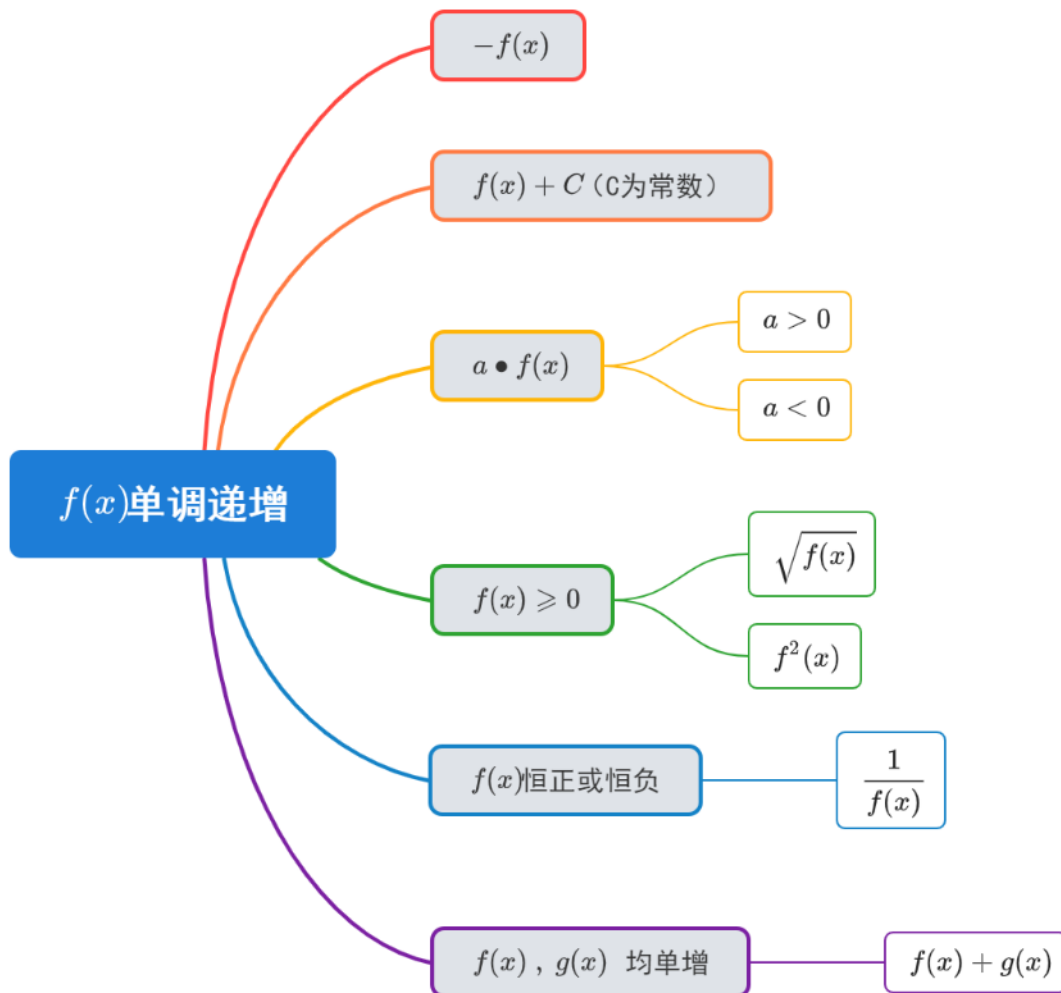


01：函数的单调性与奇偶性

知识梳理——判断函数单调性的常用结论



【仅教师可见】

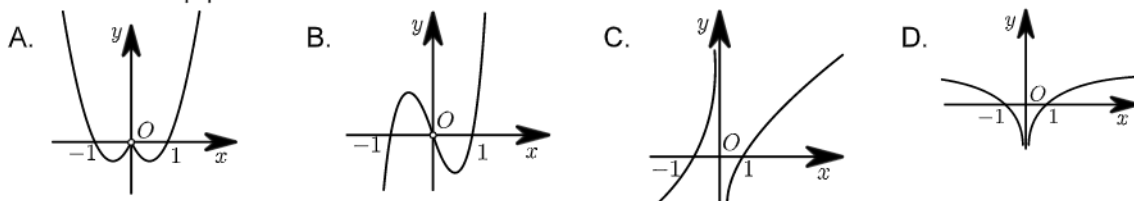
- ① 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f(x)$ 的单调性**相反**。
- ② 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(x) + C$ 的单调性**相同**。
- ③ 当 $a > 0$ 时，函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = af(x)$ 的单调性**相同**；
当 $a < 0$ 时，函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = af(x)$ 的单调性**相反**。
- ④ 若 $f(x) \geq 0$ ，则函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = \sqrt{f(x)}$ ， $y = f^2(x)$ 的单调性**相同**。
- ⑤ 当函数 $y = f(x)$ 的值恒正或者恒负时，函数 $y = \frac{1}{f(x)}$ 与函数 $y = f(x)$ 的单调性**相反**。

⑥ 在公共区间上, 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是单调增 (减) 函数, 则 $f(x) + g(x)$ 也是单调增 (减) 函数.

1. 利用单调性、奇偶性判断函数图像

1 2019~2020学年10月广东深圳罗湖区深圳罗湖外语学校高中部高三上学期月考理科第4题5分

函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|}$ 图象大致为 ().



答案 D

解析 由题意有 $f(-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 排除 B、C 选项.

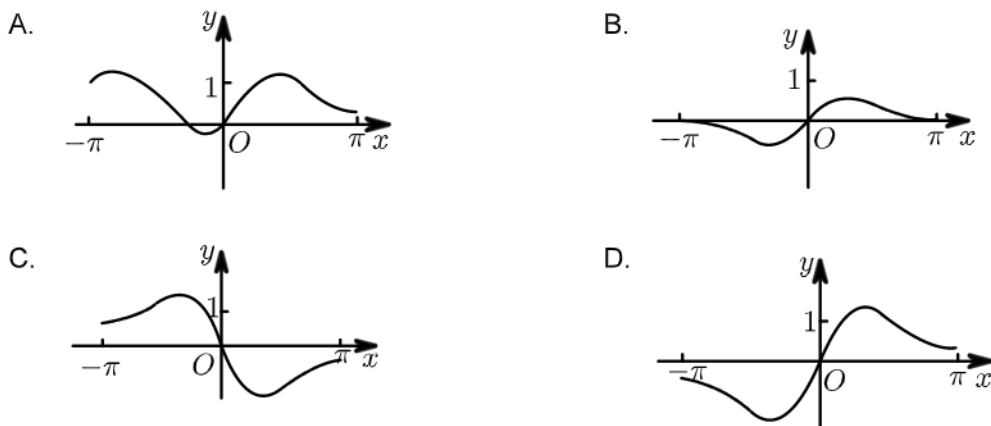
当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 显然单调递增, 排除 A.

故选 D.

利用赋特殊值、判断函数值正负等附加条件

2 2019年高考真题全国卷I理科第5题5分

函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为 ().



教法备注

判断函数奇偶性——奇函数：排除A；

赋值 $x = \pi$ ，得到正数，排除B、C。

答案 D

解析

$$f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2},$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数，

$\therefore$ 图象关于原点对称，

$\therefore$ A错误；

令 $f(x) = 0$ ，即 $\sin x + x = 0$ ，

设 $g(x) = \sin x + x$ ，

$$g'(x) = \cos x + 1 \geq 0,$$

$\therefore g(x)$ 单调递增，

又 $\therefore g(0) = 0$ ，

$\therefore g(x)$ 只有一个零点 O ，

即 $f(x)$ 与 x 轴只有一个交点 $(0, 0)$ ，

故B错；

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} > 0, \text{ 故C错；}$$

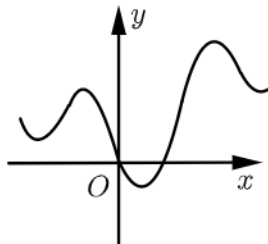
故选D。

3

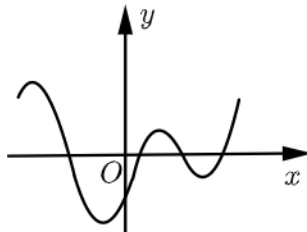
2020年浙江杭州滨江区浙江省杭州第二中学高三下学期高考模拟6月第5题4分

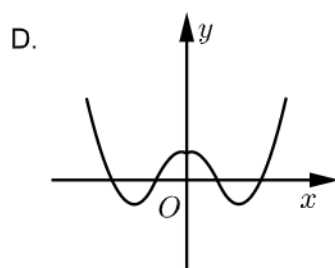
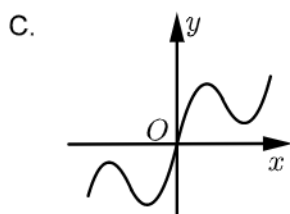
函数 $y = |x| - \sin(3x)$ 的图象可能是下列图象中的()。

A.



B.





答案 A

解析

$$\because f(x) = |x| - \sin(3x),$$

$$f(-x) = |-x| - \sin(-3x) = |x| + \sin 3x,$$

故 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数，

$\therefore$ 排除 C、D，

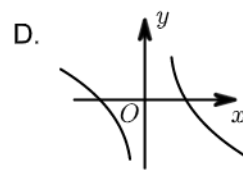
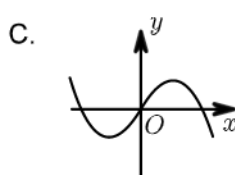
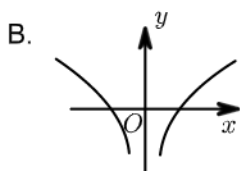
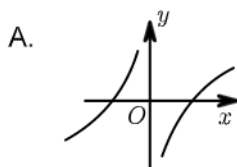
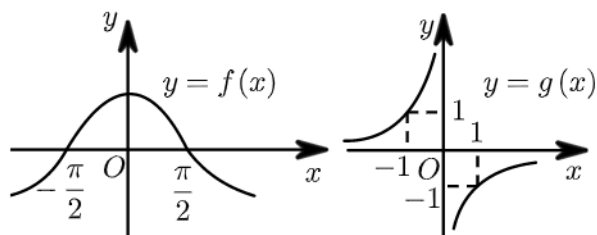
$$\text{又} \because f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 1 > 0, f(0) = 0,$$

$\therefore$ 排除 B，

故选 A.

4 2019~2020 学年山东潍坊高三上学期期末第 5 题 5 分

函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象如图所示，则 $y = f(x) \cdot g(x)$ 的部分图象可能是 ().



教法备注

判断函数奇偶性——奇函数：排除 B；根据 $g(x)$ 定义域：排除 C；

根据函数 y 在 $x > 0$ 时先负后正：排除 D。

答案 A

解析 由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像可知,

当 $x < -\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) < 0, g(x) > 0$,

$\therefore y = f(x) \cdot g(x) < 0$,

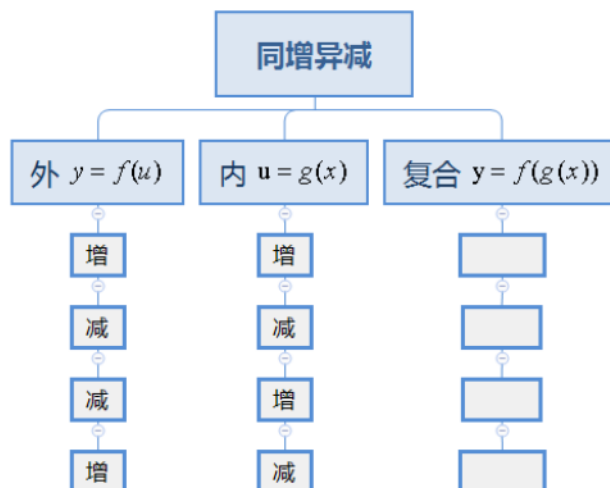
当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $f(x) > 0, g(x) > 0$,

$\therefore y = f(x) \cdot g(x) > 0$,

故选: A.

知识梳理——判断复合函数单调性

复合函数单调性可简记为“**同增异减**”, 即内外函数的单调性相同时递增, 相异时递减.



【仅教师可见】

外 $y = f(u)$	内 $u = g(x)$	$y = f(g(x))$
增	增	增
减	减	增
减	增	减
增	减	减

2. 复合函数单调性

5 2019~2020学年广东深圳宝安区深圳市宝安区新安中学高一上学期期中第7题5分

函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 的单调减区间为 () .

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[-1, 2]$ C. $[2, +\infty)$ D. $[2, 5]$

答案 D

解析 $\because$ 函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 的定义域为 $[-1, 5]$,

函数 $y = \sqrt{u}$ 为增函数 ,

函数 $u = -x^2 + 4x + 5$ 在 $[2, 5]$ 上为减函数 ,

故函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 的单调递减区间为 $[2, 5]$.

故选 D .

6 2019~2020学年10月山东枣庄滕州市滕州市第一中学高一上学期月考第9题4分

已知函数 $f(x) = \sqrt{x-2}$, 若 $f(2a^2 - 5a + 4) < f(a^2 + a + 4)$, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ B. $[2, 6)$
C. $(0, \frac{1}{2}] \cup [2, 6)$ D. $(0, 6)$

答案 C

解析 由题意可知 , 函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增 ,

$\therefore f(2a^2 - 5a + 4) < f(a^2 + a + 4)$,

则 $2 \leq 2a^2 - 5a + 4 < a^2 + a + 4$,

即 $a^2 - 6a < 0$ 且 $2a^2 - 5a + 2 \geq 0$,

解可得 , $2 \leq a < 6$ 或 $0 < a \leq \frac{1}{2}$,

故选 : C .

7 2019~2020学年安徽高一上学期期中

若函数 $f(x) = \sqrt{5 + ax - x^2}$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减 , 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[-4, 2]$ C. $[-\frac{1}{2}, 2]$ D. $[-1, 2]$

答案 C

解析

解：∵函数 $f(x) = \sqrt{5+ax-x^2}$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减，

$$\therefore \frac{a}{2} \leq 1, \text{ 且 } 5+2a-4 \geq 0,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} \leq a \leq 2, \text{ 即 } a \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{1}{2}, 2\right],$$

故选：C.

知识梳理——判断函数奇偶性

1. 判断函数奇偶性的基本公式

① _____, 那么 $f(x)$ 就叫做奇函数.

② _____, 那么 $f(x)$ 就叫做偶函数.

答案：① $f(-x) = -f(x)$; ② $f(-x) = f(x)$

2. 重要结论

① 若奇函数在原点有定义，则 $f(0) = 0$

② 其定义域关于原点对称：在奇函数和偶函数的定义中，若 x 是其定义域内的一个数值，则 $-x$ 必然也在其中，否则就不满足奇函数或者偶函数的初始条件，即这个函数既不是奇函数也不是偶函数（非奇非偶函数）

3. 函数奇偶性的运算性质

设 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域分别为 D_1 , D_2 ，则在公共定义域上，有如下结论：

$f(x)$	偶函数	偶函数	奇函数	奇函数
$g(x)$	偶函数	奇函数	偶函数	奇函数
$f(x) + g(x)$				
$f(x) - g(x)$				
$f(x) \cdot g(x)$				
$f(g(x))$				

答案：

$f(x)$	偶函数	偶函数	奇函数	奇函数
$g(x)$	偶函数	奇函数	偶函数	奇函数
$f(x) + g(x)$	偶函数	不能确定	不能确定	奇函数
$f(x) - g(x)$	偶函数	不能确定	不能确定	奇函数
$f(x) \cdot g(x)$	偶函数	奇函数	奇函数	偶函数
$f(g(x))$	偶函数	偶函数	偶函数	奇函数

3. 函数的单调性与奇偶性的应用



比较大小

8

2020~2021学年北京海淀区北京市第十九中学高一上学期期中第7题4分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(-\infty, 0]$ 上有单调性，且 $f(-2) < f(1)$ ，则下列不等式成立的是（ ）。

A. $f(-1) < f(2) < f(3)$

B. $f(2) < f(3) < f(-4)$

C. $f(-2) < f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right)$

D. $f(5) < f(-3) < f(-1)$

答案

D

解析

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(-\infty, 0]$ 上有单调性，且 $f(-2) < f(1) = f(-1)$ ，故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数，

则 $f(5) = f(-5) < f(-3) < f(-1)$ ，

故选：D。

9

2020~2021学年江苏无锡锡山区江苏省锡东高级中学高一上学期期中第7题5分

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，其图象关于 y 轴对称，且当 $x_1 > x_2 \geq 0$ 时，满足

$[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) > 0$ ，则 $f(-2)$ ， $f(1)$ ， $f(3)$ 的大小关系为（ ）。

A. $f(-2) < f(1) < f(3)$

B. $f(1) < f(-2) < f(3)$

C. $f(3) < f(-2) < f(1)$

D. $f(3) < f(1) < f(-2)$

B

I

故选：B.

包罗万象 举一千从

10

D. $f(\sin C) > f(\cos B)$

教法备注

能联想到**两角之和必大于 $\frac{\pi}{2}$** ，继而结合诱导公式及三角函数图像比较不同角的三角函数值的

C

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减 $\therefore f(\cos C) > f(\sin B) \therefore C$ 正确.

故选C.

11 2017~2018学年10月江西南昌东湖区南昌市第二中学高一上学期月考第9题5分

已知 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，且在区间 $(-\infty, 0]$ 单调递减，则满足 $f(3x+1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的实数 x 的取值范围是() .

- A. $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ C. $\left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$

答案 B

解析 根据题意，函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，

且在区间 $(-\infty, 0]$ 单调递减，

则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增函数，

$$\text{则 } f(3x+1) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(|3x+1|) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow |3x+1| < \frac{1}{2},$$

$$\text{解可得 } -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{6},$$

$$\text{即 } x \text{ 的取值范围是 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right).$$

故选B .

12 2019~2020学年高一下学期开学考试第10题5分

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则满足 $f(\sqrt{2x+3}) < f(x)$ 的 x 取值范围是() .

- A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
C. $\left[-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (3, +\infty)$ D. $(-1, 3)$

答案 C

解析 因为偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，

不等式 $f(\sqrt{2x+3}) < f(x)$ 成立，

$$\text{则 } \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ |\sqrt{2x+3}| < |x| \end{cases}, \text{ 化简可得 } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ (x-3)(x+1) > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } -\frac{3}{2} \leq x < -1 \text{ 或 } x > 3,$$

$$\text{即 } x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (3, +\infty).$$

故选C.

毫厘不伐 将用斧柯

【仅教师可见】

求解此类问题时，一定要特别注意，题目是否对函数定义域有所限制。也即我们在求解问题时，务必考虑到**抽象函数定义域**！

13 2019~2020学年浙江杭州下城区杭州第十四中学高一上学期期中第13题3分

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\{x|x \neq 0\}$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则使得 $f(x) > f(2x - 1)$ 成立的 x 的取值范围是()。

A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

D. $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

答案 C

解析 $f(x)$ 是定义在 $\{x|x \neq 0\}$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{则 } f(x) > f(2x - 1) \Rightarrow f(|x|) > f(|2x - 1|)$$

$$\text{即有 } |x| > |2x - 1| \text{ 且 } x \neq 0, 2x - 1 \neq 0,$$

$$\text{解得 } x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

故选C.

14 2016~2017学年江苏常州武进区前黄高级中学国际分校高一上学期期中第10题5分

已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的增函数，且 $f(x - 1) < f(1 - 3x)$ ，则 x 的取值范围是_____。

答案 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

解析 由题意可知， $\begin{cases} -1 \leq x - 1 \leq 1 \\ -1 \leq 1 - 3x \leq 1 \end{cases}$ ，

$$\text{解得 } 0 \leq x \leq \frac{2}{3}. \text{ ①}$$

又 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数，且 $f(x - 1) < f(1 - 3x)$ ，

$$\therefore x - 1 < 1 - 3x, \text{ 解得 } x < \frac{1}{2}. \text{ ②}$$

由①②可知, 所求自变量 x 的取值范围为 $\{x|0 \leq x < \frac{1}{2}\}$.

15 2019~2020学年10月四川成都金牛区成都市第八中学高一上学期月考第9题

定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty) (x_1 \neq x_2)$, 有

$(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) > 0$. 则满足 $f(2x - 1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是().

- A. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

答案 B

解析 由 $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) > 0$, 可知 $x_2 - x_1$ 与 $f(x_2) - f(x_1)$ 同号,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, $\therefore$ 由 $f(2x - 1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 得 $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 < \frac{1}{3} \end{cases}$,

解得 $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$, $\therefore x$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

故选B.

借助图像与 x 轴的关系求解不等式

16 2019~2020学年北京通州区高一上学期期中第8题5分

若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 又 $f(3) = 0$, 则不等式

$(x - 1)f(x) < 0$ 的解集是().

- A. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
B. $(-3, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-3, 0) \cup (0, 3)$
D. $(-3, 0) \cup (1, 3)$

答案 D

解析 $\because f(x)$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单增,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

$$\because f(3) = 0, \therefore f(-3) = 0,$$

当 $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$ 时, $f(x) < 0$,

$x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $(x-1)f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$,

$\therefore x \in (1, 3)$,

当 $x < 1$ 时, $(x-1)f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$,

$\therefore x \in (-3, 0)$.

综上 $x \in (-3, 0) \cup (1, 3)$.

17 2018~2019学年浙江台州高一上学期期中联谊五校第9题4分

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $\frac{2f(x) + f(-x)}{5x} < 0$ 解集是 ().

A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

答案 B

解析 $\because$ 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$,

$\therefore$ 此时函数 $f(x)$ 为减函数,

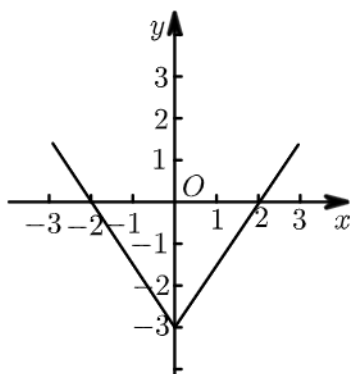
$\because f(x)$ 是偶函数,

$\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, 函数为增函数,

则不等式 $\frac{2f(x) + f(-x)}{5x} < 0$ 等价于 $\frac{3f(x)}{5x} < 0$, 即 $xf(x) < 0$,

$\because f(-2) = -f(2) = 0$,

$\therefore$ 作出函数 $f(x)$ 的草图:



则 $xf(x) < 0$ 等价于 $\begin{cases} x > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$,

即 $x < -2$ 或 $0 < x < 2$,

故不等式的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

故选B .

18 2020年高考真题海南卷第8题5分

若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 () .

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$
- B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
- C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
- D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

答案 D

解析 解: $\because$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$,

$\therefore f(x)$ 的图象如图:

当 $x = 0$ 时, 不等式 $xf(x-1) \geq 0$ 成立;

当 $x = 1$ 时, 不等式 $xf(x-1) \geq 0$ 成立;

当 $x-1 = 2$ 或 $x-1 = -2$, 即 $x = 3$ 或 $x = -1$ 时, 不等式 $xf(x-1) \geq 0$ 成立;

当 $x > 0$ 时, 不等式 $xf(x-1) \geq 0$ 等价于 $f(x-1) \geq 0$,

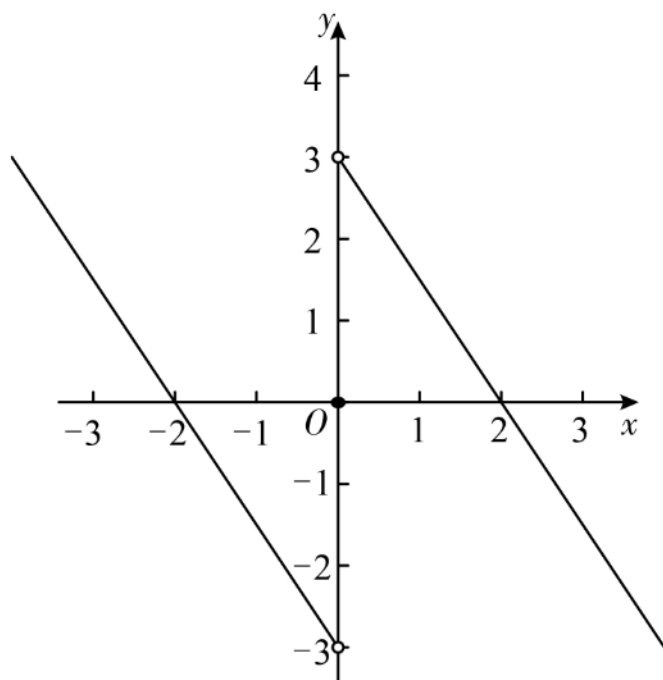
此时 $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < x-1 \leq 2 \end{cases}$, 此时 $1 < x \leq 3$,

当 $x < 0$ 时, 不等式 $xf(x-1) \geq 0$ 等价于 $f(x-1) \leq 0$,

即 $\begin{cases} x < 0 \\ -2 \leq x-1 < 0 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq x < 0$,

综上, 实数 x 的取值范围是 $[-1, 0] \cup [1, 3]$,

故选: D .



19 2017~2018学年四川德阳中江县四川省中江县龙台中学高一上学期期中第12题5分

设奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $f(1) = 0$, 则不等式 $x[f(x) - f(-x)] < 0$ 的解集为 () .

A. $\{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$

B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$

C. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

D. $\{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$

答案 D

解析 $\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore$ 它在 $(-\infty, 0)$ 上也是增函数.

$\because f(-x) = -f(x)$,

$\therefore f(-1) = f(1) = 0$.

不等式 $x[f(x) - f(-x)] < 0$ 可化为 $2xf(x) < 0$,

即 $xf(x) < 0$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时,

可得 $f(x) > 0 = f(-1)$,

$$\therefore x > -1,$$

$$\therefore -1 < x < 0;$$

当 $x > 0$ 时, 可得 $f(x) < 0 = f(1)$,

$$\therefore x < 1,$$

$$\therefore 0 < x < 1.$$

综上, 不等式 $x[f(x) - f(-x)] < 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$.

故选 D.

精进不休 日新月异

20 2018~2019 学年 10 月 辽宁沈阳浑南区东北育才高中 (本部) 高三上学期月考文科第 9 题 5 分

函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(-1) = 0$, 若对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 ().

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- B. $(-1, 0) \cup (0, 1)$
- C. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- D. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

教法备注

此题入手点在于, 题目中分式不等式的应用需要构造新函数 $g(x) = x \bullet f(x)$, 继而借由 $g(x)$ 的单调性判断出其图像与 x 轴的位置关系, 从而求解出此题.

答案 C

解析 根据题意, 设 $g(x) = x f(x)$,

若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$,

则 $g(-x) = (-x) f(-x) = x f(x) = g(x)$, 则 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

若 $f(-1) = 0$, 则 $g(-1) = g(1) = 0$,

又由对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

即 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数,

则在 $(-\infty, -1)$ 上, $g(x) = xf(x) > 0$, 在 $(-1, 0)$ 上, $g(x) = xf(x) < 0$,

又由 $x \in (-\infty, 0)$, 则在 $(-\infty, -1)$ 上, $f(x) < 0$, 在 $(-1, 0)$ 上, $f(x) > 0$,

又由函数 $f(x)$ 为奇函数, 在 $(0, 1)$, $f(x) < 0$,

综合可得: $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$;

故选:C.

知识梳理——分段函数

1. 分段函数的常用解题思路

(1) 在研究分段函数时, 要服从先局部后整体的原则, **先确定自变量的数值属于哪个区间**, 从而选择相应的对应关系.

(2) 画分段函数的图象时, **依次做出各个分区间内的函数图象**, 然后组合在一起就是整个分段函数的图象.

(3) **分段函数的值域是各段函数在相应区间上值域的并集**. 这给我们提供一种求解分段函数值域的方法, 即先求出各个子函数的值域, 然后将值域取并集即可.

2. 研究分段函数的单调性: 服从的原则还是先局部后整体

(1) 方法一: 做出图象然后由图象观察

(2) 方法二: 若函数 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b) \\ f_2(x), & x \in [b, c] \end{cases}$,

若要保证 $f(x)$ 在定义域 $[a, c]$ 内单调递增, 则需要满足下面三个条件:

① $f_1(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上单调递增; ② $f_2(x)$ 在区间 $[b, c]$ 上单调递增; ③ **$f_1(b) \leq f_2(b)$**

4. 分段函数单调性的应用



求解参数取值范围 (参数在函数上)

21

2019~2020学年辽宁沈阳高一上学期期中 (重点高中协作校) 第10题5分

已知 $f(x) = \begin{cases} (4-a)x^2 + 2x + 3, & x \geq -1 \\ -\frac{a}{2x}, & x < -1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则实数 a 的取值范围 ().

A. $[3, 4)$

B. $\left[3, \frac{10}{3}\right]$

C. $\left[\frac{10}{3}, 4\right)$

D. $(0, 4)$

答案 B

解析 方法一：若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$$\text{则} \begin{cases} 4-a > 0 \Rightarrow a < 4 \\ -\frac{2}{2(4-a)} \leq -1 \Rightarrow a \geq 3 \\ -a < 0 \Rightarrow a > 0 \\ 4-a-2+3 \geq -\frac{a}{-2} \Rightarrow a \leq -\frac{10}{3} \end{cases},$$

$$\therefore 3 \leq a \leq \frac{10}{3},$$

$$\text{故 } a \in \left[3, \frac{10}{3}\right],$$

所以选 B.

方法二：若 $a = 4$ 时， $-2 + 3 \geq \frac{-4}{-2} = 2$ 不成立，

$$\text{综上：} a \in \left[3, \frac{10}{3}\right],$$

故选 B.

22 2020~2021 学年 10 月陕西西安雁塔区陕西师范大学附属中学高一上学期月考第 8 题 4 分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x-1, & x \leq 1 \\ \frac{ax+1}{x+a}, & x > 1 \end{cases}$ 满足对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$ 都有：

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \text{ 则实数 } a \text{ 的取值范围是 () .}$$

A. (1, 4]

B. (2, 4]

C. (2, 4)

D. (2, +∞)

答案 B

解析 $\therefore$ 函数 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x-1, & x \leq 1 \\ \frac{ax+1}{x+a}, & x > 1 \end{cases}$ 满足对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,

$$\text{且 } x_1 \neq x_2 \text{ 都有 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 函数 $y = (a-2)x-1$ 单调递增，

$$\therefore a-2 > 0, \text{ 即 } a > 2,$$

$$\text{又 } \therefore \text{函数 } y = \frac{ax+1}{x+a} = a - \frac{a^2-1}{x+a} \text{ 单调递增，}$$

$$\therefore a^2-1 > 0, \text{ 即 } a > 1 \text{ 或 } a < -1,$$

$$\text{又 } \therefore (a-2) \times 1 - 1 \leq \frac{a+1}{1+a},$$

$$\therefore a \leq 4,$$

综上可得，实数 a 的取值范围为 $(2, 4]$ 。

故选B。



求解参数取值范围（参数在定义域上）

23

2020~2021学年北京海淀区北京一零一中学高一上学期期中第15题5分

函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq t \\ x, & 0 < x < t \end{cases} (t > 0)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数，则 t 的取值范围是_____。

答案

$t \geq 1$

解析

因为当 $x \geq 1$ 时， $x \leq x^2$ ，所以 $t \geq 1$ 。



利用分段函数单调性求解不等式

24

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ -x^2 + 2x, & x < 1 \end{cases}$ ，若 $f(4 - 3a) < f(a)$ ，则实数 a 的取值范围是（ ）。

A. $(1, +\infty)$

B. $[1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1]$

D. $(-\infty, 1)$

答案

A

解析

当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = 2x$ 递增，

当 $x < 1$ ， $f(x) = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$ 在 $x < 1$ 递增，

且 $f(1) = 2$ ，在 $x < 1$ 时， $f(x) < 1$ ，

则有 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增，

$f(4 - 3a) < f(a)$ ，即为 $4 - 3a < a$ ，

解得， $a > 1$ 。

故选A。

25

2019~2020学年天津宝坻区高一上学期期中第10题4分

若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax - 2a, & x \geq 1 \\ ax + 1, & x < 1 \end{cases}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且满足 $f(2a+3) > f(1-a)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $[-2, 0)$

B. $\left[-2, -\frac{2}{3}\right)$

C. $[-2, 1]$

D. $\left(-\frac{2}{3}, 1\right]$

答案 B

解析

若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax - 2a, & x \geq 1 \\ ax + 1, & x < 1 \end{cases}$,

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2a}{-2} \leq 1 \\ a < 0 \\ a+1 \geq -1+2a-2a \end{cases},$$

解得: $-2 \leq a < 0$.

又 $f(2a+3) > f(1-a)$,

$\therefore 2a+3 < 1-a$,

故 $a < -\frac{2}{3}$.

故: $-2 \leq a < -\frac{2}{3}$.

故答案选: B.

精进不休 日新月异

【仅教师可见】

做此组题目时, 除了判断函数的单调性外, 要特别注意, 这类题可以 **判断其函数的奇偶性**, 从而大大降低解题难度。

26 2019~2020学年10月湖北武汉武昌区武汉中学高一上学期月考第12题5分

已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x-2) + f(x^2-4) < 0$ 的解集为 ().

A. $(-1, 6)$

B. $(-6, 1)$

C. $(-3, 2)$

D. $(-2, 3)$

答案 C

解析

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

不妨取 $x > 0$, 则 $f(-x) = -x^2 - 3x = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数,

则 $f(x-2) + f(x^2-4) = f(x-2) - f(4-x^2) < 0$,

即 $f(x-2) < f(4-x^2)$,

$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$\therefore x-2 < 4-x^2$ 即 $x^2 + x - 6 < 0$, 故 $-3 < x < 2$,

则 $f(x-2) + f(x^2-4) < 0$ 的解集为 $(-3, 2)$.

故选 C.

27

2019~2020 学年天津和平区天津市第二南开中学高一上学期期中第 17 题 4 分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0 \\ 4x - x^2, & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(2-a^2) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围为 ____.

答案

$(-2, 1)$

解析

函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x$, 由二次函数的性质知, 它在 $[0, +\infty)$ 上是增函数,

当 $x < 0$ 时, $f(x) = 4x - x^2$, 由二次函数的性质知, 它在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数,

该函数连续, 则函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数

$\because f(2-a^2) > f(a)$,

$\therefore 2-a^2 > a$

解得 $-2 < a < 1$

实数 a 的取值范围是 $(-2, 1)$.

故答案为: $(-2, 1)$.

28

2017~2018 学年浙江杭州滨江区浙江省杭州第二中学高一上学期期中第 9 题 3 分

已知分段函数 $f(x) = \begin{cases} 4+x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(f(a)) \geq f(f(a)+1)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-1, 0)$

B. $[-1, 0]$

C. $(-5, -4]$

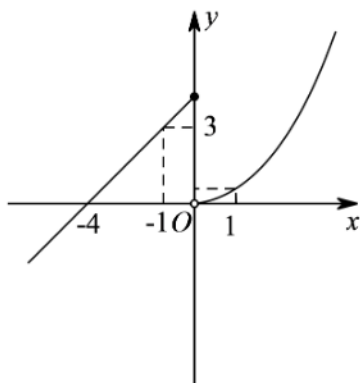
D. $[-5, -4]$

教法备注

复合函数求解不等式，应先将不等式中的 $f(a)$ 看作一个变量，再对原本的函数图像进行分析求解。

答案 C

解析 $f(x)$ 图像如下：



令 $f(a)$ 为 t ，则 $f(t) \geq f(t+1)$ ，

由图知 $\begin{cases} t \leq 0 \\ t+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (-1, 0]$ ，

即 $f(a) \in (-1, 0]$ ，

由图知， $-1 < 4+a \leq 0$ ，

解得 $a \in (-5, -4]$ ，

故选C。

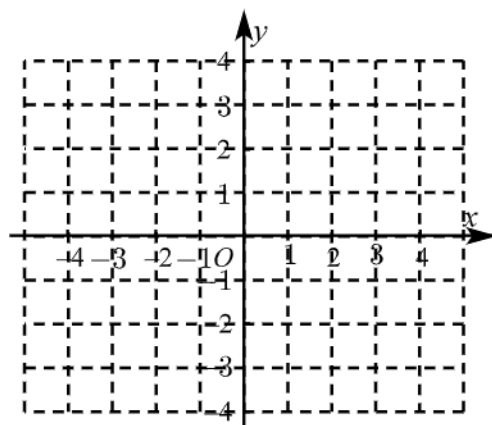
毫厘不伐 将用斧柯

29 2019~2020学年10月四川凉山西昌市西昌市川兴中学高一上学期月考第22题12分

已知函数 $f(x) = a|x| + x + 1$ ， $x \in \mathbf{R}$ 。

(1) 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，求实数 a 的取值范围。

(2) 当 $a = 1$ 时，作出函数 $f(x)$ 的图象，并解不等式 $f(1-x) > f(x^2+1)$ 。



教法备注

此题求解前应**先去掉绝对值将函数转化成分段函数的形式**。

注意第二问，出现了**常函数**，此处求解不等式应当格外注意。

答案

(1) $a \in (-1, 1)$.

(2) 画图见解析， $x \in (-1, 0)$.

解析

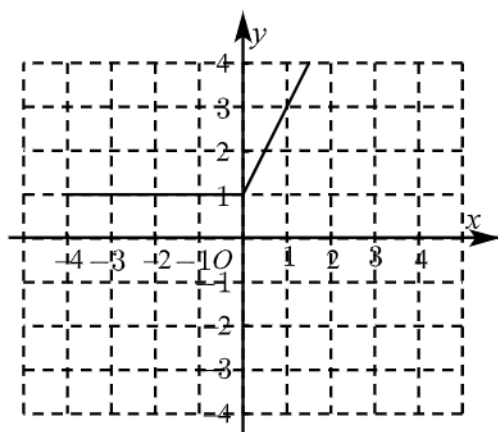
(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} (a+1)x+1, & x \geq 0 \\ (1-a)x+1, & x < 0 \end{cases}$,

$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

$$\therefore \begin{cases} a+1 > 0 \\ 1-a > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (-1, 1) .$$

(2) 当 $a=1$ 时， $f(x) = |x| + x + 1 = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$,

图象如下图，



$$\because x^2 + 1 \geq 1 ,$$

$$\therefore f(1-x) > f(x^2+1) \text{ 可得 } 1-x > x^2+1 ,$$

$$\therefore x \in (-1, 0) .$$