

02函数初步练习册

1. 函数的定义及表示方法

1 下列四组函数中，表示同一个函数的是（ ）。

A. $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

B. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$

C. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = x + 1$

D. $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

答案 A

解析 A函数 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ，两个函数的对应法则和定义域相同，是相等函数。

B函数 $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ， $g(x) = x$ ，两个函数的对应法则和定义域不相同，不是相等函数。

C函数 $f(x) = x + 1$ 的定义域为 $\{x|x \neq 1\}$ ，两个函数的定义域不相同，不是相等函数。

D由 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \geq 1$ ，

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \geq 1\}$ ，

由 $x^2 - 1 \geq 0$ ，解得 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$ ，

即 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x \geq 1$ 或 $x \leq -1\}$ ，

两个函数的定义域不相同，

不是相等函数。

2 已知：两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域和值域都是 $\{1, 2, 3\}$ ，其定义如下表：

x	1	2	3		x	1	2	3		x	1	2	3
$f(x)$	2	3	1		$g(x)$	1	3	2		$g[f(x)]$			

填写后面表格，其三个数依次为：_____。

答案 3, 2, 1

解析 $f(1) = 2, g(2) = 3, f(2) = 3, g(3) = 2, f(3) = 1, g(1) = 1$.

3 下列各组函数是同一函数的是 () .

① $f(x) = \sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x) = \sqrt{-2x}$

② $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

③ $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$

④ $f(x) = x^2 - x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - t - 1$

A. ②③

B. ①③

C. ③④

D. ①④

答案 C

解析 对于①, 函数 $f(x) = \sqrt{-2x^3} = -x\sqrt{-2x} (x \leq 0)$,

与 $g(x) = \sqrt{-2x} (x \leq 0)$ 的对应关系不同,

不是同一函数;

对于②, 函数 $f(x) = x (x \in \mathbf{R})$,

与 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| (x \in \mathbf{R})$ 的对应关系不同,

不是同一函数;

对于③, 函数 $f(x) = x^0 = 1 (x \neq 0)$,

与 $g(x) = \frac{1}{x^0} = 1 (x \neq 0)$ 的定义域相同,

对应关系也相同, 是同一函数;

对于④, 函数 $f(x) = x^2 - x - 1 (x \in \mathbf{R})$,

与 $g(x) = t^2 - t - 1 (t \in \mathbf{R})$ 的定义域相同,

对应关系也相同, 是同一函数.

综上知, 是同一函数的序号是③④.

故选: C.

2. 函数定义域求法

4 函数 $f(x) = \lg(1-x)$ 的定义域是 ()

A. $(0, 1)$

B. $[0, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-\infty, 1)$

答案 D

解析 解：由 $1 - x > 0$ ，得 $x < 1$ 。

∴ 函数 $f(x) = \lg(1 - x)$ 的定义域是 $(-\infty, 1)$ 。

故选：D。

5 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ ，则实数 a 的取值范围是()

A. $a > \frac{1}{3}$

B. $-12 < a \leq 0$

C. $-12 < a < 0$

D. $a \leq \frac{1}{3}$

答案 B

解析 解：依题意，若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

则分母 $ax^2 + ax - 3$ 不为 0。

当 $a \neq 0$ 时，由一元二次方程的性质可得，

$a^2 - 4a \times (-3) < 0$ 可使方程 $ax^2 + ax - 3 = 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上无解。

解得 $-12 < a < 0$ 。

当 $a = 0$ 时，分母为 -3 ，满足分母不为 0 的条件，

所以实数 a 的取值范围是 $(-12, 0]$ 。

故选 B。

6 已知函数 $f(2-x) = \sqrt{4-x^2}$ ，则函数 $f(\sqrt{x})$ 的定义域为()

A. $[0, +\infty)$

B. $[0, 16]$

C. $[0, 4]$

D. $[0, 2]$

答案 B

解析 解：令 $t = 2 - x$ ，则 $x = 2 - t$.

$$\therefore f(2 - x) = \sqrt{4 - x^2} ,$$

$$\therefore f(t) = \sqrt{4 - (2 - t)^2} = \sqrt{-t^2 + 4t} ,$$

$$\therefore -t^2 + 4t \geq 0 , \text{ 解得 } 0 \leq t \leq 4 ,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$,

$$\therefore 0 \leq \sqrt{x} \leq 4 , \text{ 解得 } 0 \leq x \leq 16 ,$$

$\therefore$ 函数 $f(\sqrt{x})$ 的定义域为 $[0, 16]$.

7 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$ 的定义域为 () .

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B. $(2, +\infty)$

C. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

D. $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$

答案 C

解析 要使函数 $f(x)$ 有意义，需使 $(\log_2 x)^2 - 1 > 0$ 且 $x > 0$ ，即 $(\log_2 x)^2 > 1$ 且 $x > 0$ ，

$$\therefore \log_2 x > 1 \text{ 或 } \log_2 x < -1 \text{ 且 } x > 0 . \text{ 解得 } x > 2 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{2} .$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

3. 函数值域求法

8 函数 $y = \log_{0.4}(-x^2 + 3x + 4)$ 的值域是 () .

A. $(0, -2]$

B. $[-2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2]$

D. $[2, +\infty)$

答案 B

解析

为使 $y = \log_{0.4}(-x^2 + 3x + 4)$ 有意义,

须 $-x^2 + 3x + 4 > 0$, $x^2 - 3x - 4 < 0$, 解得 $-1 < x < 4$,

此时 $0 < -x^2 + 3x + 4 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$,

又对数的底数小于1,

所以 $y = \log_{0.4}(-x^2 + 3x + 4) \geq \log_{0.4} \frac{25}{4} = -2$, 故选B.

9 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是()

A. $y = \sqrt{x}$

B. $y = \frac{100}{\sqrt{x+2}}$

C. $y = \frac{16}{x}$

D. $y = x^2 + x + 1$

答案

B

解析

A选项中, y 的值可以取0;

C选项中, y 的值可以取负值;

对于D选项, $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, 故其值域为 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$;

B选项的值域是 $(0, +\infty)$.

故选B.

10 已知函数 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - a$ 没有零点, 则实数 a 的取值范围是().

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-\infty, 0]$

C. $[0, +\infty)$

D. $(-\infty, -1]$

答案

A

解析

令 $4^x - 2^{x+1} - a = 0$,

则 $4^x - 2^{x+1} = a$,

令 $2^x = t$, $t \in (0, +\infty)$.

令 $h(t) = t^2 - 2t$,

$$t=1 \text{ 时 } h(t)=1-2=-1 .$$

$$\therefore h(t) \in [-1, +\infty) ,$$

$$\therefore 4^x - 2^{x+1} \in [-1, +\infty) .$$

$$\therefore f(x) \text{ 无零点 } ,$$

$$\therefore a \in (-\infty, -1) .$$

4. 函数解析式求法

11 已知 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x - 2$, 求 $f(x)$ 的解析式 .

答案 $f(x) = \frac{2}{x} - x - \frac{2}{3} .$

解析 解：由题意得 , $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x - 2$ ① ,
令 x 取 $\frac{1}{x}$ 代入得 , $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} - 2$ ② ,
由 ①② 解得 , $f(x) = \frac{2}{x} - x - \frac{2}{3} .$

12 若函数 $f(x)$ 满足 $f(3x+2) = 9x+8$, 则 $f(x)$ 的解析式是 () .

A. $f(x) = 9x+8$

B. $f(x) = 3x+2$

C. $f(x) = -3x-4$

D. $f(x) = 27x+36$

答案 B

解析 方法一：因为 $f(3x+2) = 9x+8 = 3(3x+2) + 2$, 所以 $f(x) = 3x+2$.

故选 B .

方法二：设 $t = 3x+2$, 则 $x = \frac{t-2}{3}$, 所以 $f(t) = 9 \times \frac{t-2}{3} + 8 = 3t+2$,

所以 $f(x) = 3x+2$.

故选 B .

13 已知 $f\left(\frac{1}{2}x-1\right) = 2x-5$, 且 $f(a) = 6$, 则 a 等于 () .

A. $-\frac{7}{4}$

B. $\frac{7}{4}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

答案 B

解析 方法一：换元法.

$$f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 2x - 5,$$

$$\text{令 } \frac{1}{2}x - 1 = t, \text{ 则 } x = 2t + 2,$$

$$\therefore f(t) = 2(2t + 2) - 5 = 4t - 1,$$

$$\therefore f(a) = 6,$$

$$\therefore 4a - 1 = 6,$$

$$\text{解得: } a = \frac{7}{4}.$$

方法二：直接代入.

$$f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 2x - 5 = 6,$$

$$\therefore x = \frac{11}{2},$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} - 1,$$

$$\text{解得 } a = \frac{7}{4}.$$

故选B.

14 已知函数 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 (x > 0)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 ().

A. $f(x) = x^2 - 3$

B. $f(x) = x^2 + 1$

C. $f(x) = x^2 - 3 (x \geq 2)$

D. $f(x) = x^2 + 1 (x > 0)$

答案 C

解析 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3,$

$$x > 0, \text{ 则 } x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{故 } f(x) = x^2 - 3 (x \geq 2).$$

故选C.

5. 分段函数

15 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 2) \\ 2x & (x \geq 2) \end{cases}$, 如果 $f(x) = 3$, 那么 x 的值是 () .

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. $\pm\sqrt{3}$

D. $\frac{3}{2}$

答案 B

解析 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 2) \\ 2x & (x \geq 2) \end{cases}$,

可得 $x \leq -1$ 时, $x+2 \leq 1$,

$-1 < x < 2$ 时, $x^2 \in [0, 4)$, 此时: $x^2 = 3$, 解得 $x = \sqrt{3}$.

$x \geq 2$ 时, $2x \geq 4$.

综上 $x = \sqrt{3}$.

故选: B .

16 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & (x \leq 1) \\ 1 - \lg x, & (x > 1) \end{cases}$, 则 $f(f(-4)) =$ _____ .

答案 0

解析 $\because f(-4) = 16 - 4 - 2 = 10$,

$\therefore f(f(-4)) = f(10) = 1 - \lg 10 = 0$.

故答案为: 0 .

17 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 的值域是 () .

A. $(0, +\infty)$

B. $(0, 1)$

C. $\left[\frac{3}{4}, 1\right)$

D. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

答案 A

解析 当 $x < 1$ 时, $f(x) = x^2 - x + 1$, 开口向上, 对称轴为 $x = \frac{1}{2}$,
 $\therefore$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时取最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$,
 $\therefore f(x) \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$,
 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$, 单调递减,
 $\therefore f(x) \in (0, 1)$,
 $\therefore$ 原函数的值域为 $(0, +\infty)$.
 故选 A.

18 若函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1 \\ -2x^2 + m, & x > 1 \end{cases}$ 的值域为 $(-\infty, 3]$, 则实数 m 的取值范围是 ____.

答案 $(2, 5]$

解析 解: $\because x \leq 1$ 时, $0 < 3^x \leq 3$;
 $x > 1$ 时, $-2x^2 + m < m - 2$,
 且 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 3]$,
 $\therefore 0 < m - 2 \leq 3$,
 $\therefore 2 < m \leq 5$,
 $\therefore$ 实数 m 的取值范围是: $(2, 5]$.
 故答案为: $(2, 5]$.