

04：函数零点综合问题（二）

1. 分段函数的零点



分段函数零点个数（画图找交点）

1 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数且 $f(x) = f(2-x)$ ，已知 $x \in [0, 1]$ 时 $f(x) = \sin x$ ，则函数

$g(x) = |\cos(\pi x)| - f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$ 上的所有零点之和为（ ）.

A. 6

B. 7

C. 13

D. 14

答案 A

解析 由题意，函数 $f(-x) = -f(x)$ ， $f(x) = f(2-x)$ ，

则 $-f(-x) = f(2-x)$ ，可得 $f(x+4) = f(x)$ ，

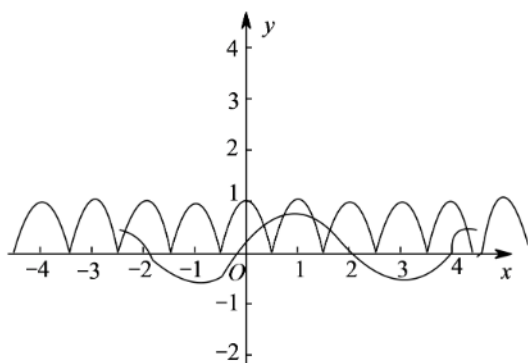
即函数的周期为4，

且 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称，

$g(x) = |\cos(\pi x)| - f(x)$ ，在区间 $\left[-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$ 上的零点，

即方程 $|\cos(\pi x)| - f(x)$ 的零点，

画 $y = |\cos(\pi x)|$ 函数图象，



$\therefore$ 两个函数的图象都关于直线 $x = 1$ 对称，

$\therefore$ 方程 $|\cos(\pi x)| - f(x)$ 的零点关于直线 $x = 1$ 对称，

由图象可知交点个数为6个，可得所有零点的和为6.

故选A.

2 若关于 x 的方程 $2^x - \frac{1}{x-1} - a = 0$ 有负实数根, 则实数 a 的取值范围是().

A. $(2, +\infty)$

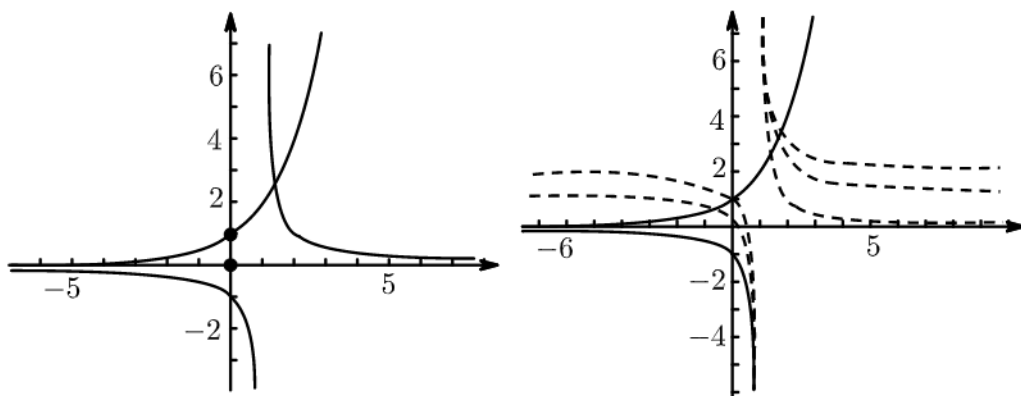
B. $(0, +\infty)$

C. $(0, 2)$

D. $(0, 1)$

答案 C

解析 由题可得 $2^x = \frac{1}{x-1} + a$, 先可作图得出 $y = 2^x$, $y = \frac{1}{x-1}$ 两函数的图像如下,



再将 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图像上下平移可得到要想有负实根, 即 $y = \frac{1}{x-1} + a$ 与 $y = 2^x$ 在 $x < 0$ 时有交点, 则根据图像可知 $0 < a < 2$.

故选C.

利用零点信息求解参数取值范围

3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e \\ f(2e-x), & e < x < 2e \end{cases}$, 函数 $F(x) = f(x) - ax$ 有4个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

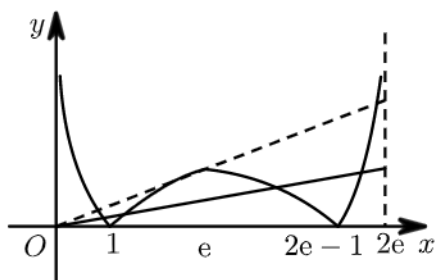
答案 $(0, \frac{1}{e})$

解析 函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e \\ f(2e-x), & e < x < 2e \end{cases}$

函数的图象关于 $x = e$ 对称,

令 $F(x) = f(x) - ax = 0$ 得 $f(x) = ax$,

作出 $f(x)$ 在 $(0, 2e)$ 上的函数图象如图所示:



设 $y = ax$ 与 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的函数图象相切，

则 $y = \ln x$ ，可得 $y' = \frac{1}{x}$ ， $x > 1$ ，

函数 $y = \ln x$ 是增函数， $x = e$ 时， $a = \frac{1}{e}$ ，

直线 $y = ax$ 与 $f(x)$ 的图象有 4 个交点，

可得 $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ ，

故答案为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 。

- 4 已知函数 $f(x) = |\ln x|$ ， $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) + m = g(x)$ 恰有三个不相等的实数解，则 m 的取值范围是 ()。

A. $[0, \ln 2]$

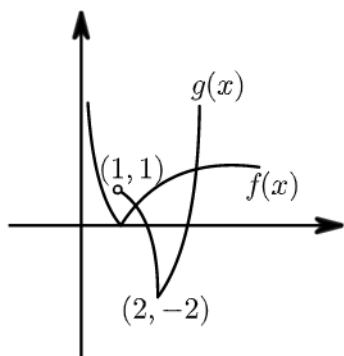
B. $(-2 - \ln 2, 0)$

C. $(-2 - \ln 2, 0]$

D. $[0, 2 + \ln 2]$

答案 C

解析 由图可知，



$f(x)$ 向下平移 $[0, 2 + \ln 2]$ 个单位有 3 个交点，

$\therefore m \in (-2 - \ln 2, 0]$ 。

故选 C。

5

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x + \frac{1}{x}, & x > 1 \\ 2x^2 - mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8}, & x \leq 1 \end{cases}$ 若 $g(x) = f(x) - m$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____.

答案

$$\left(1, \frac{7}{4}\right]$$

解析

$g(x) = f(x) - m$ 有三个零点,

$x > 1$, 函数有一个零点,

$x \leq 1$ 时, 有两个零点,

当 $x > 1$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0,$$

恒成立 $f(x) \in (1, +\infty)$, 故 $m > 1$,

当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x^2 - mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8}$,

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 8\left(\frac{5}{8} - \frac{m}{2}\right) > 0 \\ \frac{m}{4} < 1 \end{cases},$$

解得: $f(1) = 2 - m - \frac{m}{2} + \frac{5}{8} \geq 0$,

$$1 < m \leq \frac{7}{4}.$$

6

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

答案

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

解析

由函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减得 $-\frac{4a-3}{2} \geq 0$, $0 < a < 1$, $3a \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4}$,

又方程 $|f(x)| = 2 - \frac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解,

所以 $3a < 2$, $\frac{1}{a} - 1 \leq 6 \Rightarrow \frac{2}{3} > a \geq \frac{1}{3}$, 因此 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

7

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(|x^2-x|+x^2+x), & x > -1, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = k(x-1)$ 有唯一的实数解, 则 k 的取值集合为 _____.

答案 $k < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < k < 1$ 或 $k = 4$

解析 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x, & 0 < x < 1 \\ x^2, & -1 < x < 0 \text{ 或 } x \geq 1 \end{cases}$

$k(x-1)$ 过定点 $(1, 0)$.

$k < -\frac{1}{2}$ 时与中间部分有一个交点 ,

$k = 4$ 时切于一点 .

$0 < k < 1$ 时与左侧直线部分有一个交点 .

8 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \\ a|x + \frac{1}{2}| - \frac{15}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$. 函数 $g(x) = x^3$. 若方程 $g(x) = xf(x)$ 有 4 个不同实根 , 则实数 a 的取值范围为 () .

A. $(5, \frac{15}{2})$

B. $(5, \frac{15}{2}]$

C. $(-3, 5)$

D. $(3, 5)$

答案 B

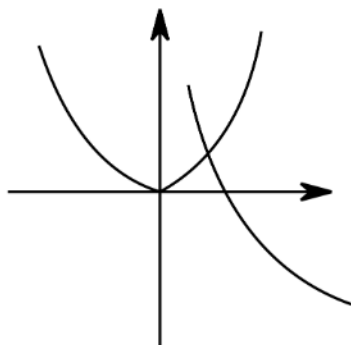
解析 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \\ a|x + \frac{1}{2}| - \frac{15}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$. $g(x) = x^3$.

$g(x) = xf(x)$ 有 4 个不同实根 .

即 $x^3 = xf(x)$, $f(x) = x^2$.

① $x > 0$ 时 , $\log_{\frac{1}{2}} x = x^2$.

如图 ,



有且只有一个交点 .

② $x = 0$ 时, $x^3 = xf(x)$, $0 = 0f(x)$.

即 $x = 0$ 为 $g(x) = xf(x)$ 的一个根.

$\therefore x$ 轴负半轴有且只有两个根.

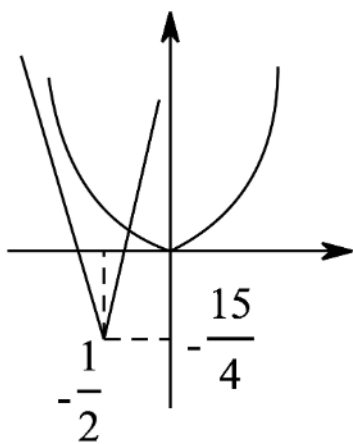
③ $x < 0$ 时, $f(x) = a\left|x + \frac{1}{2}\right| - \frac{15}{4}$.

$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) = -a\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4} = -ax - \frac{a}{2} - \frac{15}{4}$.

$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4} = ax + \frac{a}{2} - \frac{15}{4}$.

$x = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -\frac{15}{4}$, 即 $f(x)$ 过定点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$.

当 $a > 0$ 时,



① 当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 内有一个交点.

$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 内有一个交点.

即 $-ax - \frac{a}{2} - \frac{15}{4} = x^2$.

$x^2 + ax + \frac{1}{2}a + \frac{15}{4} = 0$.

$\Delta = 0$, $a^2 - 4\left(\frac{1}{2}a + \frac{15}{4}\right) = 0$.

$a^2 - 2a - 15 = 0$.

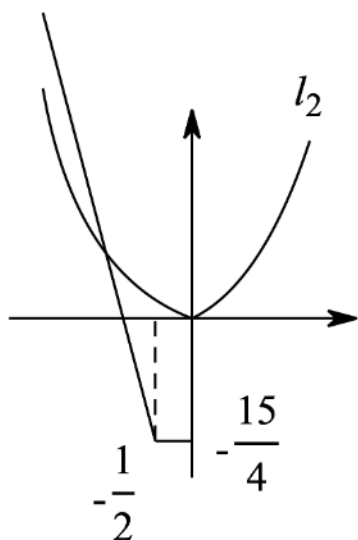
$(a + 3)(a - 5) = 0$.

$a = -3$ 或 5 .

$x = 0$ 时, $\frac{1}{2}a - \frac{15}{4} > 0$, $a > \frac{15}{2}$.

$\therefore a = 5$ 时, 与 x^2 交于第一象限, 舍去.

$a = -3$ 时, 与假设矛盾, 舍去.



②当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 内有两个交点时，

$x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 无交点。

即 $-ax - \frac{a}{2} - \frac{15}{4} = x^2$ 的 $\Delta > 0$ 。

$$\therefore a^2 - 4\left(\frac{1}{2}a + \frac{15}{4}\right) > 0.$$

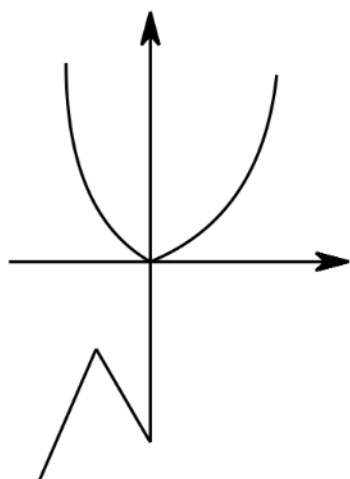
$$(a+3)(a-5) > 0.$$

$$a \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty).$$

$$x=0 \text{ 时, } \frac{1}{2}a - \frac{15}{4} \leq 0.$$

$$a \leq \frac{15}{2}.$$

$$\therefore a \in \left(5, \frac{15}{2}\right].$$



当 $a < 0$ 时，图像与 x^2 无交点，故舍去。

综上， $a \in \left(5, \frac{15}{2}\right]$ 。

故选B。



分段函数零点特征

9

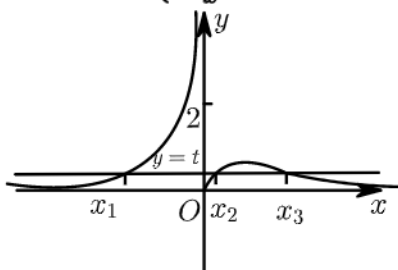
已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1}, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - t$ 有三个不同的零点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 则 $-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ 的取值范围是 _____.

答案

$(\frac{5}{2}, +\infty)$

解析

函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1}, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 图象如图,



函数 $g(x) = f(x) - t$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$,

即方程 $f(x) = t$ 有三个不同的实数根 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, 因为 $x + \frac{1}{x} \geq 2 (x > 0)$,

所以 $f(x) \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x = 1$ 时取得最大值.

当 $y = \frac{1}{2}$ 时, $x_1 = -2, x_2 = x_3 = 1$,

此时 $-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{5}{2}$,

由 $\frac{1}{x + \frac{1}{x}} = t (0 < t < \frac{1}{2})$, 可得 $x^2 - \frac{x}{t} + 1 = 0$, $\therefore x_2 + x_3 = \frac{1}{t}, x_2 \cdot x_3 = 1$,

$\therefore \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{t} > 2$,

$\therefore -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = t + \frac{1}{t}$,

$\therefore 0 < t < \frac{1}{2}$, $\therefore -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ 的取值范围是 $(\frac{5}{2}, +\infty)$.

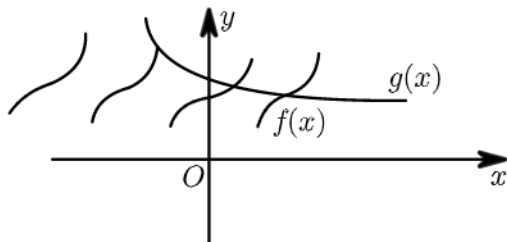
故答案为 $(\frac{5}{2}, +\infty)$.

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$ ， $g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ ，
则方程 $f(x) = g(x)$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的所有实根之和为 _____。

答案 -7

解析 由 $f(x+2) = f(x)$ ，

$\therefore T = 2$ ，画出两函数图，



观察图象可得，在区间 $[-5, 1]$ 上两函数图象有3个交点，

其中一个可由图象得 $(-3, 1)$ ，

另外两个交点，关于点 $(-2, 2)$ 对称，

故另外两个交点横坐标之和为 $-2 \times 2 = -4$ ，

则所有根之和为 $-4 - 3 = -7$ 。

11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_3 x|, & 0 < x < 3 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right), & 3 \leq x \leq 15 \end{cases}$ ，若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 ，满足 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，

且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ ，则 $\frac{(x_3 - 3)(x_4 - 3)}{x_1 x_2}$ 的取值范围是()。

A. (0, 27)

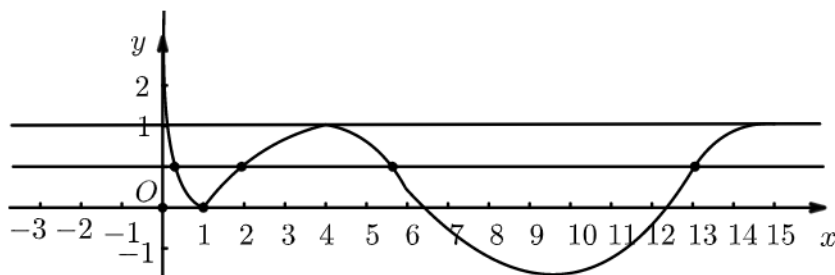
B. (0, 45)

C. (27, 45)

D. (45, 72)

答案 A

解析 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：



若满足 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$,

其中 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,

则 $0 < x_1 < 1$, $1 < x_1 < 3$,

则 $\log_3 x_1 = -\log_3 x_2$, 即 $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 x_1 x_2 = 0$,

则 $x_1 x_2 = 1$,

同时 $x_3 \in (3, 6)$, $x_4 \in (12, 15)$,

$\therefore x_3, x_4$ 关于 $x = 9$ 对称 ,

$\therefore x_3 + x_4 = 18$, 则 $x_4 = 18 - x_3$.

$$\text{则 } \frac{(x_3 - 3)(x_4 - 3)}{x_1 x_2}$$

$$= x_3 x_4 - 3(x_3 + x_4) + 9$$

$$= x_3(18 - x_3) - 45$$

$$= -x_3^2 + 18x_3 - 45$$

$$= -(x_3 - 9)^2 + 36 ,$$

$\therefore x_3 \in (3, 6)$,

$\therefore -(x_3 - 9)^2 + 36 \in (0, 27)$,

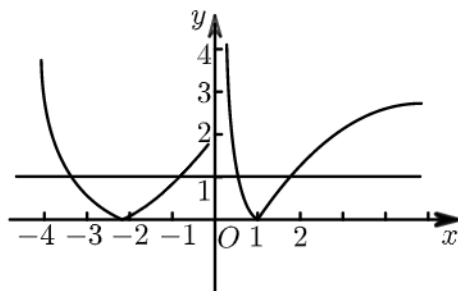
$$\text{即 } \frac{(x_3 - 3)(x_4 - 3)}{x_1 x_2} \in (0, 27) .$$

故选A .

- 12 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 ,
且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{x_4} + \frac{1}{x_3^2 x_4}$ 的取值范围是 _____ .

答案 $(-3, 3]$

解析 由题意可得 $f(x)$ 图象如下 :



由图可得 $x_1 + x_2 = -4$, $x_3 \cdot x_4 = 1$,

当 $|\log_2 x| = 2$ 时, $x = 4$ 或 $\frac{1}{4}$.

$$\text{则 } 1 < x_4 \leq 4, \frac{x_1 + x_2}{x_4} + \frac{1}{x_3^2 x_4} = \frac{-4}{x_4} + \frac{1}{x_3} = \frac{-4}{x_4} + x_4,$$

在 $1 < x_4 \leq 4$ 上是增函数.

$$\text{故 } -4 + 1 < \frac{-4}{x_4} + x_4 \leq -1 + 4.$$

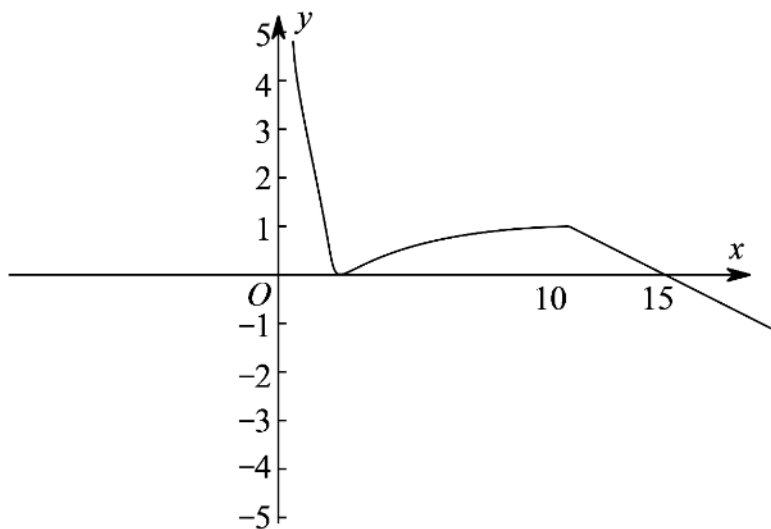
$$\text{即 } -3 < \frac{-4}{x_4} + x_4 \leq 3.$$

故答案为: $(-3, 3]$.

- 13 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{5}x + 3, & x > 10 \end{cases}$, 若 a, b, c 均不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是 _____.

答案 (10, 15)

解析 作出函数 $f(x)$ 的图象如图,



不妨设 $a < b < c$, 则

$$\because f(a) = f(b) = f(c),$$

$$\therefore -\lg a = \lg b = -\frac{1}{5}c + 3 \in (0, 1),$$

$$\therefore ab = 1, c \in (10, 15),$$

$$\therefore abc = c \in (10, 15).$$

故答案为: $(10, 15)$.

2. 复合函数的零点



利用零点信息求解参数取值范围

14 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{|x|}$ ，关于 x 的方程 $f^2(x) - 2af(x) + a - 1 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 有 3 个相异的实数根，则 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(\frac{e^2 - 1}{2e - 1}, +\infty\right)$
- B. $\left(-\infty, \frac{e^2 - 1}{2e - 1}\right)$
- C. $\left(0, \frac{e^2 - 1}{2e - 1}\right)$
- D. $\left\{\frac{e^2 - 1}{2e - 1}\right\}$

答案 D

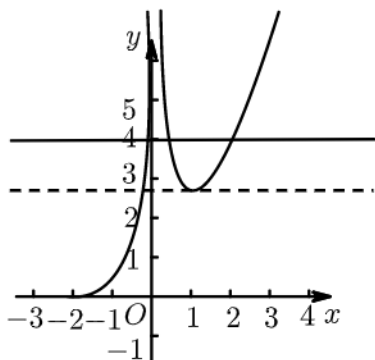
解析 当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ，函数的导数 $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$ ，

当 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ，则当 $x = 1$ 时 函数取得极小值 $f(1) = e$ ，

当 $x < 0$ 时， $f(x) = -\frac{e^x}{x}$ ，函数的导数 $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = -\frac{e^x(x - 1)}{x^2}$ ，此时 $f'(x) > 0$ 恒成立，

此时函数为增函数，

作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



设 $t = f(x)$ ，则 $t > e$ 时， $t = f(x)$ 有 3 个根，

当 $t = e$ 时， $t = f(x)$ 有 2 个根，

当 $0 < t < e$ 时， $t = f(x)$ 有 1 个根，

当 $t \leq 0$ 时， $t = f(x)$ 有 0 个根，

则 $f^2(x) - 2af(x) + a - 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 有三个相异的实数根，

等价于 $t^2 - 2at + a - 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 有 2 个相异的实数根，

其中 $0 < t < e, t = e$ ，

当 $t = e$ 时， $e^2 - 2ae + a - 1 = 0$ ，

$$\text{即 } a = \frac{e^2 - 1}{2e - 1},$$

此时满足条件。

故选 D。

15 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$ ，若方程 $f^2(x) + bf(x) + \frac{1}{4} = 0$ 有六个相异实根，则实数 b 的取值范围 ()。

A. $(-2, 0)$

B. $(-2, -1)$

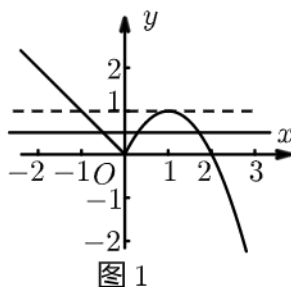
C. $(-\frac{5}{4}, 0)$

D. $(-\frac{5}{4}, -1)$

答案 D

解析 令 $t = f(x)$ ，则原函数方程等价于 $t^2 + bt + \frac{1}{4} = 0$ 。

作出函数 $f(x)$ 的图象如图 1，



图象可知当 $0 < t < 1$ 时，函数 $t = f(x)$ 有 3 个交点。

所以要使 $f^2(x) + bf(x) + \frac{1}{4} = 0$ 有六个相异实根，

则等价于有两个根 t_1, t_2 ，

且 $0 < t_1 < 1, 0 < t_2 < 1$ 。

$$\text{令 } g(t) = t^2 + bt + \frac{1}{4},$$

则由根的分布 (如图 2)，

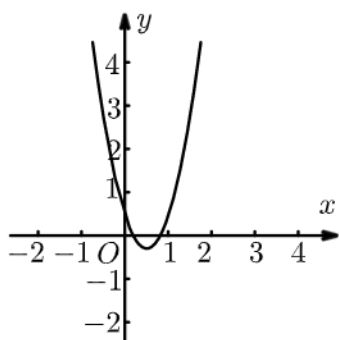


图 2

$$\text{可得} \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) = \frac{1}{4} > 0 \\ f(1) = 1 + b + \frac{1}{4} > 0 \\ 0 < -\frac{b}{2} < 1 \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} b^2 - 1 > 0 \\ b > -\frac{5}{4} \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} -2 < b < 0 \\ b > 1 \text{ 或 } b < -1 \\ b > -\frac{5}{4} \\ -2 < b < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} -\frac{5}{4} < b < -1,$$

则实数 b 的取值范围是 $(-\frac{5}{4}, -1)$.

故选 D.

16 已知函数 $f(x) = |\log_2 |x - 1||$, 且关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + af(x) + 2b = 0$ 有 6 个不同的实数解, 若最小的实数解为 -1 , 则 $a + b$ 的值为 ().

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

答案 B

解析 作出函数 $f(x) = |\log_2 |x - 1||$ 的图象,

$\because$ 方程 $[f(x)]^2 + af(x) + 2b = 0$ 有 6 个不同的实数解,

$\therefore$ 如图所示: 令 $t = f(x)$,

方程 $[f(x)]^2 + af(x) + 2b = 0$ 转化为: $t^2 + at + 2b = 0$.

则方程有一零根和一正根,

又 $\because$ 最小的实数解为 -1 ,

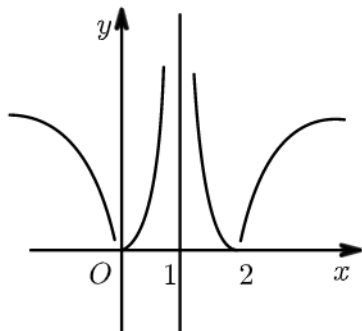
由 $f(-1) = 1$,

$\therefore$ 方程 : $t^2 + at + 2b = 0$ 的两根是 0 和 1 ,

由韦达定理得 : $a = -1$, $b = 0$,

$\therefore a + b = -1$.

故选 B .



17 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^{x+1}}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) - 1 + m = 0$ 恰有 3 个不同的实数解 , 则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

B. $\left(1 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$

C. $\left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$

D. $(1, e)$

答案 C

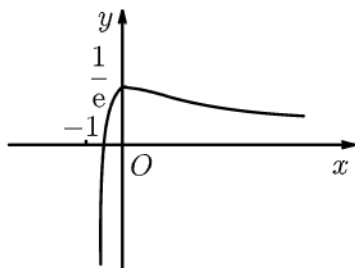
解析 $f'(x) = \frac{-x}{e^{x+1}}$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时 , $f'(x) < 0$, 当 $x < 0$ 时 , $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 , 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增 .

$\therefore f_{\max}(x) = f(0) = \frac{1}{e}$.

作出 $f(x)$ 的大致函数图象如下 :



由图象可知当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时 , $f(x) = k$ 有两解 ,

当 $k \leq 0$ 或 $k = \frac{1}{e}$ 时, $f(x) = k$ 有一解, 当 $k > \frac{1}{e}$ 时, $f(x) = k$ 无解.

令 $g(x) = x^2 + mx - 1 + m$, 则 $g(f(x))$ 有三个零点,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上有一个零点, 在 $(-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e}\}$ 上有一个零点.

$\therefore g(x)$ 的图象开口向上, 且 $g(0) = -1$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上必有一个零点,

当 $x = \frac{1}{e}$ 时, 代入 $x^2 + mx - 1 + m = 0$, 可得 $m = 1 - \frac{1}{e}$, 此时 $x^2 - (1 - \frac{1}{e})x - \frac{1}{e} = 0$,

$\Rightarrow x = \frac{1}{e}, -1$, 不符合题意.

当 $x = 0$ 时, 代入 $x^2 + mx - 1 + m = 0$, 可得 $m = 1$, 此时 $x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0, -1$ 不符合题意.

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上有一个零点, 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点.

$\therefore g(\frac{1}{e}) > 0, g(0) < 0$, 即 $\frac{1}{e^2} + \frac{m}{e} - 1 + m > 0, -1 + m < 0$,

解得 $1 - \frac{1}{e} < m < 1$.

故选 C.

18 设函数 $f(x) = 1 - |2x - 1|, x \in [0, 1]$. 函数 $g(x) = f(f(x)) - ax$ 有 4 个零点. 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $(0, \frac{4}{3})$

解析 ① 当 $x \in [0, \frac{1}{2})$ 时,

$$f(x) = 1 + 2x - 1 = 2x,$$

$$\therefore f(f(x)) = 1 - |4x - 1|,$$

$$\text{当 } x \in [0, \frac{1}{4}) \text{ 时, } f(f(x)) = 4x,$$

$$\text{当 } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \text{ 时, } f(f(x)) = 2 - 4x,$$

② 当 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时,

$$f(x) = 1 - (2x - 1) = 2 - 2x,$$

$$\therefore f(f(x)) = 1 - |3 - 4x|,$$

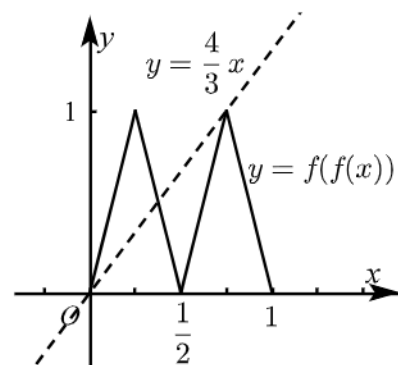
$$x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \text{ 时, } f(f(x)) = 4x - 2,$$

$x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ 时, $f(f(x)) = 4 - 4x$,

令 $h(x) = ax$,

$\therefore g(x)$ 的零点个数等价于 $f(f(x))$ 和 $h(x)$ 的交点个数,

如图示:



$\therefore 0 < a < \frac{4}{3}$,

故答案为: $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

- 19 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, $f(x) = \begin{cases} 5^{|x-1|} - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 4, & x < 0 \end{cases}$, 关于 x 的方程 $f^2(x) - (2m+1)f(x) + m^2 = 0$ 有 7 个不同的实数解, 则 m 的值为().

A. 2

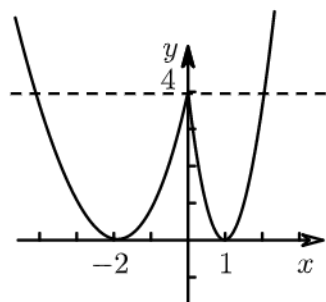
B. 6

C. 2或6

D. -2或-6

答案 A

解析 设 $f(x) = t$, 作出函数 $f(x)$ 的图象, 由图象可知,



当 $t > 4$ 时, 函数图象有两个交点,

当 $t = 4$ 时, 函数图象有 3 个交点,

当 $0 < t < 4$ 时, 函数图象有 4 个交点,

当 $t = 0$ 时, 函数图象有两个交点,

当 $t < 0$, 函数图象无交点.

要使原方程 $f^2(x) - (2m+1)f(x) + m^2 = 0$ 有7个不同的实数根，

则要求对应方程 $t^2 - (2m+1)t + m^2 = 0$ 中的两个根 $t_1 = 4$ 或 $0 < t_2 < 4$ ，

且 $t_1 + t_2 \in (4, 8)$ ，即 $4 < 2m+1 < 8$ ，解得 $\frac{3}{2} < m < \frac{7}{2}$ 。

当 $t = 4$ 时，它有三个根。

$$\therefore 4^2 - 4(2m+1) + m^2 = 0,$$

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } m = 6 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore m = 2.$$

故选：A。

20 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0 \\ x^2 + 4x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f^2(x) - bf(x) + c = 0 (b, c \in \mathbf{R})$ 有8个不同的实数根，则 $b+c$ 的取值范围为 ()。

A. $(-\infty, 3)$

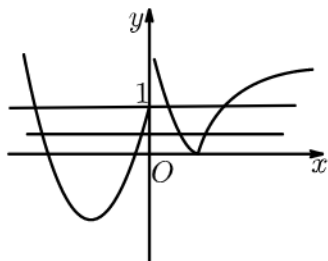
B. $(0, 3]$

C. $[0, 3]$

D. $(0, 3)$

答案 D

解析 根据题意作出 $f(x)$ 的简图：



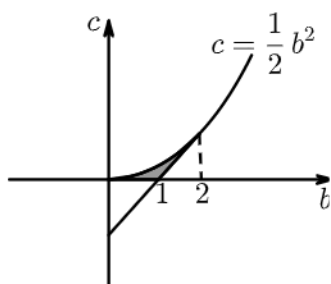
由图象可得当 $f(x) \in (0, 1]$ 时，有四个不同的 x 与 $f(x)$ 对应，再结合题中“方程

$f^2(x) - bf(x) + c = 0$ 有8个不同实数解”，

可以分解为形如关于 k 的方程 $k^2 - bk + c = 0$ 有两个不同的实数根 K_1, K_2 ，且 K_1 和 K_2 均为大于0且小于等于1的实数。

$$\text{列式如下：} \begin{cases} b^2 - 4c > 0 \\ 0 < \frac{b}{2} < 1 \\ 0^2 - b \times 0 + c > 0 \\ 1^2 - b + c \geq 0 \end{cases}, \text{化简得} \begin{cases} c < \frac{b^2}{4} \\ 1 - b + c \geq 0 \\ c > 0 \\ 0 < b < 2 \end{cases}$$

此不等式组表示的区域如图：



令 $z = b + c$ ，则 $z = b + c$ 在 $(2, 1)$ 处 $z = 3$ ，在 $(0, 0)$ 处 $z = 0$ ，

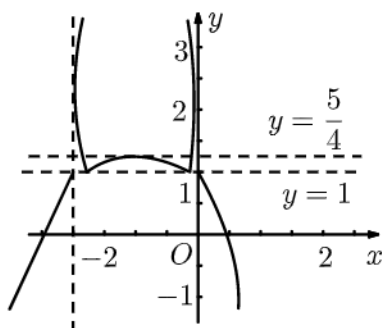
所以 $b + c$ 的取值范围为 $(0, 3)$ 。

故选 D。

- 21 已知函数 $f(x) = -x^2 - 2x$ ， $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若方程 $g[f(x)] - a = 0$ 的实数根的个数有 4 个，则 a 的取值范围是 _____。

答案 $\left[1, \frac{5}{4}\right)$

解析 由题意可得函数 $y = g[f(x)]$ 与函数 $y = a$ 有 4 个交点，如图所示：



结合图象可得 $1 \leq a < \frac{5}{4}$ ，

故答案为： $\left[1, \frac{5}{4}\right)$ 。

- 22 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，当 $x > 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}f(x-1), & x > 1, \end{cases}$ ，则关于 x 的方程

$6[f(x)]^2 - f(x) - 1 = 0$ 的实根的个数为 ()。

A. 6

B. 7

C. 8

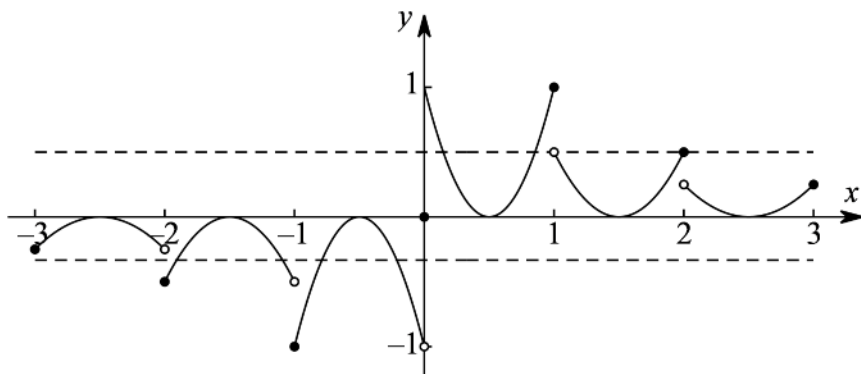
D. 9

答案 B

解析 $6[f(x)]^2 - f(x) - 1 = 0$.

$$f(x)_1 = \frac{1}{2}, f(x)_2 = -\frac{1}{3}.$$

数形结合如下图所示：



如图所示，当 $x > 0$ 时，有 3 个交点。

当 $x < 0$ 时，有 4 个交点。

因此实根个数为 7 个。

23 已知直线 $x - y = 0$ 是函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x}$ 图象的一条切线，且关于 x 的方程 $f(f(x)) = t$ 恰有一个实数解，则 ()。

A. $t \in \{e \ln 2\}$

B. $t \in [0, e \ln 2]$

C. $t \in [0, 2]$

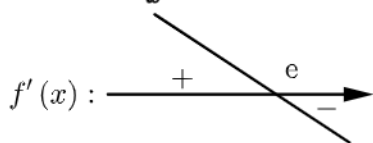
D. $t \in (-\infty, 0]$

答案 A

解析 $f(x) = \frac{a \ln x}{x}$ 导数为 $f'(x) = \frac{a(1 - \ln x)}{x^2}$ ，
取切点 (m, n) ，则 $n = \frac{a \ln m}{m}$ ， $m = n$ ， $\frac{a(1 - \ln m)}{m^2} = 1$ ，

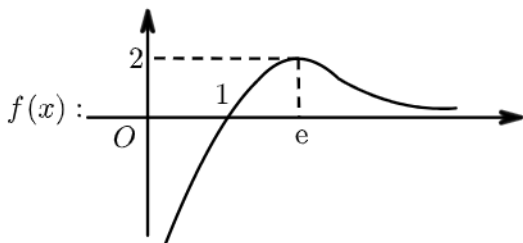
$$\therefore m = \sqrt{e}, a = 2e,$$

$$\therefore f(x) = \frac{2e \ln x}{x}, f'(x) = \frac{2e(1 - \ln x)}{x^2},$$

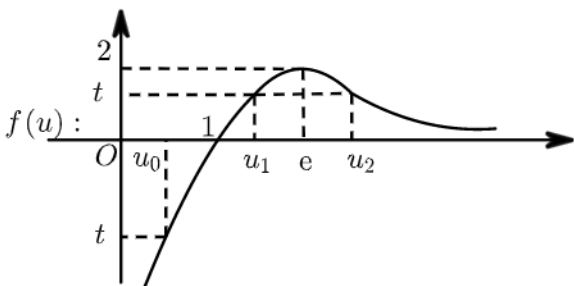


函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增， $(e, +\infty)$ 上单调递减， $f(e) = 2$ 为极大值，

$x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0^+$ 时 $f(x) \rightarrow -\infty$, $f(1) = 0$,



$f(f(x)) = t$, 令 $f(x) = u$, 则 $f(u) = t$,



①当 $t \leq 0$ 时, $f(u) = t$ 只有一解 u_0 且 $0 < u_0 \leq 1$,

此时 $f(x) = u_0$ 有两解, 舍去,

②当 $0 < t < 2$ 时, $f(u) = t$ 有两解 u_1, u_2 且 $1 < u_1 < e < u_2$,

此时 $f(x) = u_2$ 无解, 故而 $f(x) = u_1$ 只有一解,

此时 $u_1 = 2$, 故而 $t = f(u_1) = f(2) = \frac{2e \ln 2}{2} = e \ln 2$,

③当 $t \geq 2$ 时, 显然不符, 舍去,

综上所述, $t = e \ln 2$.

故选 A.



复合函数零点特征

24 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} \ln|x-4| & (x \neq 4) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$, 若关于的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 5 个不同的实根, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , 则 $f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案

$\ln 16$

解析

当 $x = 4$ 时, $f(x) = 1$, 则由 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 得 $1 + b + c = 0$,

$\therefore x_1 = 4, c = -b - 1$,

当 $x > 4$ 时, $f(x) = \ln(x - 4)$,

$$\text{由 } f^2(x) + bf(x) + c = 0 ,$$

$$\text{得 } [\ln(x-4)]x^2 + b\ln(x-4) - b - 1 = 0 ,$$

$$\text{解得 } \ln(x-4) = 1 , x_2 = 14 \text{ 或 } \ln(x-4) = b , x_3 = 4 + 10^b ,$$

$$\text{当 } x < 4 \text{ 时 } , f(x) = \ln(4-x) ,$$

$$\text{由 } f^2(x) + bf(x) + c = 0 , \text{ 得 } [\ln(4-x)]x^2 + b\ln(4-x) - b - 1 = 0 ,$$

$$\text{解得 } \ln(4-x) = 1 , x_4 = -6 \text{ 或 } \ln(4-x) = b , x_5 = 4 - 10^b ,$$

$$\therefore f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = f(4 + 14 + 4 + 10^b - 6 + 4 - 10^b) = f(20) = \ln|20 - 4| = \ln 16 .$$

故答案是： $\ln 16$.