

02：函数的对称性与周期性练习题



赋值运算

1

2020~2021学年天津河东区高三上学期期中第15题5分

已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x) = f(1+x)$ 。若 $f(1) = 2$ ，则

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

2

解析

$\because$ 函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$ ， $f(0) = 0$ ，

又 $\because f(1-x) = f(1+x)$ ，

$\therefore f(x+1) = -f(x-1)$ ，即 $f(x+2) = -f(x)$ ，

$\therefore f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是周期为4的周期函数，

$\therefore$ 有 $f(2) = f(0) = 0$ ， $f(3) = f(1-2) = f(-1) = -f(1) = -2$ ，

$f(4) = f(0) = 0$ ，

$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$ ，

$\therefore f(1) + f(2) + \cdots + f(50)$

$= 12[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]$

$+ f(49) + f(50)$

$= 0 + f(1) + f(2) = 2$ 。

2

2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期末第16题4分

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 对任意 x 满足 $f(x+\pi) = f(x)$ ，且当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时， $f(x) = \sin x$ ，则

$f(\frac{5\pi}{3})$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析 因为 $f(x + \pi) = f(x)$ ，所以函数是以 π 为周期的周期函数，

又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x) = f(x)$ ，

因为当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时， $f(x) = \sin x$ ，

所以 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

故 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

3 2018~2019学年10月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第6题5分

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且满足 $f(x+2) = f(x)$ ，当 $x \in [-1, 1)$ 时，

$f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ ，则 $f(3) = (\quad)$ 。

A. 3

B. 1

C. 2

D. -2

答案 D

解析 $\because f(x+2) = f(x)$ ，

$\therefore f(x+2+2) = f(x+2) = f(x)$ ，

$\therefore f(x+4) = f(x)$ ，

$\therefore f(-1-4) = f(-1) = -4 + 2 = -2$ ，

$\therefore f(3) = -2$ 。

故选D。

4 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$ ，若 $f(1) = -5$ ，求 $f(f(5))$ 的值。

答案 $-\frac{1}{5}$ 。

解析 由题意知 $f(5) = \frac{1}{f(3)} = \frac{1}{\frac{1}{f(1)}} = f(1) = -5$ 。

令 $x = -1$ ，则 $f(1) = \frac{1}{f(-1)}$ ， $\therefore f(-1) = -\frac{1}{5}$ 。

$\therefore f(-5) = \frac{1}{f(-3)}$ ， $\therefore f(-1) = \frac{1}{f(-3)}$ ， $f(-5) = f(-1) = -\frac{1}{5}$ ， $\therefore f(f(5)) = -\frac{1}{5}$ 。

5 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测C卷第9题

定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$ ，则 $f(6)$ 的值为 _____ .

答案 0

解析 $\because f(x)$ 为定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，

$$\therefore f(0) = 0,$$

$$\text{令 } x = 0,$$

$$\text{有 } f(0+2) = -f(0) = 0,$$

$$\therefore f(2) = 0.$$

$$\text{令 } x = 2,$$

$$f(2+2) = -f(2) = 0,$$

$$\therefore f(4) = 0.$$

$$\text{令 } x = 4,$$

$$f(4+2) = -f(4) = 0.$$

$$\therefore f(6) = 0.$$



比较大小

6 2018~2019学年5月天津河西区天津市实验中学高三下学期月考理科第6题5分

设函数 $f(x)$ 是定义在实数集上的奇函数，在区间 $[-1, 0)$ 上是增函数，且 $f(x+2) = -f(x)$ ，则有 () .

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(1)$

B. $f(1) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$

C. $f(1) < f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)$

D. $f\left(\frac{3}{2}\right) < f(1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$

答案 A

解析 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，

且在 $(-1, 0)$ 上增函数，

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上也为增函数,

$$\therefore 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right) < f(1).$$

故选 A.

7 2018~2019 学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第 9 题 4 分

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 若 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, 则下列结论正确的是 ().

A. $f(e) < f(\sqrt{5}) < f(1)$

B. $f(1) < f(\sqrt{5}) < f(e)$

C. $f(\sqrt{5}) < f(e) < f(1)$

D. $f(\sqrt{5}) < f(1) < f(e)$

答案 C

解析

$\because y = f(x+2)$ 是偶函数,

$\therefore f(x+2)$ 的图象关于 $x = 0$ 对称.

$\therefore f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称,

$\because x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore x \in [2, 4]$ 时, $f(x)$ 单调递增,

$$\therefore \sqrt{5} - 2 < e - 2 < 2 - 1,$$

$$\therefore f(1) > f(e) > f(\sqrt{5}).$$

故选: C.

8 2019~2020 学年 10 月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测 D 卷第 4 题

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(4, +\infty)$ 上为减函数, 且函数 $y = f(x+4)$ 为偶函数, 则 ().

A. $f(2) > f(3)$

B. $f(3) > f(6)$

C. $f(3) > f(5)$

D. $f(2) > f(5)$

答案 B

解析

$\because f(x+4)$ 为偶函数,

$$\therefore f(x+4) = f(-x+4),$$

$\therefore f(x)$ 的对称轴为 $x=4$,

又 $\therefore$ 在 $(4, +\infty)$ 为减函数,

$\therefore$ 横坐标离 4 越近, 函数值越大,

对于 A, $f(2) < f(3)$, A 错;

对于 B, $f(3) > f(6)$, B 对;

对于 C, $f(3) = f(5)$, C 错;

对于 D, $f(2) < f(5)$, D 错.

9 2018~2019 学年 9 月吉林松原扶余县扶余第二实验学校高一上学期月考第 12 题 5 分

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 5)$ 上单调递减, 对任意实数 t , 都有 $f(5+t) = f(5-t)$, 那么下列式子成立的是 ().

A. $f(-1) < f(9) < f(13)$

B. $f(13) < f(9) < (-1)$

C. $f(9) < f(-1) < f(13)$

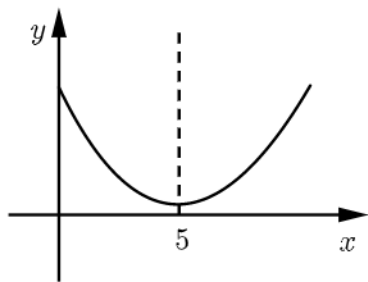
D. $f(13) < f(-1) < f(9)$

答案 C

解析

$$\therefore f(5+t) = f(5-t),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=5$ 对称,



$$\therefore f(-1) = f(11),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 5)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(5, +\infty)$ 上为单调递增.

$$\therefore f(9) < f(11) < f(13),$$

$$\text{即 } f(9) < f(-1) < f(13).$$

故选 C.

求解不等式

- 10 设定义在 $[-2, 2]$ 的 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称，且在区间 $[0, 2]$ 上单调递减，若 $f(1-m) < f(m)$ ，则实数 m 的取值范围是 _____ .

答案 $\left[-1, \frac{1}{2}\right)$

- 11 2018~2019学年天津北辰区天津市第四十七中学高三上学期期中理科第13题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数，且 $y = f(x+1)$ 是偶函数，则关于 x 的不等式 $f(2x+1) - f(x-1) < 0$ 的解集为 _____ .

答案 $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$

解析 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x+1)$ 是偶函数，

$\therefore y = f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称，

$f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数， $(1, +\infty)$ 增函数，

$\therefore f(2x+1) - f(x-1) < 0$ ，

$\therefore f(2x+1) < f(x-1)$ ，

$\therefore (2x+1-1)^2 < (x-1-1)^2$ ，

解得 $-2 < x < \frac{2}{3}$.

故答案为： $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$.

- 12 2019~2020学年10月天津和平区天津市第一中学高一上学期周测C卷第10题

若函数 $f(x+1)$ 为偶函数，且 $x > 1$ 时， $f(x)$ 单调递增，则不等式 $f(2-x) > f(x-1)$ 的解集是 _____ .

答案 $x > \frac{3}{2}$

解析

$\because f(x+1)$ 为偶函数,

$$\therefore f(-x+1) = f(x+1),$$

$\therefore f(x)$ 关于 $x=1$ 对称,

$\because x > 1$ 时, $f(x)$ 单增,

$$\text{又} \because f(2-x) > f(x-1),$$

$$\therefore |2-x-1| > |x-1-1|,$$

$$\therefore |x-1| > |x-2|,$$

$$\therefore x^2 + 1 - 2x > x^2 + 4 - 4x,$$

$$\therefore 2x > 3,$$

$$\therefore x > \frac{3}{2}.$$



利用函数图像研究根的分布

13 2019~2020 学年山东临沂临沭县高三上学期期末第15题5分

偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) = f(x+1)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$, 则 $f\left(\frac{4}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$, 则若在区间 $[-1, 3]$ 内, 函数 $g(x) = f(x) - kx - k$ 有4个零点, 则实数 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案

1: $\frac{2}{3}$

2: $\left(0, \frac{1}{4}\right]$

解析

$\because$ 偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) = f(x+1)$,

$$\therefore f(x) = f(x+2),$$

即函数 $f(x)$ 是周期为2的周期函数,

$$\text{则 } f\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3} - 2\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

若 $-1 \leq x \leq 0$, 则 $0 \leq -x \leq 1$,

$$\text{则 } f(-x) = -x = f(x),$$

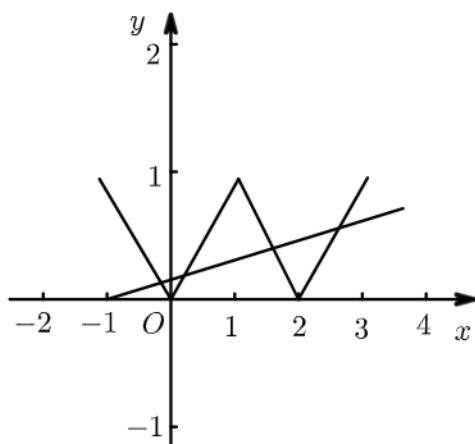
$$\text{即 } f(x) = -x, -1 \leq x \leq 0,$$

$$\text{由 } g(x) = f(x) - kx - k = 0 \text{ 得 } f(x) = k(x+1),$$

要使函数 $g(x) = f(x) - kx - k$ 有4个零点,

等价于函数 $f(x)$ 与 $g(x) = k(x+1)$ 有四个不同的交点，

作出两个函数的图象如图：



$g(x)$ 过定点 $A(-1, 0)$ ， $f(3) = 1$ ，

则 k 满足 $0 < g(3) \leq 1$ ，

即 $0 < 4k \leq 1$ ，得 $0 < k \leq \frac{1}{4}$ ，

即实数 k 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4}]$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$ ， $(0, \frac{1}{4}]$ 。

14 2019~2020学年9月重庆云阳县江口中学高三上学期月考理科第16题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\pi) = -f(x)$ ，当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时， $f(x) = \sqrt{x}$ ，则方程 $(x-\pi)f(x) = 1$ 在区间 $[-\pi, 3\pi]$ 上所有的实数解之和为 _____。

答案 4π

解析

把方程 $(x-\pi)f(x) = 1$ 在 $[-\pi, 3\pi]$ 上的所有实数解集转化为函数 $y = f(x)$ 与 $h(x) = \frac{1}{x-\pi}$ 的交点的横坐标，

由 $f(x+\pi) = -f(x)$ 可知 $f(x+2\pi) = -f(x+\pi) = f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 的周期为 2π ，

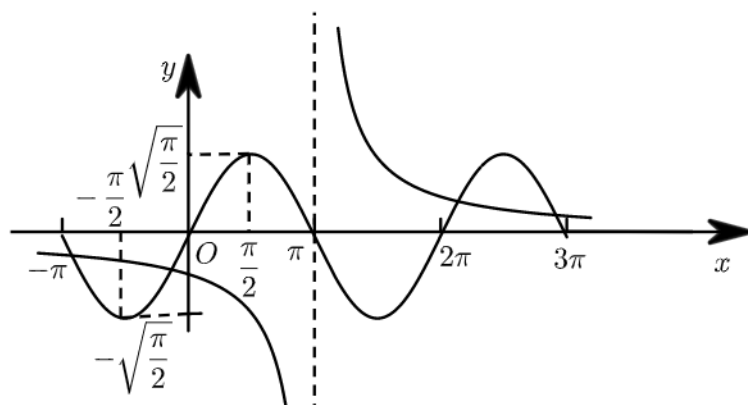
又 $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore -f(x) = f(-x)$ ，

$\therefore f(x+\pi) = f(-\pi)$ ，

$\therefore f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，

画出 $f(x)$, $h(x)$ 的图象, 如下图:



$\therefore f(x)$ 关于点 $(\pi, 0)$ 对称,

又 $h(x)$ 关于 $(\pi, 0)$ 对称,

$\therefore h(x)$, $f(x)$ 的 4 个交点关于 $(\pi, 0)$ 对称.

$\therefore$ 方程 $(x - \pi) f(x) = 1$ 在 $[-\pi, 3\pi]$ 上所有实数解之和 $= 2\pi + 2\pi = 4\pi$.

故答案为: 4π .