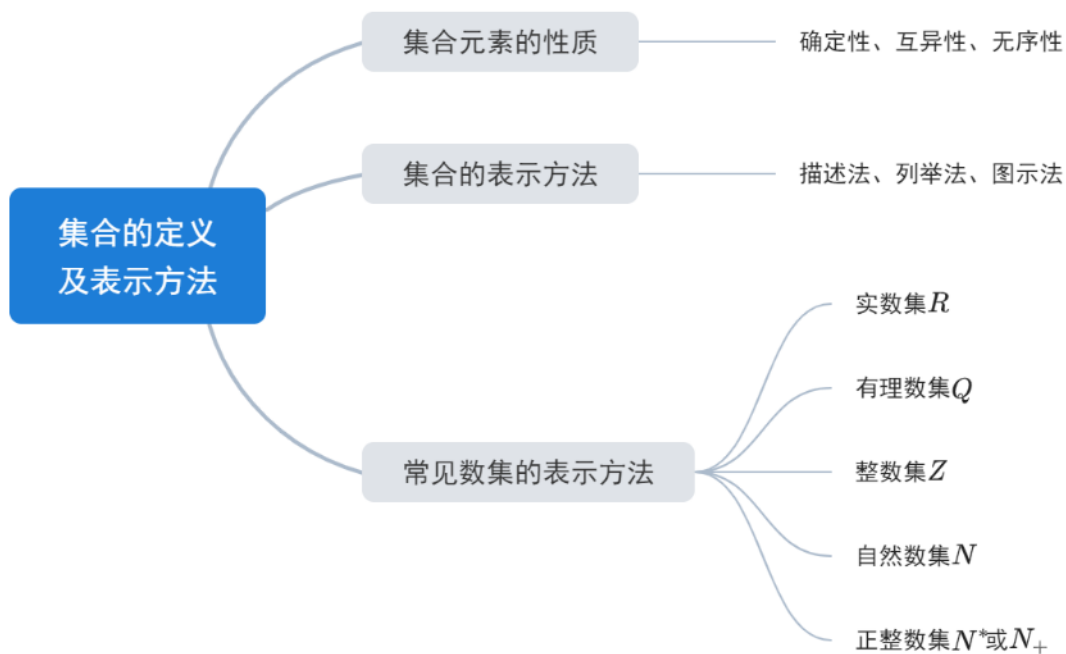


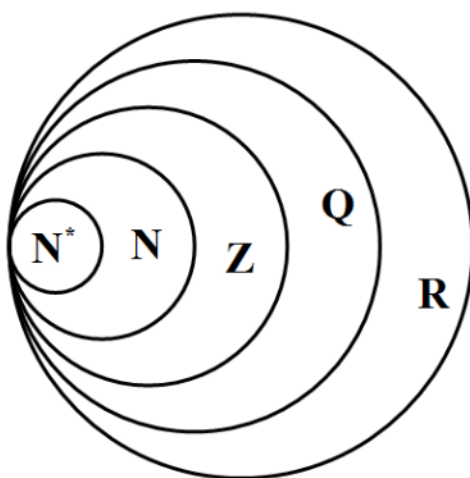
01集合与简易逻辑

集合的定义、分类、表示方法



教法备注

常见数集的关系：



已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为 () .

A. 3

B. 6

C. 8

D. 10

答案 D

解析 方法一：因为 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以集合 A 中的元素都为正数，

若 $x - y \in A$ 必有 $x - y > 0$, 得 $x > y$,

当 $y = 1$ 时, x 可取 2, 3, 4, 5, 有 4 个;

当 $y = 2$ 时, x 可取 3, 4, 5, 有 3 个;

当 $y = 3$ 时 x 可取 4, 5, 有 2 个;

当 $y = 4$ 时, x 可取 5, 有 1 个, 故共有 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 个.

故选 D.

方法二：因为 A 中元素均为正整数, 所以从 A 中任取两个元素 x, y , 满足 $x > y$ 的 (x, y) 即为集合 B 中的元素, 故共有 $C_5^2 = 10$ 个.

故选 D.

2 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P + Q = \{a + b | a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P + Q$ 中元素的个数为 () .

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

答案 B

解析 $\because P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}, P + Q = \{a + b | a \in P, b \in Q\}$,

$\therefore$ 当 $a = 0$ 时, $b \in Q, P + Q = \{1, 2, 6\}$,

当 $a = 2$ 时, $b \in Q, P + Q = \{3, 4, 8\}$,

当 $a = 5$ 时, $b \in Q, P + Q = \{6, 7, 11\}$,

$\therefore P + Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11\}$.

集合间的关系



教法备注

【空集的性质】

(1) 空集是任何一个集合的子集。

(2) $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 是不同的， $\emptyset$ 中没有任何元素， $\{0\}$ 则表示含有一个元素0的集合，它们的关系是两个集合之间的关系 ($\emptyset \subsetneq \{0\}$)。

(3) $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 是不同的， $\emptyset$ 中没有任何元素， $\{\emptyset\}$ 则表示含有一个元素 $\emptyset$ 的集合，它们的关系是 $\emptyset \in \{\emptyset\}$ 或 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 或 $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$ 。

(4) 显然， $0 \notin \emptyset$ ， $0 \notin \{\emptyset\}$ 。



集合间的关系

3 已知集合 $A = \{-2, 3, 4m - 4\}$ ，集合 $B = \{3, m^2\}$ ，若 $B \subseteq A$ ，则实数 $m =$ _____。

答案 2

解析 因为 $B \subseteq A$ ，

所以 $m^2 = 4m - 4$ 或者 $m^2 = -2$ (舍去)

解得 $m=2$,经检验 $m=2$ 时成立

故答案为2。

4 已知集合 $A = \left\{m, \frac{n}{m}, 1\right\}$, 集合 $B = \{m^2, m+n, 0\}$, 若 $A = B$, 则 () .

A. $m = 1, n = 0$

B. $m = -1, n = 1$

C. $m = -1, n = 0$

D. $m = 1, n = -1$

答案 C

解析 $\because A = \left\{m, \frac{n}{m}, 1\right\}, B = \{m^2, m+n, 0\},$

$$A = B,$$

$\therefore A$ 与 B 两个集合中元素相同,

$$\because \frac{n}{m} \text{ 存在},$$

$$\therefore m \neq 0,$$

$$\therefore \frac{n}{m} = 0,$$

$$\therefore n = 0,$$

$$\therefore A = \{m, 0, 1\}, B = \{m^2, m, 0\},$$

$$\therefore m^2 = 1,$$

$$\therefore m = \pm 1,$$

$\therefore A$ 中元素互异,

$$\therefore m = -1.$$

故选 C.

5 下列集合中, 是空集的是 () .

A. $\{x | x+2=0\}$

B. $\{x | x^2+1=0, x \in \mathbf{R}\}$

C. $\{x | x < 1\}$

D. $\{(x, y) | y^2 = -x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$

答案 B

解析 A选项： $x = -2$ ，不是空集．

B选项： $x^2 + 1 = 0$ 没有实数根，故为空集．

C选项：显然不是空集．

D选项：集合为 $\{(0, 0)\}$ ，故不是空集．

故选B.

6 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$ ， $B = \{x | mx - 1 = 0\}$ ，若 $B \subseteq A$ ，则实数 m 的取值集合为_____．

答案 $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

解析 ①若 $m = 0$ ，则集合 $B = \emptyset$ ，满足题目要求．

②若 $m \neq 0$ ，集合 $A = \{-3, 2\}$ ， $B = \left\{\frac{1}{m}\right\}$ ，
 $B \subseteq A$ 即 $\frac{1}{m} = -3$ 或 $\frac{1}{m} = 2$ ，则 $m = -\frac{1}{3}$ 或 $m = \frac{1}{2}$ ．

7 已知集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ ， $B = \{x | x = 4k, k \in \mathbf{Z}\}$ ，则 A 与 B 之间的关系是()．

A. $A = B$

B. $B \supseteq A$

C. $A \subsetneq B$

D. $B \subsetneq A$

答案 D

解析 用列举法表示集合 A 和 B ， $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ ，知 A 中的元素是2的整数倍，

$B = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$ ，知 B 中的元素是4的整数倍，显然 B 是 A 的真子集．

故选D．

空集的性质

8 以下五个关系： $\emptyset \in \{0\}$ ， $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ ， $0 \in \emptyset$ ， $\{\emptyset\} \subseteq \{0\}$ ， $\emptyset \subsetneq \{0\}$ ，其中正确的个数是()．

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 B

解析 空集是任何非空集合的真子集，故 $\emptyset \in \{0\}$ 错误， $\emptyset \subsetneq \{0\}$ 正确。

$\{\emptyset\}$ 表示含有一个元素 $\emptyset$ 的集合，故 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 正确， $\{\emptyset\} \subseteq \{0\}$ 错误。

空集表示不含任何元素的集合，故 $0 \in \emptyset$ 错误。

9 给出下列关系：① $a \subsetneq \{a, b\}$ ；② $a \in \{a, b\}$ ；③ $\emptyset \in \{a\}$ ；④ $\emptyset \subseteq \{a\}$ ；⑤ $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ ；⑥ $\{a\} \subseteq \{a\}$ 。
其中正确的是（ ）。

A. ①②④⑤

B. ②③④⑤

C. ②④⑤

D. ②④⑤⑥

答案 D

子集的个数

设集合 A 中元素个数为 n ，则：

① 子集的个数为 2^n ，

② 真子集的个数为 $2^n - 1$ ，

③ 非空子集的个数为 $2^n - 1$ ，

④ 非空真子集的个数为 $2^n - 2$ 。

10 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{2, 4, 5\}$ ，则集合 $A \cup B$ 的子集的个数为 _____。

答案 32

解析 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，子集个数 $2^5 = 32$ 。

故答案为：32。

11 定义非空集合 A 的真子集的真子集为 A 的“孙集”，则集合 $\{1, 3, 5, 7\}$ 的“孙集”的个数有 _____。

答案 11

解析 真子集至多为3元集合，而真子集的真子集至多为2元集合，

①空集，1个

②一元子集，4个

③二元子集， $\{1, 3\}\{1, 5\}\{1, 7\}\{3, 5\}\{3, 7\}\{5, 7\}$ 共6个

故孙集的个数有 $1 + 4 + 6 = 11$.

故答案为：11 .

12 满足关系式 $\{2, 3\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合 A 的个数是 _____ .

答案 4

解析 满足关系式 $\{2, 3\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合 A 有： $\{2, 3\}$ ， $\{1, 2, 3\}$ ， $\{2, 3, 4\}$ ， $\{1, 2, 3, 4\}$ ，共4个 .

故答案为：4 .

13 设集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，若 $A \subseteq S \subsetneq B$ ，则满足条件的集合 S 的个数为 _____ .

答案 7

解析 由 $A \subseteq S \subsetneq B$ 知，集合 S 中一定存在元素1，2，故集合 S 的个数与 $\{3, 4, 5\}$ 的真子集的个数是相同的，有 $2^3 - 1 = 7$ 个 .

14 满足条件 $\{2, 3\} \subseteq A \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合 A 有 _____ 个 .

答案 3

解析 满足条件 $\{2, 3\} \subseteq A \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合 A 有： $\{2, 3\}$ ， $\{1, 2, 3\}$ ， $\{2, 3, 4\}$ ，
故共有3个。

豪厘不伐 将用斧柯

15 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ ， $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$ 。

- (1) 若 $B \subseteq A$ ，求实数 m 的取值范围；
(2) 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时，求 A 的非空真子集的个数。

答案 见解析。

解析 (1) ①当 $m + 1 > 2m - 1$ ，即 $m < 2$ 时 $B = \emptyset$ ，满足 $B \subseteq A$ 。

②当 $m + 1 \leq 2m - 1$ ，即 $m \geq 2$ 时，要使 $B \subseteq A$ 成立，

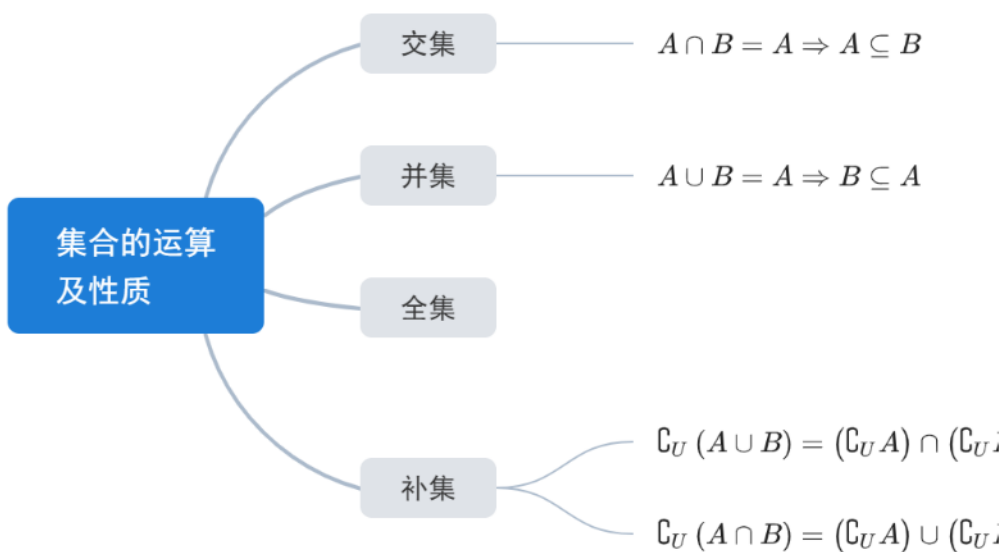
需 $\begin{cases} m + 1 \geq -2 \\ 2m - 1 \leq 5 \end{cases}$ 可得 $2 \leq m \leq 3$ 。

综上， m 的取值范围是 $m \leq 3$ 。

(2) 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时， $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ，

所以 A 的非空真子集个数为 $2^8 - 2 = 254$ 。

集合的运算



16 设集合 $M = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $N = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$.

A. $(0, 4]$

B. $[0, 4)$

C. $[-1, 0)$

D. $(-1, 0]$

答案 B

解析 $\because x^2 - 3x - 4 < 0$, 解得 $-1 < x < 4$,

$\therefore M = \{x | -1 < x < 4\}$,

$\therefore M \cap N = \{x | 0 \leq x < 4\}$.

故选B.

17 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | (x+1)(x-2) < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

A. $\{1\}$

B. $\{1, 2\}$

C. $\{0, 1, 2, 3\}$

D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

答案 C

解析 因为 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$,

所以 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$.

故选C.

18 设集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + m = 0\}$. 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $B = (\quad)$

A. $\{1, -3\}$

B. $\{1, 0\}$

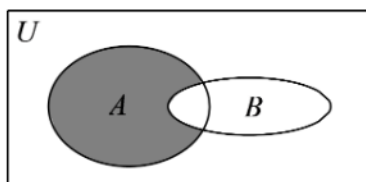
C. $\{1, 3\}$

D. $\{1, 5\}$

答案 C

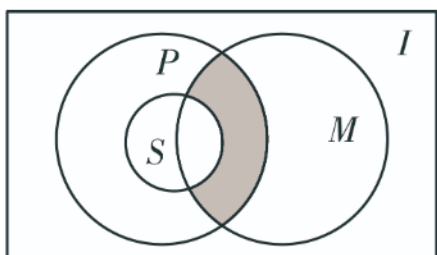
解析

19 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则图中阴影部分所表示的集合是 ().



- 答案 A

20 如图, I 为全集, M 、 P 、 S 是 I 的三个子集, 则图中阴影部分所表示的集合是()



- 答案 C

解析 直接观察韦恩图可以得出阴影部分所表示的集合为 $(M \cap P) \cap \complement_I S$, 故选 C.

21 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ().

A. 3

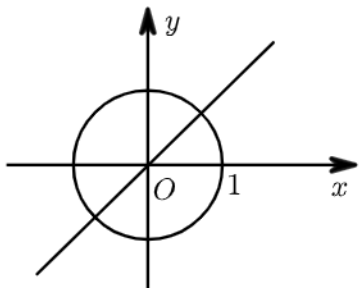
B. 2

C. 1

D. 0

答案 B

解析 方法一：根据题意， $A \cap B$ 中元素的个数为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $y = x$ 的交点个数.



根据图象可知其交点个数为2.

故选B.

方法二：联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$,

所以 $A \cap B$ 中有 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 两个元素.

故选B.

22 若 $A = \{x | -3 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | 2m - 1 \leq x \leq m + 1\}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

答案 $m \geq -1$.

解析 $\because A \cap B = B$,

$\therefore B \subseteq A$.

① B 为空集, 则 $2m - 1 > m + 1$, 即 $m > 2$;

② B 不是空集, 则 $\begin{cases} 2m - 1 \leq m + 1 \\ 2m - 1 \geq -3 \\ m + 1 \leq 4 \end{cases}$,

$\therefore -1 \leq m \leq 2$.

综上所述: $m \geq -1$.

23 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | x^2 - 12x + 20 < 0\}$, $C = \{x | x < a\}$.

- (1) 求 $A \cup B$; $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$.
- (2) 若 $A \cap C \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

答案

- (1) $A \cup B = \{x | 2 < x < 10\}$;
 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 2 \leq x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$.
- (2) $a > 3$.

解析

- (1) $B = \{x | x^2 - 12x + 20 < 0\} = \{x | 2 < x < 10\}$,
 因为 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$,
 所以 $A \cup B = \{x | 2 < x < 10\}$;
 因为 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$,
 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 7\}$;
 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 2 \leq x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$.
- (2) 因为 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $C = \{x | x < a\}$. $A \cap C \neq \emptyset$,
 所以 $a > 3$.

豪厘不伐 将用斧柯

24 已知 $A = \{x | a - 1 \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x^2 - 3x - 10 > 0\}$.

- (1) 若 $a = 0$, 求 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$.
- (2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围.
- (3) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

答案

- (1) $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 5\}$.
- (2) $-1 \leq a \leq 2$.
- (3) $a < -5 \text{ 或 } a > 6$.

解析

- (1) $a = 0$ 时,
 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 5\}$,

$$\therefore (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 5\}.$$

$$(2) A \cap B = \emptyset,$$

$\therefore$ ① $A = \emptyset$ 时, $a - 1 > a + 3$, 不存在;

$$\text{② } A \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} a - 1 \geq -2 \\ a + 3 \leq 5 \\ a - 1 < a + 3 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq a \leq 2.$$

$$(3) A \cup B = B,$$

$$\text{① } a + 3 < -2 \text{ 即 } a < -5;$$

$$\text{② } a - 1 > 5 \text{ 即 } a > 6,$$

$$\therefore a < -5 \text{ 或 } a > 6.$$

充分必要条件

【充分条件与必要条件】

一般地, “若 p , 则 q ” 为真命题, 是指由 p 可以推出 q , 记作 “ $p \Rightarrow q$ ”, 这时称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件. 如果 “若 p , 则 q ” 为假命题, 那么由 p 推不出 q , 记作 “ $p \nRightarrow q$ ”, 这时称 p 不是 q 的充分条件, q 不是 p 的必要条件.

教法备注

【温馨提示】

不能将 “若 p , 则 q ” 与 “ $p \Rightarrow q$ ” 混为一谈, 只有 “若 p , 则 q ” 为真命题时, 才有 “ $p \Rightarrow q$ ”, 即 “ $p \Rightarrow q$ ” $\Leftrightarrow$ “若 p , 则 q ” 为真命题.

【充要条件】

如果既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 就称 p 是 q 的充分必要条件, 简称充要条件, 可记作 $p \Leftrightarrow q$.

【从集合的角度看充分必要条件】

设集合 $A = \{x | p(x)\}$, $B = \{x | q(x)\}$. 若 x 具有性质 p , 则 $x \in A$; 若 x 具有性质 q , 则 $x \in B$.

当 $A \subseteq B$ 时, 说明若 x 具有性质 p , 则 x 必具有性质 q , 即 $p \Rightarrow q$. 类似地, $B \subseteq A$ 与 $q \Rightarrow p$ 等价, $A = B$ 与 $p \Leftrightarrow q$ 等价.

教法备注

如果把 p 研究的范围看成集合 A , 把 q 研究的范围看成集合 B , 则可得下表:

记 法	$A = \{x p(x)\}, B = \{x q(x)\}$			
关 系	$A \subsetneq B$	$B \subsetneq A$	$A = B$	$A \not\subset B \text{ 且 } B \not\subset A$
图 示				
结 论	p是q的充分不必要条件	p是q的必要不充分条件	P, q互为充要条件	p是q的既不充分也不必要条件

25 “ $|x-1| < 2$ 成立”是“ $x(x-3) < 0$ 成立”的() .

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 由 $|x-1| < 2$ 解得 $-1 < x < 3$, 由 $x(x-3) < 0$ 解得 $0 < x < 3$,
∴“ $|x-1| < 2$ 成立”是“ $x(x-3) < 0$ 成立”的必要不充分条件, 故选B.

26 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的一个必要不充分条件是()

- A. $-\frac{1}{2} < x < 3$ B. $-\frac{1}{2} < x < 0$
C. $-3 < x < \frac{1}{2}$ D. $-1 < x < 6$

答案 D

解析 解: $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的充要条件为 $-\frac{1}{2} < x < 3$.

对于A, 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的充要条件;

对于B, 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的充分不必要条件;

对于C, 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的既不充分也不必要条件;

对于D, 是 $2x^2 - 5x - 3 < 0$ 的一个必要不充分条件.

故选: D.

27 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的()

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

答案 A

解析 解: 因为 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ” $\Rightarrow$ “ $\frac{1}{a} < 1$ ”,
“ $\frac{1}{a} < 1$ ” $\Rightarrow$ “ $a > 1$ 或 $a < 0$ ”,
 $\therefore$ “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充分非必要条件.

故选: A.

28 已知 a, b 是实数, 则“ $a > 0$ 且 $b > 0$ ”是“ $a + b > 0$ 且 $ab > 0$ ”的().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 由 $a > 0$ 且 $b > 0$ 可得 $a + b > 0$, $ab > 0$.
由 $a + b > 0$ 可得 a, b 中至少有一个为正.
由 $ab > 0$ 可得 a, b 同号.
两者同时成立, 则必有 $a > 0, b > 0$.
故选C.

29 已知 $p: x < m, q: 1 \leq x \leq 3$, 若 p 是 q 的必要而不充分条件, 则实数 m 的取值范围是_____.

答案 $(3, +\infty)$

解析 $\because p$ 是 q 的必要而不充分条件

$$\therefore \{x | 1 \leq x \leq 3\} \subseteq \{x | x < m\} \text{ 且 } \{x | 1 \leq x \leq 3\} \neq \{x | x < m\}$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $m > 3$.

故答案为： $m > 3$.

包罗万象 举一千从

30 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是为 a, b, c ，则“ $\sin A > \sin B$ ”是“ $a > b$ ”的（ ）.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 有正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 得 $\sin A > \sin B \Rightarrow \frac{a}{2R} > \frac{b}{2R} \Rightarrow a > b$,

$a > b \Rightarrow 2R \sin A > 2R \sin B \Rightarrow \sin A > \sin B$ ，所以互为充要条件.

故选C.

31 设 $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a = 1$ ”是“直线 $l_1: ax + 2y - 1 = 0$ 与直线 $l_2: y - (a + 1)x + 4 = 0$ 垂直”的（ ）.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析 充分性，当 $a = 1$ 时，直线 $l_1: x + 2y - 1 = 0$ ，

直线 $l_2: y - 2x + 4 = 0$ ，

$$\therefore 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0,$$

$\therefore l_1 \perp l_2$ ，故充分性成立，

必要性，若 $l_1 \perp l_2$ ，

则 $a \cdot [-(a+1)] + 2 \cdot 1 = 0$,

$\therefore -a^2 - a + 2 = 0$, 即 $a^2 + a - 2 = 0$,

$\therefore (a+2)(a-1) = 0$,

$\therefore a = -2$ 或 1 , 故必要性不成立.

故选 A.

32 $2 < m < 6$ 是方程 $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{m-6} = 1$ 表示双曲线的 ().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{m-6} = 1$ 表示双曲线,

则 $(m-2)(m-6) < 0$,

即 $2 < m < 6$.

故选 C.

33 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为单位向量, 则 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的 ().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 由 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$, 得 $(\vec{a} - 3\vec{b})^2 = (3\vec{a} + \vec{b})^2$,

即 $\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b}$,

因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为单位向量,

所以 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$,

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 能推出 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

由 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 得 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{10}$, $|3\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$,

能推出 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$,

所以 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的充分必要条件.

全称量词与存在量词



教法备注

【注意】

(1) 有些命题虽没有写出存在量词，但其意义具备“存在”“有一个”等特征，这样的命题也是存在量词命题.

(2) 全称量词命题含有全称量词，有些全称量词命题中的全称量词是省略的，理解时需把它补充出来例如，命题“平行四边形对角线互相平分”应理解为“所有的平行四边形对角线都互相平分”.

【温馨提示】

一般命题的否定”与“含有一个量词的命题的否定”的辨析：

①一般命题的否定通常是在条件成立的前提下否定其结论，得到真假性完全相反的两个命题；含有一个量词的命题的否定，是在否定结论的同时，改变量词的属性，即将全称量词改为存在量词，存在量词改为全称量词.

②与一般命题的否定相同，含有一个量词的命题的否定的关键也是对关键词的否定，因此，对含有一个量词的命题的否定，应根据命题所叙述对象的特征，挖掘其中的关键词.

34 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*, \text{使得 } n \geq x^2$ ”的否定形式是 ().

A. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*, \text{使得 } n < x^2$

- B. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < x^2$
- C. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < x^2$
- D. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < x^2$

答案 D

解析 $\forall$ 的否定是 $\exists$, $\exists$ 的否定是 $\forall$, $n \geq x^2$ 的否定是 $n < x^2$.
 故选 D.

35 下列命题中存在量词命题的个数是 ().

①有些自然数是偶数; ②正方形是菱形; ③能被6整除的数也能被3整除; ④对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 总有 $|x| \geq 0$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

答案 B

解析 命题①中含有存在量词, 是存在量词命题;
 命题②中全称量词省略, 可以叙述为“所有的正方形都是菱形”, 是全称量词命题;
 命题③中全称量词省略, 可以叙述为“一切能被6整除的数也都能被3整除”,
 是全称量词命题;
 而命题④中有全称量词“任意”, 是全称量词命题.
 故有1个存在量词命题.
 故选: B.

36 下列说法正确的是 ().

- A. 命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, 则 $\neg p$ 是真命题
- B. “ $x = -1$ ”是“ $x^2 + 3x + 2 = 0$ ”的必要不充分条件
- C. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 3 < 0$ ”的否定是: “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 3 > 0$ ”
- D. “ $a > 1$ ”是“ $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数”的充要条件

答案 D

解析

A选项： $\because \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 且 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1, 1]$.

$\therefore \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.

$\therefore$ 命题 p 是真命题，则 $\neg p$ 是假命题。故A错误。

B选项： $\because$ 由于 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 解得 $x = -1$ 或 $x = -2$ 。

则“ $x = -1$ ”是“ $x^2 + 3x + 2 = 0$ ”的充分不必要条件。故B错误；

C选项：特称命题的否定是全称命题，

则命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$ ”，使得“ $x^2 + 2x + 3 < 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 + 2x + 3 \geq 0$ ”。故C错误；

D选项：当 $a > 1$ 时， $f(x) = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数成立，即充分性成立。

若 $f(x) = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，则 $a > 1$ ，即必要性成立。

故“ $a > 1$ ”是“ $f(x) = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数”的充要条件。

故D正确。

故选D。