 的函数图象是增加先变缓后变陡，因此选D .

【标注】【知识点】函数图象的识别问题；函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

【思想】数形结合思想

【素养】逻辑推理；直观想象

2. 函数 $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ 的导数为 () .

A. $y' = \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$

B. $y' = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$

C. $y' = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

D. $y' = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

【答案】B

【解析】 $y' = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$, 故选B .

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

3. 函数 $f(x) = \frac{1-x}{2x} + \ln(1-2x)$ 的导函数是 $f'(x)$, 则 $f'(x) =$ _____ .

【答案】 $-\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{1-2x}$

【解析】 $f'(x) = \frac{-2x - 2(1-x)}{4x^2} - \frac{2}{1-2x} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{1-2x}$.

【标注】【知识点】复合函数的求导法则

4. 函数 $y = x^2 \cos 2x$ 的导数为 () .

A. $y' = 2x \cos 2x - x^2 \sin 2x$

B. $y' = 2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x$

C. $y' = x^2 \cos 2x - 2x \sin 2x$

D. $y' = 2x \cos 2x + 2x^2 \sin 2x$

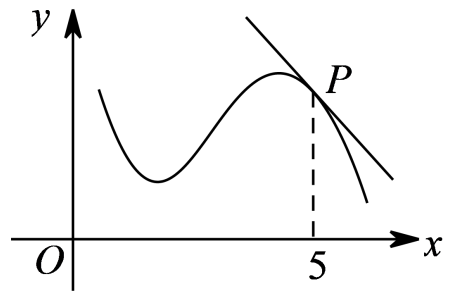
【答案】B

【解析】 $y' = (x^2)' \cos 2x + x^2 (\cos 2x)' = 2x \cdot \cos 2x - 2x^2 \sin 2x$.

【标注】【知识点】利用公式和四则运算法则求导

二、几何意义

5. 如图, 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 8$, 则 $f(5) + f'(5) =$ () .



A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 0

【答案】 C

【解析】 $f'(5) = -1$,

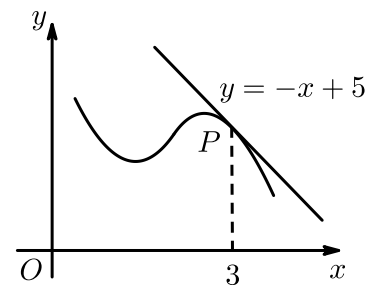
将 $x = 5$ 代入切线方程得 $f(5) = -5 + 8 = 3$,

所以 $f(5) + f'(5) = 3 + (-1) = 2$,

故选 : C .

【标注】【知识点】导数的几何意义

6. 如图 , 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y = -x + 5$, 则 $f'(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 -1

【解析】 在点 P 处的斜率就是在该点处的导数 .

$f'(3)$ 就是切线 $y = -x + 5$ 的斜率 ,

$\therefore f'(3) = -1$.

【标注】【知识点】导数的几何意义 ; 导数的几何意义的实际应用

7. 若过曲线 $f(x) = x \ln x$ 上的点 P 的切线的斜率为 2 , 则点 P 的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 (e, e)

【解析】 $\because f'(x) = \ln x + 1$.

$\because f'(x) = 2$ 时 ,

$\ln x + 1 = 2$, $\therefore x = e$.

又 $\because f(e) = e$.

$\therefore P$ 坐标为 (e, e) .

【标注】【知识点】导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用

8. 函数 $f(x) = \ln x$ 的图象在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程是 _____ .

【答案】 $x - ey = 0$

【解析】方法一： $\because f(x) = \ln x (x > 0)$,

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x}$, $k = f'(e) = \frac{1}{e}$,

$f(e) = \ln e = 1$,

切线方程为： $y - f(e) = k(x - e)$,

$\therefore y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$,

$\therefore x - ey = 0$.

方法二： $x - ey = 0$.

$f'(e) = \frac{1}{x} \Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$, $\therefore$ 所求的切线方程为 $y - f(e) = f'(e)(x - e)$,

即 $y - \ln e = \frac{1}{e}(x - e)$, 化简为 $x - ey = 0$.

故答案为： $x - ey = 0$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程；导数的几何意义；函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

9. 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 _____ .

【答案】 $y = 3x$

【解析】 $\because y = 3(x^2 + x)e^x$,

$\therefore y' = 3(x^2 + x + 2x + 1)e^x$

$= 3(x^2 + 3x + 1)e^x$,

$\therefore$ 曲线在点 $(0, 0)$ 处的切线斜率为 $k = y'|_{x=0} = 3$,

$\therefore$ 曲线在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = 3x$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程

10. 曲线 $y = e^x \cdot \sin x + 1$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 _____ .

【答案】 $y = x + 1$

【解析】 $y = e^x \cdot \sin x + 1$,

当 $x = 0$ 时 $y = 1$,

$y' = e^x \cdot \sin x + e^x \cos x$,

当 $x = 0$ 时 ,

$y' = 1$,

$\therefore y = e^x \cdot \sin x + 1$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = x + 1$.

故答案为 : $y = x + 1$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程

11. 过点 $(0, 0)$ 且与曲线 $y = e^x$ 相切的直线的斜率为 _____ .

【答案】 e

【解析】 设切点坐标为 (a, e^a) , 又切线过 $(0, 0)$,

得到切线的斜率 $k = \frac{e^a}{a}$,

又 $f'(x) = e^x$, 把 $x = a$ 代入得 : 斜率 $k = f'(a) = e^a$,

则 $e^a = \frac{e^a}{a}$, 由于 $e^a > 0$, 则得到 $a = 1$,

$\therefore$ 斜率 $k = e$.

故答案为 e .

【标注】【知识点】导数的几何意义

12. 已知曲线 $s : y = 3x - x^3$ 及点 $P(2, -2)$, 则过点 P 可向 s 引切线的条数为 _____ 条 .

【答案】 2

【解析】 易知点 P 在曲线上 , 设在点 (x_0, y_0) 的切线过点 P ,

$\therefore y' = 3 - 3x^2$, 于是知直线 $y - (3x_0 - x_0^3) = (3 - 3x_0^2)(x - x_0)$ 过点 $(2, -2)$,

由此得 $2(x_0 - 2)^2(x_0 + 1) = 0$, 解得 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = 2$.

故过点 P 可以向曲线 s 引两条切线.

【标注】【知识点】求过某点的切线方程；导数的几何意义

三、切线的应用

13. 设曲线 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3, 2)$ 处的切线与直线 $ax + y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a = ()$.

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

【答案】 D

【解析】 $\because y = \frac{x+1}{x-1}$,
 $\therefore y' = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$,
 $\therefore$ 所以 $y'|_{x=3} = \frac{-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{2}$,
 $\therefore$ 切线斜率为 $-\frac{1}{2}$,
 $\therefore$ 切线与直线 $ax + y + 1 = 0$ 垂直,
 $\therefore$ 直线 $ax + y + 1 = 0$ 的斜率为 $-a$,
 $\therefore \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-a) = -1$,
 $\therefore a = -2$.
故选D.

【标注】【知识点】已知切线方程求参数

14. 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = e^x + 1$ 的切线, 也是曲线 $y = e^{x+1}$ 的切线, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】 设直线 $y = kx + b$ 与 $y = e^x + 1$ 和 $y = e^{x+1}$ 切点分别为 $(x_1, e^{x_1} + 1)$, (x_2, e^{x_2+1}) ,
则 $k = e^{x_1} = e^{x_2+1}$,
 $k = \frac{e^{x_2+1} - e^{x_1} - 1}{x_2 - x_1}$, 可知 $x_2 - x_1 = -\frac{1}{k}$,
 $e^{x_1} = e^{x_2 + \frac{1}{k}} = e^{x_2+1}$,
 $\therefore \frac{1}{k} = 1$, 故 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$,
切点为 $(0, 2)$, $y = x + b$ 过 $(0, 2)$,
 $\therefore b = 2$.

故答案为：2 .

【标注】【知识点】导数的几何意义的实际应用；导数的几何意义