

01集合与简易逻辑练习册

1. 集合的定义、分类、表示方法

1 若 $-1 \in \{2, a^2 - a - 1, a^2 + 1\}$, 则 $a = (\quad)$.

A. -1

B. 0

C. 1

D. 0或1

答案 B

解析 解: ①若 $a^2 - a - 1 = -1$, 则 $a^2 - a = 0$,

解得 $a = 0$ 或 $a = 1$,

$a = 1$ 时, $\{2, a^2 - a - 1, a^2 + 1\} = \{2, -1, 2\}$, 舍去;

$a = 0$ 时, $\{2, a^2 - a - 1, a^2 + 1\} = \{2, -1, 1\}$, 符合题意.

②若 $a^2 + 1 = -1$, 则 $a^2 = -2$, a 无实数解.

由①②知: $a = 0$.

故选: B.

2. 集合间的关系

2 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x + y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 ____.

答案 3

解析 根据 $x \in A$, $y \in A$, $x + y \in A$ 知,

当 $x = 1$ 时, $y = 1$ 或 $y = 2$;

当 $x = 2$ 时, $y = 1$;

当 $x = 3$ 时, y 不存在.

因此集合 $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, 有3个元素.

3 若集合 $A = \{x | 4 - |2x - 1| \in \mathbf{N}^*\}$, 则 A 的非空真子集的个数是()

A. 62

B. 126

C. 254

D. 510

答案 B

解析 解: $\because 4 - |2x - 1| \in \mathbf{N}^*$

$$\therefore x = 2, \text{ 或 } x = \frac{3}{2}, \text{ 或 } x = 1, \text{ 或 } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{或 } x = 0, \text{ 或 } x = -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x = -1,$$

$$\therefore A = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\},$$

$$\therefore A \text{ 的非空真子集的个数是 } 2^7 - 2 = 126,$$

故选B.

4 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + (m+1)x + m = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 m 的取值为_____.

答案 1或2

解析 $\because x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 或 } -1$, $\therefore A = \{-2, -1\}$, $\because x^2 + (m+1)x + m = 0 \Rightarrow x = -m \text{ 或 } -1$

,

$\because B \subseteq A$, $\therefore -m = -1 \text{ 或 } -m = -2$, 解得 $m = 1 \text{ 或 } 2$, 即实数 m 的取值为1或2.

故答案为: 1或2.

5 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 m 的取值集合是_____.

答案 $\left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$

解析 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$.

因为 $A \cup B = A$, 所以 B 是 A 的子集.

又因为 $B = xlmx + 1 = 0$, 所以 B 是 A 的真子集 ,

所以 $B = \emptyset$ 或 $B = 2$ 或 $B = 3$.

当 $B = \emptyset$ 时 , $m = 0$; 当 $B = 2$ 时 , $2m + 1 = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$;

当 $B = 3$ 时 , $3m + 1 = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{3}$.

所以 m 的值构成的集合是 $\left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

6 已知集合 M 满足 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 求所有满足条件的集合 M 有 _____ 个 .

答案 8

解析 由题意知 , M 至少含有 1 , 2 两个元素 , 至多有 1 , 2 , 3 , 4 , 5 五个元素 ,
所以满足条件的 M 有 :

$\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 共 8 个 .

7 若 $\emptyset \subseteq M \subseteq \{0, 1, 2\}$, 则符合条件的集合 M 有 _____ 个 .

答案 8

解析 $\because \emptyset \subseteq M \subseteq \{0, 1, 2\}$,

$\therefore M = \emptyset$, $\{0\}$, $\{2\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$

共 8 个 ,

故答案为 8 .

8 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x | m \leq x \leq 2m - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围 .

答案 $\left\{m | m \leq \frac{7}{2}\right\}$.

解析 当 $B = \emptyset$ 时 , 由题意 , 得 $m > 2m - 1$,

解得 $m < 1$, 此时 $B \subseteq A$ 成立 ,

当 $B \neq \emptyset$ 时 , 由题意 , 得 $m \leq 2m - 1$,

解得 $m \geq 1$, 要使 $B \subseteq A$ 成立 ,

应有 $m \geq -2$, 且 $2m - 1 \leq 6$, 解得 $-2 \leq m \leq \frac{7}{2}$, 此时 $1 \leq m \leq \frac{7}{2}$,

综上 , 实数 m 的取值范围为 $\left\{ m \mid m \leq \frac{7}{2} \right\}$.

3. 集合的运算

9 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x \mid x - 1 \geq 0\}$, 则 $A \cap \complement_U B = (\quad)$.

A. $\{x \mid 0 < x < 1\}$

B. $\{x \mid x < 0\}$

C. $\{x \mid x > 2\}$

D. $\{x \mid 1 < x < 2\}$

答案 A

解析 依题意 $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $B = \{x \mid x \geq 1\}$, 所以 $\complement_U B = \{x \mid x < 1\}$, 得

$A \cap \complement_U B = \{x \mid 0 < x < 1\}$.

10 设集合 $A = \{x \mid -1 \leq 2x + 1 \leq 3\}$, $B = \{x \mid y = \log_2 x\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

A. $[0, 1]$

B. $[-1, 0]$

C. $[-1, 0)$

D. $(0, 1]$

答案 D

解析 $\because A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \mid x > 0\}$,

$\therefore A \cap B = (0, 1]$.

故选 : D .

不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 A ，不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 的解集为 B ，不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集是 $A \cap B$ ，那么 $a + b$ 等于_____.

答案 -3

解析 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 变形得： $(x - 3)(x + 1) < 0$ ，
 计算得出： $-1 < x < 3$ ，即 $A = (-1, 3)$ ，
 不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 变形得： $(x - 2)(x + 3) < 0$ ，
 计算得出： $-3 < x < 2$ ，即 $B = (-3, 2)$ ，
 $\therefore A \cap B = (-1, 2)$ ，即不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $(-1, 2)$ ，
 $\therefore a = -1$ ， $b = -2$ ，
 则 $a + b = -3$ 。
 因此，本题正确答案是： -3 。

12 已知全集为 $\mathbf{R}$ ，集合 $A = \left\{x \mid \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1\right\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 \leq 0\}$ ，则 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = ()$ 。

- A. $\{x \mid x \leq 0\}$
- B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$
- C. $\{x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$
- D. $\{x \mid 0 < x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$

答案 C

解析 $A = \{x \mid x \geq 0\}$ ，
 $B = \{x \mid (x - 2)(x - 4) \leq 0\} \Rightarrow B = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$ 。
 $\therefore \complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x > 4 \text{ 或 } x < 2\}$ ，
 $\therefore A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid 0 \leq x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$ ，
 故选C。

13 设集合 $M = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$ ， $N = \{x \mid x - k \leq 0\}$ ，若 $M \cap N = \emptyset$ ，则 k 的取值范围是()。

A. $\{k|k < -1\}$

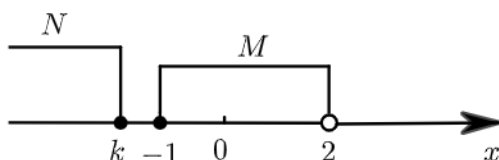
B. $\{k|k \geq -1\}$

C. $\{k|k > -1\}$

D. $\{k|k \leq -1\}$

答案 A

解析 由题知 $N = \{x|x - k \leq 0\} = \{x|x \leq k\}$, 画数轴如图所示,



由图得 $k < -1$, 故选A.

14 设集合 $A = \{x|-3 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x|m-1 \leq x \leq 3m-2\}$.

(1) 当 $m = 3$ 时, 求 $A \cap B$.

(2) 若 $A \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

答案 (1) $\{x|2 \leq x \leq 4\}$.

(2) $m \leq 2$.

解析 (1) 当 $m = 3$ 时 $B = \{x|2 \leq x \leq 7\}$,

$$\therefore A \cap B = \{x|2 \leq x \leq 4\}.$$

(2) ①当 $B = \emptyset$ 时, $m-1 > 3m-2$,

$$\therefore m < \frac{1}{2}.$$

$$\text{②当 } B \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} m-1 \leq 3m-2 \\ m-1 \geq -3 \\ 3m-2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m \geq -2 \\ m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 2.$$

综上: $m \leq 2$.

4. 充分必要条件

15 设 a, b 是实数, 则“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的 ().

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

答案 D

解析 方法一：若 $0 > a > b$ ，则 $a^2 < b^2$ ，故非充分条件；

若 $|a| > 0 > b > a$ ，也满足 $a^2 > b^2$ ，故非必要条件。

方法二：令 $a = 1, b = -1$ ，满足 $a > b$ ，但不满足 $a^2 > b^2$ ，即“ $a > b$ ”不能推出“ $a^2 > b^2$ ”；再令 $a = -1, b = 0$ ，满足 $a^2 > b^2$ ，但不满足 $a > b$ ，即“ $a^2 > b^2$ ”不能推出“ $a > b$ ”，所以“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的既不充分也不必要条件。

故选D。

16 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > b > 1$ ”是“ $a - b < a^2 - b^2$ ”的（ ）。

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析 设命题 $p: a > b > 1$ ；则 $a - b > 0$ ，

命题 $q: a - b < a^2 - b^2$ 化简得

$$(a - b) < (a + b)(a - b),$$

又 $\because a, b \in \mathbf{R}$ ，

$\therefore p \Rightarrow q$ ， q 推不出 p ，

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件，

即“ $a > b > 1$ ”是“ $a - b < a^2 - b^2$ ”的充分不必要条件，

故选：A。

17 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的（ ）。

- A. 充分且不必要条件
B. 必要且不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 D

解析 若 $q > 1$, 当 $a_1 < 0$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列,
故“ $q > 1$ ”不能推出“ $\{a_n\}$ 为递增数列”;
当 $a_1 < 0$ 且 $0 < q < 1$ 时, $\{a_n\}$ 也为递增数列,
故“ $\{a_n\}$ 为递增数列”不能推出“ $q > 1$ ”;
综上, “ $q > 1$ ”为“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件.

18 将函数 $y = \sin(2x + \theta)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后, 得到一个函数 $f(x)$ 的图象, 则“ $f(x)$ 是偶函数”是“ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ”的 ().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 将 $y = \sin(2x + \theta)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后,
得到 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + \theta\right)$,
 $f(x)$ 是偶函数的充要条件是 $\frac{\pi}{4} + \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore f(x)$ 是偶函数是“ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ”的必要不充分条件.
故选 B.

5. 全称量词与存在量词

19 设 $x \in \mathbf{Z}$, 集合 A 是奇数集, 集合 B 是偶数集. 若命题 $p: \forall x \in A, 2x \in B$, 则 ().

A. $\neg p: \forall x \in A, 2x \notin B$

B. $\neg p: \forall x \notin A, 2x \notin B$

C. $\neg p: \exists x \notin A, 2x \in B$

D. $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$

答案 D

解析 命题 $p: \forall x \in A, 2x \in B$ 是一个全称命题，
其命题的否定 $\neg p$ 应为： $\exists x \in A, 2x \notin B$.
故选 D .

20 命题“存在 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ”的否定是 () .

- A. 不存在 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$
- B. 存在 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$
- C. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$
- D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$

答案 D

解析 因为特称命题的否定是全称命题，所以，
命题“存在 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ”的否定是：
对任意的 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$.
故选：D .