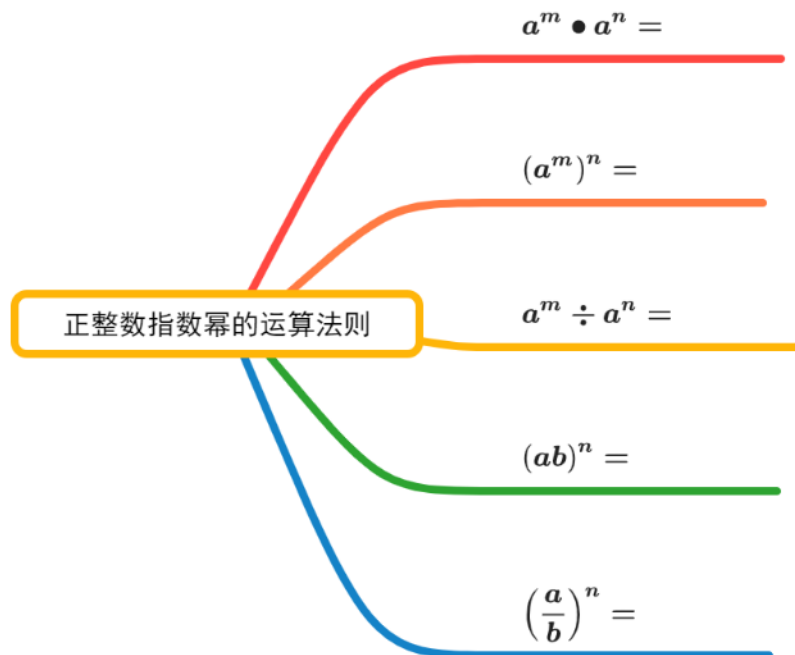


01：指数函数与对数函数

1. 指数运算及指数函数



指数函数运算法则

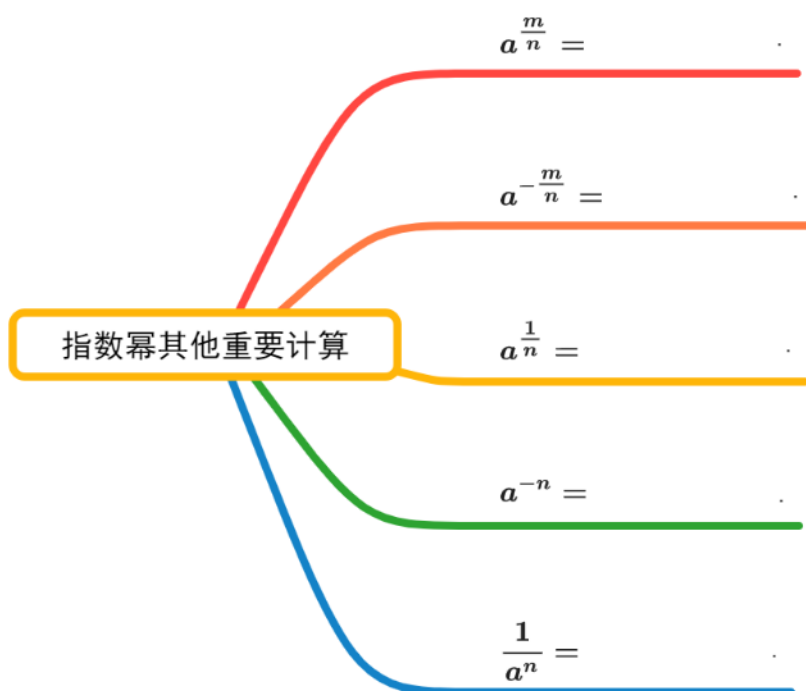


教法备注

【仅教师可见】正整数指数幂的运算法则：

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; ② $(a^m)^n = a^{mn}$;

③ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($m > n, a \neq 0$) ; ④ $(ab)^n = a^n b^n$; ⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.



教法备注

【仅教师可见】指数幂的其他运算：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} & \textcircled{2} a^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} & \textcircled{3} a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} & \textcircled{4} a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ \textcircled{5} \frac{1}{a^n} &= \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (\text{常见于等比数列求和, 错位相减求和部分}) \end{aligned}$$

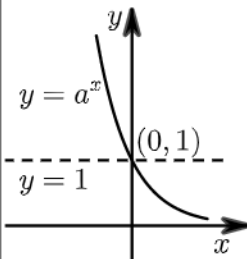
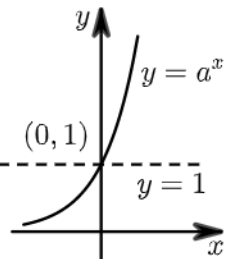


指数函数的图像



		$0 < a < 1$	$a > 1$
图象			
性质	定义域	$\mathbf{R}$	
	值域	$\mathbf{(0, +\infty)}$	
	过定点	图象过定点 $\mathbf{(0,1)}$	
	单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是 $\mathbf{减}$ 函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是 $\mathbf{增}$ 函数
	函数值的变化范围	当 $x < 0$ 时, $\mathbf{y > 1}$	当 $x < 0$ 时, $\mathbf{1 > y > 0}$
		当 $x = 0$ 时, $\mathbf{y = 1}$	当 $x = 0$ 时, $\mathbf{y = 1}$
		当 $x > 0$ 时, $\mathbf{1 > y > 0}$	当 $x > 0$ 时, $\mathbf{y > 1}$

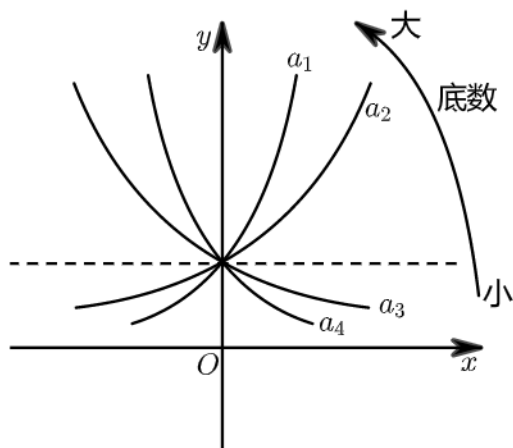
教法备注

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		

备注：由于挖空格式限制， $0 < y < 1$ 的顺序请老师自行调整（孩子没办法了）

 底数对指数函数的影响

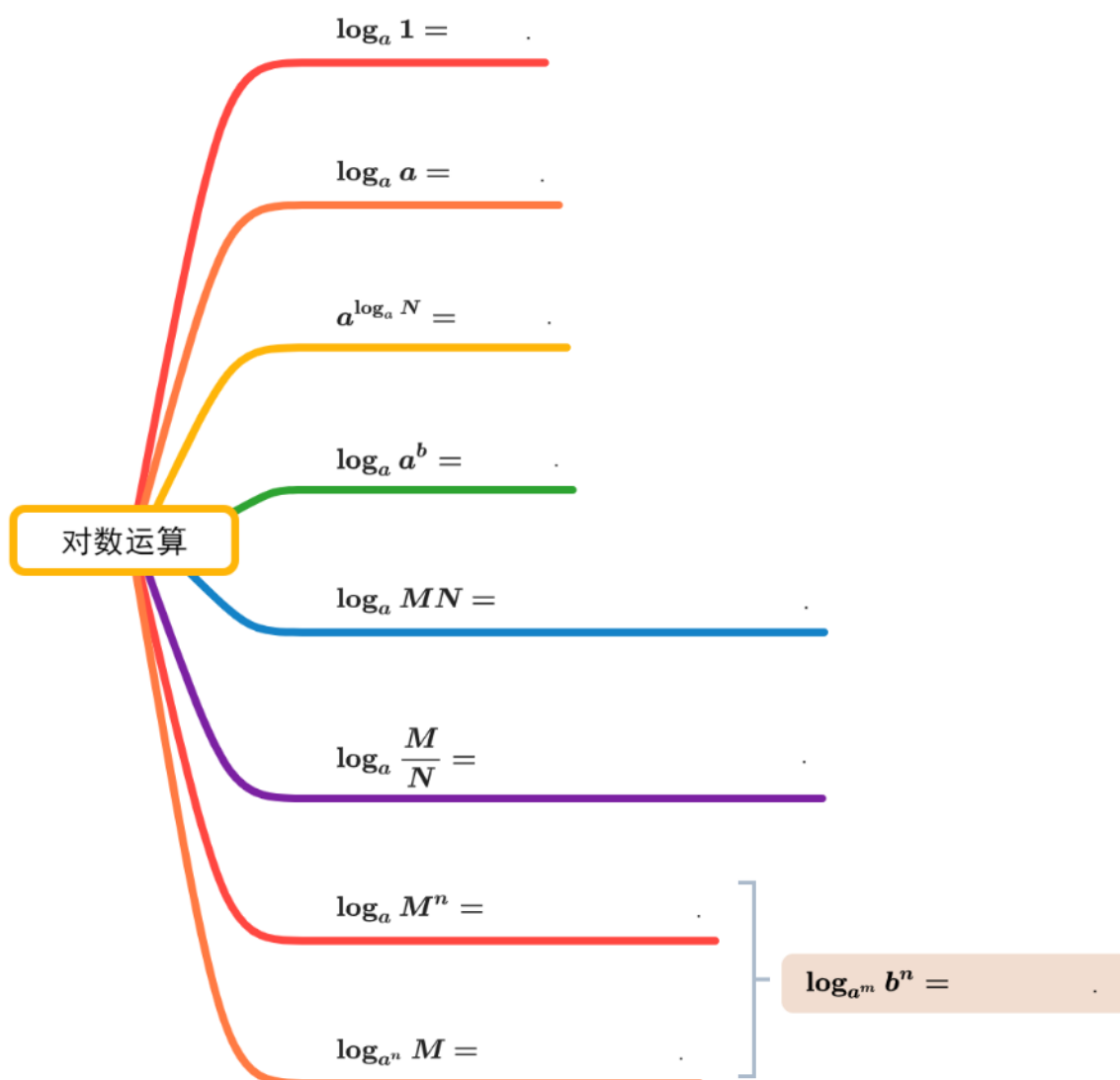
底数对函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)图象的影响如图($a_1 > a_2 > a_3 > a_4$).在第一象限具有“**底大图高**”的特征.



2. 对数运算及对数函数



对数运算法则



【仅教师可见】对数运算：

- ① 0 ② 1 ③ N ④ b ⑤ $\log_a M + \log_a N$ ⑥ $\log_a M - \log_a N$
 ⑦ $n \log_a M$ ⑧ $\frac{1}{n} \log_a M$ ⑨ $\frac{n}{m} \log_a b$

对数函数的图像

		$0 < a < 1$	$a > 1$
图象			
性质	定义域	$(0, +\infty)$	
	值域	$\mathbf{R}$	
	过定点	$(1, 0)$	
	单调性	在 $(0, +\infty)$ 上是 减 函数	在 $(0, +\infty)$ 上是 增 函数
	函数值的变化范围	当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$	当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$
		当 $x = 1$ 时, $y = 0$	当 $x = 1$ 时, $y = 0$
		当 $x > 1$ 时, $y < 0$	当 $x > 1$ 时, $y > 0$

教法备注

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		

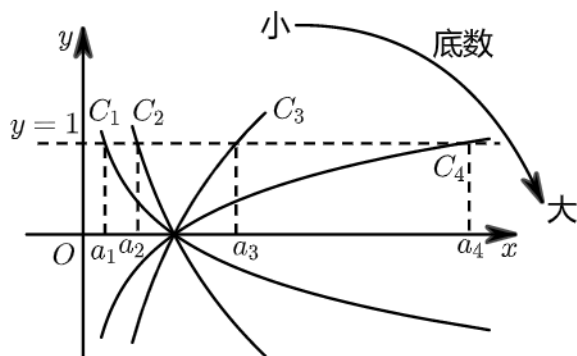


底数对对数函数的影响

当 $x > 1$ 时“**底大图低**”，即若 $a > b$ ，则 $y_1 < y_2$ ；

当 $0 < x < 1$ 时“**底大图高**”，即若 $a > b$ ，则 $y_1 > y_2$ 。

这一性质可通过下图帮助理解，其中， C_1, C_2, C_3, C_4 分别是函数 $y = \log_{a_1} x$ ， $y = \log_{a_2} x$ ， $y = \log_{a_3} x$ ， $y = \log_{a_4} x$ 的图象，则必有 $a_4 > a_3 > 1 > a_2 > a_1 > 0$ 。



常见题型

3. 指对数的运算

1 2019~2020学年广东广州天河区华南师范大学附属中学高一上学期期中第5题3分

函数 $y = 3 + \log_a(3x - 2)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过定点 () .

A. $(0, \frac{11}{3})$

B. $(1, 0)$

C. $(1, 3)$

D. $(\frac{2}{3}, 3)$

答案 C

解析 函数 $y = 3 + \log_a(3x - 2)$ 上，

当 $3x - 2 = 1$ ，即 $x = 1$ 时， $y = 3 + 0 = 3$ ，

故函数图象必过定点 $(1, 3)$.

故选C .

2 2017~2018学年天津高一上学期期中第11题4分

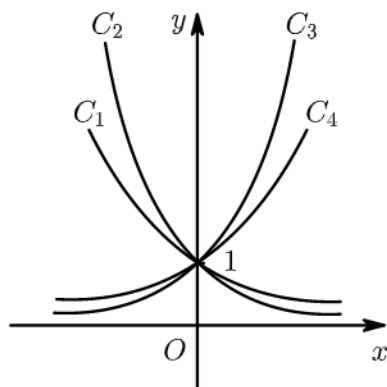
若 $2^a = 5^b = 10$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ _____ .

答案 1

解析 $2^a = 5^b = 10$,
 $\therefore a = \log_2 10 = \frac{\lg 10}{\lg 2} = \frac{1}{\lg 2}$.
 $b = \log_5 10 = \frac{\lg 10}{\lg 5} = \frac{1}{\lg 5}$.
 $\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \lg 2 + \lg 5 = 1$.

4. 判断函数图像

3 曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 分别是指数函数 $y_1 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$, $y_2 = 0.9^x$, $y_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$, $y_4 = 1.7^x$ 的图象, 则 C_1, C_2, C_3, C_4 分别代表哪个指数函数 _____ .



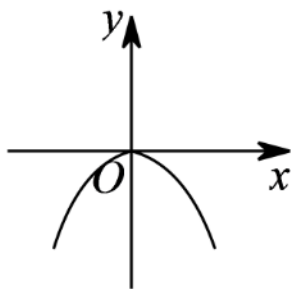
答案 $C_1: y_1 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$, $C_2: y_2 = 0.9^x$, $C_3: y_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$, $C_4: y_4 = 1.7^x$

解析 令 $x = 1$, 则纵坐标为底数, 从上到下依次为 $1.7, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{\pi}, 0.9$.

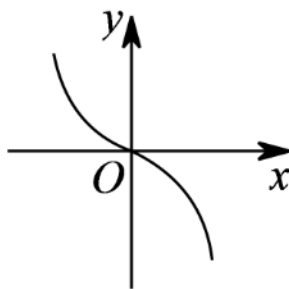
4 2017~2018学年福建莆田仙游县仙游一中高三上学期期中第3题5分

函数 $f(x) = 1 - e^{|x|}$ 的图象大致是 () .

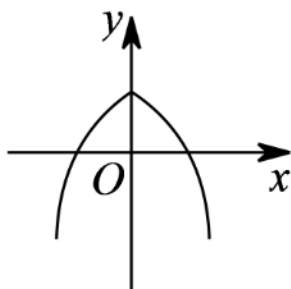
A.



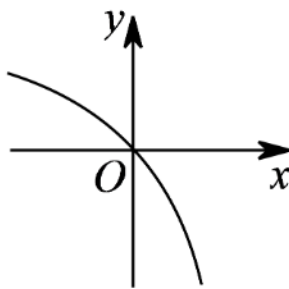
B.



C.



D.



答案 A

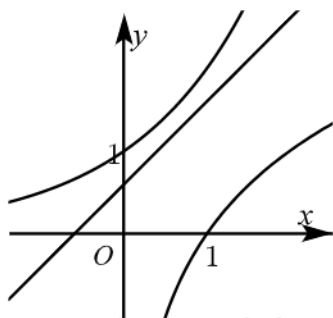
解析 将函数解析式与图象对比分析，因为函数 $f(x) = 1 - e^{|x|}$ 是偶函数，且值域是 $(-\infty, 0]$ ，只有A满足上述两个性质。

故选A。

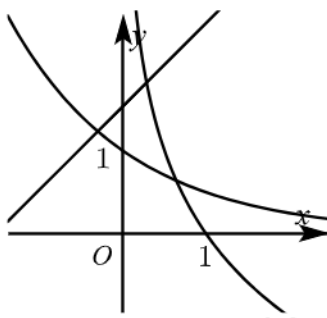
5 2017~2018学年福建厦门集美区集美中学高一上学期期中第4题5分

在同一坐标系中画出函数 $y = \log_a x$ ， $y = a^x$ ， $y = x + a$ 的图象，可能正确的是（ ）。

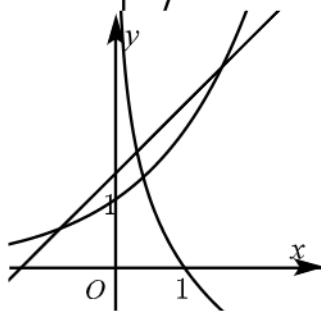
A.



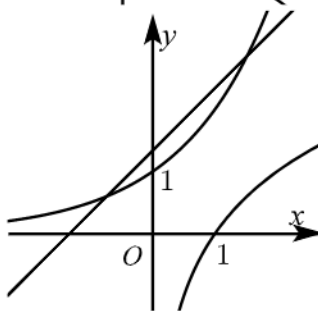
B.



C.



D.



答案 D

解析 A中 $y = \log_a x$ 、 $y = a^x$ 都单调递增，故 $a > 1$ ，

但是 $y = x + a$ 中 $0 < a < 1$ ，矛盾．排除A．

B中 $y = \log_a x$ 、 $y = a^x$ 都单调递减，故 $0 < a < 1$ ，

但是 $y = x + a$ 中 $a > 1$ ，矛盾．排除B．

C中 $y = \log_a x$ 单调递减，故 $0 < a < 1$ ，

$y = a^x$ 单调递增，故 $a > 1$ ，矛盾．排除C．

故选D．

5. 比较大小



指对数比较大小

6 2018~2019学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第5题5分

设 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$ ， $b = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$ ， $c = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$ ，则 a, b, c 的大小关系是()．

A. $b > c > a$

B. $a > b > c$

C. $c > a > b$

D. $a > c > b$

答案 D

解析 $y = a^x$ 中，底数 $0 < a < 1$ ，单调递减，

$\therefore \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}} < \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$ ，即 $b < c$ ，

指数部分相同，底数不同，

利用图象可知 $a > c$ ．

故选D．

7 2016年安徽淮南高三一模理科第6题5分

设 $a = \log_3 2$ ， $b = \log_5 2$ ， $c = \log_2 3$ ，则()．

A. $a > c > b$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

教法备注

一般我们进行指对数比较大小时，都是与 **0, 1** 进行比较；

此题 a, b 均属于 $(0, 1)$ 内，故而可再与 $\frac{1}{2}$ 进行比较。

【备注】此处可以给学生简单扩展一下**零点存在性定理**的知识balabalabala...

当然如果有**简单的例子**就更好啦~

答案 C

解析 由题意可知： $a = \log_3 2 \in (0, 1)$ ， $b = \log_5 2 \in (0, 1)$ ， $c = \log_2 3 > 1$ ，

$$\text{所以 } a = \log_3 2, b = \log_5 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 5} < \log_3 2,$$

所以 $c > a > b$ 。

故选C。

8 2019~2020学年9月北京西城区北京师范大学附属实验中学高三上学期月考第4题5分

已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $b = \log_2 3$ ， $c = \log_4 7$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()。

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $a < c < b$

教法备注

$$c = \log_4 7 = \log_{2^2} 7 = \frac{1}{2} \log_2 7 = \log_2 \sqrt{7} < \log_2 3 = b$$

答案 D

解析 $\because a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $b = \log_2 3$ ， $c = \log_4 7$ ，

$$\therefore 0 < a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$$

$$b = \log_2 3 = \log_4 9 > c = \log_4 7 > \log_4 4 = 1,$$

$\therefore a, b, c$ 的大小关系为 $a < c < b$ 。

故选D。

9 2017~2018学年12月湖北宜昌西陵区金东方高级中学高一上学期月考第9题5分

设 $a = 4^{0.8}$, $b = 8^{0.46}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

答案 A

解析 $a = 4^{0.8} = 2^{1.6}$, $b = 8^{0.46} = 2^{1.38}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.2} = 2^{1.2}$,

根据函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

而 $1.2 < 1.38 < 1.6$,

$\therefore 2^{1.2} < 2^{1.38} < 2^{1.6}$, 即 $c < b < a$.

故选 A.

结合奇偶性、单调性比较大小

10 2018年天津河北区高三一模理科第7题5分

已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 设 $a = 3^{0.3} \cdot f(3^{0.3})$, $b = (\log_{\pi} 3) \cdot f(\log_{\pi} 3)$,

$c = \left(\log_3 \frac{1}{9}\right) \cdot f\left(\log_3 \frac{1}{9}\right)$, 则 a, b, c 之间的大小关系为 () .

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

答案 A

解析 设 $g(x) = xf(x)$,

则 $g'(x) = f(x) + xf'(x) < 0 (x < 0)$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $g(x) = xf(x)$ 为减函数,

又 $g(x)$ 为偶函数,

$\therefore x > 0$ 时, $g(x)$ 为增函数,

$\therefore 1 < 3^{0.3} < 2$, $0 < \log_{\pi} 3 < 1$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$,

$\therefore g(-2) > g(3^{0.3}) > g(\log_{\pi} 3)$,

即 $c > a > b$.

故选A .

11 2017~2018学年河北唐山路北区唐山开滦第一中学高三上学期期中理科第10题5分

已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $g(x) = xf(x)$. 若 $a = g(-\log_2 5.1)$, $b = g(2^{0.8})$, $c = g(3)$, 则 a , b , c 的大小关系为 () .

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

答案 C

解析 因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 又 $g(x) = xf(x)$, 则 $g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 又 $g'(x) = f(x) + xf'(x) \geq 0$, $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 则 $g(x)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $0 < 2^{0.8} < 2 < \log_2 5.1 < 3$, 则 $g(2^{0.8}) < g(\log_2 5.1) = g(-\log_2 5.1) < g(3)$, 即 $b < a < c$.
故选C .

12 2017~2018学年10月北京朝阳区北京陈经纶中学高三上学期月考理科第8题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(\log_2 5)$, $c = f(2m)$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为 () .

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

答案 C

解析 由 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ 是偶函数, 得 $m = 0$,
则 $f(x) = 2^{|x|} - 1$.
当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = 2^x - 1$ 递增,
又 $a = f(\log_{0.5} 3) = f(|\log_{0.5} 3|) = f(\log_2 3)$, $c = f(0)$,
且 $0 < \log_2 3 < \log_2 5$,
则 $f(0) < f(\log_2 3) < f(\log_2 5)$,

即 $c < a < b$.

故选C .

13 2018年天津南开区高三一模文科第5题5分

已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[1-3m, 2m]$ 上的偶函数, 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增, 若

$a = f(m)$, $b = f(2^{-0.4})$, $c = f\left(\log_4 \frac{1}{5}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系是 () .

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $c > a > b$

答案 D

解析 $\because$ 若 $f(x)$ 在 $[1-3m, 2m]$ 上为偶函数,

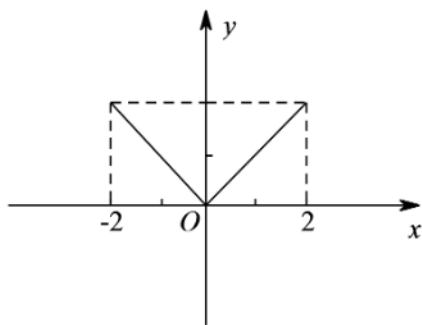
则 $2m = -(1-3m)$, $\therefore m = 1$,

则定义域为 $[-2, 2]$,

$\because$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单增,

$\therefore x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x)$ 单减,

$\therefore f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 图像大致为:



$\because m = 1$, $\therefore a = f(1)$,

又 $\because b = f(2^{-0.4})$,

$\because 2^{-0.4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.4} < 1$,

$\therefore b = f(2^{-0.4}) < f(1)$, $\therefore a > b$,

又 $\because c = f\left(\log_4 \frac{1}{5}\right)$,

$\log_4 \frac{1}{5} = -\log_4 5$,

$\therefore c = f(-\log_4 5) = f(\log_4 5)$,

$\because 1 < \log_4 5 < 2, \therefore f(\log_4 5) > f(1),$

$\therefore c > a > b,$

故选D.

精进不休 日新月异

14 2020~2021学年12月山西太原杏花岭区山西省实验中学高一上学期月考第8题4分

已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $a = f(2^{0.3})$, $b = f(0.2^{0.3})$, $c = f(\log_{0.3} 2)$,

则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $b < a < c$

B. $c < b < a$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

答案 B

解析 由指数函数和对数函数的性质可知: $2^{0.3} > 1$, $0.2^{0.3} \in (0, 1)$, $\log_{0.3} 2 < 0$,

$\therefore \log_{0.3} 2 < 0.2^{0.3} < 2^{0.3},$

又 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$, 易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$\therefore f(\log_{0.3} 2) < f(0.2^{0.3}) < f(2^{0.3})$, 即 $c < b < a$.

故选B.

结合对称性、单调性比较大小

15 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟(3月)第6题

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 令 $a = \ln 2$,

$b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 2$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系为 ().

A. $f(b) < f(c) < f(a)$

B. $f(a) < f(c) < f(b)$

C. $f(c) < f(b) < f(a)$

D. $f(c) < f(a) < f(b)$

答案 C

解析 $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且满足 $f(x+2) = -f(x)$,

$$\therefore f(x+2) = f(-x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称;

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 是减函数,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为增函数, 且 $f(2) = f(0) = 0$,

由题知 $c = -1, b = 2, 0 < a < 1$,

$$\therefore f(c) < f(b) < f(a).$$

故选 C.

16 2018~2019 学年 5 月天津静海区静海区第一中学高二下学期月考第 3 题 4 分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x) = f(3+x)$, 且对任意 $x_1, x_2 \in (0, 3)$ 都有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \text{ 若 } a = 2^{-\sqrt{3}}, b = \log_2 3, c = e^{\ln 4}, \text{ 则下面结论正确的是 () .}$$

A. $f(a) < f(b) < f(c)$

B. $f(c) < f(a) < f(b)$

C. $f(c) < f(b) < f(a)$

D. $f(a) < f(c) < f(b)$

答案 C

解析 根据题意, 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x) = f(3+x)$,

则函数 $f(x)$ 关于直线 $x=3$ 对称,

$$c = e^{\ln 4} = 4, f(c) = f(4) = f(2),$$

$$\text{又由对任意 } x_1, x_2 \in (0, 3) \text{ 都有 } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0,$$

则函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上为减函数,

$$\text{若 } a = 2^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{2^{\sqrt{3}}}, b = \log_2 3, \text{ 则有 } 0 < a < 1 < b < 2,$$

$$\text{则 } f(c) < f(b) < f(a).$$

故选: C.

精进不休 日新月异

17 2018 年天津武清区高三二模理科 (宝坻区, 宁河区, 蓟县区, 静海区联考) 第 6 题 5 分

已知函数 $y = f(x+1)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x^3 + \ln(1-x)$, 记 $a = f(\log_3 6)$, $b = f(\log_4 8)$, $c = f(\log_5 10)$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $a > b > c$

B. $c > b > a$

C. $b > c > a$

D. $b > a > c$

答案 A

解析

函数 $y = f(x+1)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称,

将 $y = f(x+1)$ 的图象向右平移1个单位得到 $y = f(x)$,

则 $f(x)$ 关于直线 $x = 0$, 即 y 轴对称, 则函数 $f(x)$ 是偶函数,

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x^3 + \ln(1-x)$ 为减函数,

$\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 为增函数,

$\therefore \log_3 6 = 1 + \log_3 2$, $\log_4 8 = 1 + \log_4 2$, $\log_5 10 = 1 + \log_5 2$,

$\therefore \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$, $\log_4 2 = \frac{1}{\log_2 4}$, $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$,

$\therefore 0 < \log_2 3 < \log_2 4 < \log_2 5$,

$\therefore \frac{1}{\log_2 3} > \frac{1}{\log_2 4} > \frac{1}{\log_2 5} > 0$,

即 $\log_3 2 > \log_4 2 > \log_5 2 > 0$,

则 $1 + \log_3 2 > \log_4 2 > \log_5 2 > 1$,

即 $\log_3 6 > \log_4 8 > \log_5 10 > 1$,

$\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 为增函数,

$\therefore f(\log_3 6) > f(\log_4 8) > f(\log_5 10)$,

即 $a > b > c$.

故选A.

6. 求解不等式

豪厘不伐 将用斧柯

18

2018~2019学年北京丰台区北京市丰台区丰台第二中学高三上学期中理科第11题5分

不等式 $(x^2 - 2)\log_{0.5} x < 0$ 的解集是 _____ .

答案 $(0, 1) \cup (\sqrt{2} + \infty)$

解析 不等式 $(x^2 - 2)\log_{0.5} x < 0$,

$$\text{则} \begin{cases} x^2 - 2 < 0 \\ \log_{0.5} x > 0 \end{cases},$$

解得 $0 < x < 1$,

$$\text{或} \begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ \log_{0.5} x < 0 \end{cases},$$

解得 $x > \sqrt{2}$,

综上：不等式得解集为 $(0, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$,

故答案为： $(0, 1) \cup (\sqrt{2} + \infty)$.

含参恒能成立问题

19 2016~2017学年10月北京东城区北京市第五十五中学高一上学期月考第10题

若不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+ax} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+a-2}$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ().

A. $[-2, 2]$

B. $(-2, 2)$

C. $[0, 2]$

D. $[-3, 3]$

答案 B

解析 $\because \frac{1}{2} < 1$ ，则 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 单调减，

$\therefore x^2 + ax > 2x + a - 2$ 恒成立，

也即 $x^2 + (a - 2)x + (2 - a) > 0$ 恒成立，

$\therefore \Delta = (a - 2)^2 - 4 \times (2 - a) < 0$ ，

$\therefore -2 < a < 2$ ，选择B.

20 已知对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，不等式 $\frac{1}{2^{x^2+x}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-mx+m+4}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 ().

A. $(-3, 5)$

B. $(-2, 5)$

C. $(-2, 6)$

D. $(-3, 6)$

答案 A

解析

$$\frac{1}{2^{x^2+x}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-mx+m+4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-mx+m+4}.$$

因为 $0 < \frac{1}{2} < 1$,

所以指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

所以 $x^2 + x < 2x^2 - mx + m + 4$,

即 $x^2 - (m+1)x + m + 4 > 0$ ①.

因为原不等式对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以①对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以 $\Delta = [-(m+1)]^2 - 4(m+4) < 0$,

解得 $-3 < m < 5$,

所以实数 m 的取值范围是 $-3 < m < 5$.



利用单调性、奇偶性

21

2014~2015学年北京延庆县高一上学期期末第12题5分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足

$f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围是 ().

A. $[1, 2]$

B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

D. $(0, 2]$

答案

C

解析

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$\therefore f(\log_2 a) + f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) \leq 2f(1)$ 等价于 $f(\log_2 a) + f(-\log_2 a) = 2f(\log_2 a) \leq 2f(1)$,

即 $f(\log_2 a) \leq f(1)$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(\log_2 a) \leq f(1)$ 等价于 $f(|\log_2 a|) \leq f(1)$, 即 $|\log_2 a| \leq 1$,

$\therefore -1 \leq \log_2 a \leq 1$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$.

故选 C.

豪厘不伐 将用斧柯

22 2019年河南郑州高三一模文科第8题5分

设函数 $f(x) = 2\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 3x^3$ ($-2 < x < 2$)，则使得 $f(2x) + f(4x - 3) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 () .

- A. $(-1, 1)$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(\frac{1}{4}, 1)$ D. $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$

教法备注

注意抽象函数定义域

答案 B

解析

$$\because f(x) = 2\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 3x^3 \quad (-2 < x < 2),$$

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

故 $f(x)$ 是奇函数，

且 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 递增，

故由 $f(2x) + f(4x - 3) > 0$ ，

$$\text{得：} f(2x) > f(3 - 4x),$$

$$\text{则} \begin{cases} 2x > 3 - 4x \\ -2 < 2x < 2 \\ -2 < 3 - 4x < 2 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \frac{1}{2} < x < 1,$$

故选：B.

精进不休 日新月异

23 2019~2020学年重庆渝中区重庆市巴蜀中学高二下学期期末第12题5分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，且 $f(x+1)$ 关于直线 $x = -1$ 对称. 当 $x \geq 0$ 时.

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{4}x^2+1}, & 0 \leq x < 2 \\ 2 - \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}, \text{ 若对任意的 } x \in [m, m+1], \text{ 不等式 } f(2-2x) \geq f(x+m) \text{ 恒成立, 则}$$

实数 m 的取值范围是 () .

- A. $[-\frac{1}{4}, 0)$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

答案 D

解析

$\because f(x+1)$ 关于直线 $x = -1$ 对称,

$\therefore f(x)$ 为偶函数,

当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(2-2x) \geq f(x+m),$

$\therefore f(|2-2x|) \geq f(|x+m|),$

$\therefore |2-2x| \leq |x+m|,$

即 $(2-2x)^2 \leq (x+m)^2,$

整理的 $3x^2 - (8+2m)x + 4 - m^2 \leq 0,$

令 $F(x) = 3x^2 - (8+2m)x + 4 - m^2,$

$\therefore \forall x \in [m, m+1], F(x) \leq 0,$

$\therefore \begin{cases} F(m) \leq 0 \\ F(m+1) \leq 0 \end{cases},$

$\therefore \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{4} \end{cases},$

$\therefore m \geq \frac{1}{2}.$

故选 D.



函数定义域、值域经典问题

24

2016~2017 学年江苏徐州云龙区徐州市王杰中学高一上学期期中第 13 题 5 分

已知函数 $y = \lg(ax^2 - 2x + 2)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围为 _____.

答案

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$

解析

当 $a = 0$ 时, 符合条件;

当 $a > 0$ 时, $\Delta = 4 - 8a \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{1}{2}$, 故 $0 < a \leq \frac{1}{2}.$

故答案为: $\left[0, \frac{1}{2}\right].$

25

2018~2019 学年 12 月四川成都郫都区郫都区成都外国语学校高一上学期月考第 9 题 5 分

若函数 $f(x) = \log_2(ax^2 + ax + 1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 的函数, 则 a 的取值范围是 ().

A. $(4, +\infty)$

B. $(-\infty, 4)$

C. $[4, +\infty)$

D. $(-\infty, 4]$

答案 C

解析 设 $y = ax^2 + ax + 1$, 根据题意 $(0, +\infty) \subseteq \{y | y = ax^2 + ax + 1\}$,
 $\therefore \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = a^2 - 4a \geq 0 \end{cases}$,
 解得 $a \geq 4$,
 $\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[4, +\infty)$.
 故选 C .

26 已知函数 $f(x) = \lg(2^x + a - 4)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $(-2, 2)$ B. $(2, 4)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

答案 D

解析 由题意知对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $2^x + a - 4 > 0$ 恒成立 , 所以 $a > (4 - 2^x)_{\max}$.
 又 $4 - 2^x < 4$ 恒成立 , 所以 $a \geq 4$,
 故选 D .

7. 单调性问题



求解复合函数单调性

27 2018~2019 学年 10 月四川成都青羊区四川省成都市石室中学高一上学期月考第 3 题 5 分

函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-4x+3}$ 的单调递增区间是 () .

- A. $(-\infty, -2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $[-2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2]$

答案 C

解析 令 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^u$, $u = -x^2 - 4x + 3$,

则 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，
 若 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-4x+3}$ 单调递增，
 则需要 $u = -x^2 - 4x + 3$ 单调递减，
 即 $x \geq -\frac{-4}{2 \times (-1)} = -2$ ，
 故 $u = -x^2 - 4x + 3$ 在 $[-2, +\infty)$ 单调递减，
 即原函数在 $[-2, +\infty)$ 单调递增。
 故选 C。

28 2019~2020 学年 12 月重庆南岸区重庆南开（融侨）中学高一上学期周测 D 卷第 6 题 5 分

函数 $f(x) = \lg(-x^2 + x + 6)$ 的单调递减区间为 ()。

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

答案 D

解析 由 $-x^2 + x + 6 = (-x - 2)(x - 3) > 0$ ，
 $\therefore x \in (-2, 3)$ ，
 $\because f(x)$ 递减，由复合函数单调性可知： $y = -x^2 + x + 6$ 递减，
 $\therefore x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ，
 综上， $x \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 。
 故选 D。

含参问题

29 2020~2021 学年四川成都金牛区成都外国语学校高一上学期期中第 10 题 5 分

若函数 $y = \log_a(x^2 - ax + 2)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上为减函数，则 a 的取值范围是 ()。

- A. $(0, 1)$ B. $[2, 3)$ C. $[2, +\infty)$ D. $(1, 3)$

答案 B

解析 由题知：

函数 $y = f(x) = \log_a(x^2 - ax + 2)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上为减函数，

则 $g(x) = x^2 - ax + 2$ 在 $(-\infty, 1]$ 上大于 0 恒成立，

且在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减，

$$\text{即} \begin{cases} g(1) = 3 - a > 0 \\ \frac{a}{2} \geq 1 \\ a > 1 \end{cases},$$

解得： $2 \leq a < 3$ ，

故选 B.

30 2019~2020 学年 9 月重庆云阳县江口中学高三上学期月考理科第 7 题 5 分

函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 6)$ 在 $[-2, +\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围为 ().

A. $[4, +\infty)$

B. $[4, 5)$

C. $[4, 8)$

D. $[8, +\infty)$

答案 B

解析 令 $t = x^2 + ax + 6$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + ax + 6)$ ，

由函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 和 $t = x^2 + ax + 6$ 复合而成，

又 $\because y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递减，

则需 $t = x^2 + ax + 6$ 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递增，

且当 $x \geq -2$ 时， $t > 0$ ，

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{a}{2} \leq -2 \\ t(-2) = 4 - 2a + 6 > 0 \end{cases},$$

解得 $4 \leq a < 5$ 。

故选 B.