

03三角函数图像性质练习题

1. 三角函数图像性质

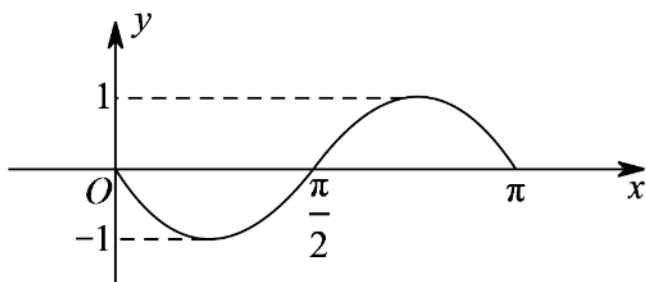
1 函数 $y = \sin(\pi - x) - 1$ 的图象 () .

- A. 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称 B. 关于 y 轴对称 C. 关于原点对称 D. 关于 $x = \pi$ 对称

答案 A

解析 显然函数 $y = \sin(\pi - x) - 1 = \sin x - 1$, 所以对称轴为 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k = 0$ 时, 对称轴为 $x = \frac{\pi}{2}$.

2 已知函数 $y = f(x) \sin x$ 的一部分图像如图所示, 则函数 $f(x)$ 可以是 () .



- A. $2 \sin x$ B. $2 \cos x$ C. $-2 \sin x$ D. $-2 \cos x$

答案 D

解析 A、把答案代入函数解析式得, $y = f(x) \sin x = 2(\sin x)^2$, 则 $y \geq 0$, 函数图像在 x 轴的上方, 故A错误;

B、把答案代入函数解析式得, $y = f(x) \sin x = \sin(2x)$, 函数图像和正弦函数图像一致, 故B错误.

C、把答案代入函数解析式得, $y = f(x) \sin x = -2(\sin x)^2$, 则 $y \leq 0$, 函数图像在 x 轴的下方, 故C错误;

D、把答案代入函数解析式得， $y = f(x) \sin x = -2 \sin x \cos x = -\sin(2x)$ ，函数图像和正弦函数图像关于 x 轴对称，故D正确。

故选D。

3 设函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，则下列结论错误的是()。

A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π

B. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减

答案 D

解析 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，周期 $T = 2k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

对称轴：令 $x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

$k = 3$ 时， $x = -\frac{\pi}{3} + 3\pi = \frac{8\pi}{3}$ ，

零点：令 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{\lambda}{6} + k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

$\therefore \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的一个零点，

单调减区间： $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时， $x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$ ，

$\therefore \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 不单调。

4 同时具有性质“①最小正周期是 π ，②图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，③在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上是增函数”的一个函数是()。

A. $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

B. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

C. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

D. $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

答案 C

解析 首先由最小正周期是 π ，可以排除A；

又因为 $y = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，不是最值，可以排除排除D；

B中，当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 时， $0 \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \pi$ ，单调递减，所以排除B；

因此C正确。

- 5 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0, x \in \mathbf{R})$, 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ().

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

答案 C

解析 方法一: $f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$.

令 $f(x) = 1$, 则 $\omega x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

则 $\omega|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{2}{3}\pi$, 故 $\omega = 2$, 最小正周期为 π .

方法二: $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 由 $2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 得

$\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 设 x_1, x_2 分别为距离最小的相邻交点的横坐标, 则 $\omega x_1 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$,

$\omega x_2 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 两式相减, 得 $x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\omega = 2$, 故

$f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π .

故选 C.

- 6 已知函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处取得最大值, 则函数 $y = \cos(2x + \varphi)$ 的图象 ().

A. 关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称 B. 关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称
C. 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 D. 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

答案 A

解析 $\because$ 函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处取得最大值,

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1,$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0,$$

$\therefore$ 函数 $y = \cos(2x + \varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称.

故选 A.

- 7 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π , 且 $f(-x) = f(x)$, 则 ().

- A. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减
 B. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 单调递减
 C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增
 D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 单调递增

答案 A

解析 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \cos(\omega x + \varphi) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{4})$,
 由最小正周期为 π 得 $\omega = 2$,
 又由 $f(-x) = f(x)$ 可知 $f(x)$ 为偶函数, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$,
 所以 $y = \sqrt{2} \cos 2x$, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减 .

2. 三角函数图像变换

8 将函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后, 得到一个偶函数的图象, 则 φ 的一个可能取值为 () .

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$

答案 C

解析 解: $\because y = \sin(2x + \varphi)$ 左移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 函数变为 $y = \sin[2(x + \frac{\pi}{8}) + \varphi] = \sin(2x + \frac{\pi}{4} + \varphi)$,
 $\therefore y = \sin(2x + \frac{\pi}{4} + \varphi)$ 是偶函数,
 $\therefore \frac{\pi}{4} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,
 $\therefore \varphi = k\pi + \frac{\pi}{4}$, 取 $k = 0$,
 得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 即 φ 一个可能取值为 $\frac{\pi}{4}$.
 故选 C .

9 将函数 $y = \sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后, 所得图象的一条对称轴方程是 () .

- A. $x = \frac{\pi}{8}$ B. $x = -\frac{\pi}{8}$ C. $x = \frac{\pi}{4}$ D. $x = -\frac{\pi}{4}$

答案 B

解析 将函数 $y = \sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后，
 所得图象对应的函数解析式为 $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，
 令 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ，求得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ ，
 $\therefore y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的对称轴方程为： $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$ 。
 当 $k = -1$ 时， $x = -\frac{\pi}{8}$ 。

10 要得到函数 $y = \cos 2x$ 的图象，只需将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象沿 x 轴 ()。

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 B. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 C. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

答案 A

解析 $\because y = \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\therefore$ 只需将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，可得 $y = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$ 。

11 将函数 $y = 2 \cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，再将所得图象上的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，得到的函数解析式为 ()。

- A. $y = 2 \cos 2x$ B. $y = -2 \cos 2x$ C. $y = -2 \sin 2x$ D. $y = 2 \sin 2x$

答案 D

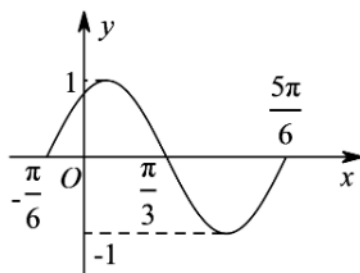
解析 将函数 $y = 2 \cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，
 可得函数 $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin x$ 的图象；
 再将所得图象的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)，
 可得到的函数 $y = 2 \sin 2x$ 的图象。

将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半, 纵坐标不变, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y = \sin x$ 的图象, 则 $f(\frac{\pi}{6}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到的函数解析式是 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$; 再把其图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍, 纵坐标不变, 所得函数的解析式是 $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$, 所以 $f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

13 下图是函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$) 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上的图象, 为了得到这个函数的图象, 只要将 $y = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象上所有的点 ().



- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变
- B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的2倍, 纵坐标不变
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变
- D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的2倍, 纵坐标不变

答案 A

解析 由图象可知函数的周期为 π , 振幅为1, 所以函数的表达式可以是 $y = \sin(2x + \varphi)$.

代入 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 可得 φ 的一个值为 $\frac{\pi}{3}$,

故图象中函数的一个表达式是 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$,

即 $y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6})$,

所以只需将 $y = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

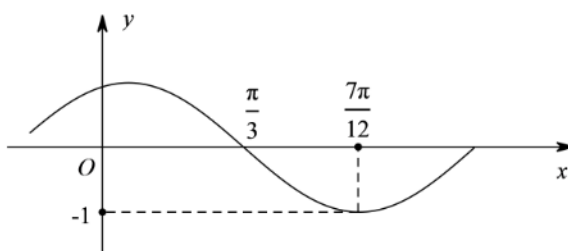
再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变.

故选：A .

3. 综合运用

14 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图像如下图所示,

为了得到 $f(x)$ 的图像, 则只需将 $g(x) = \sin 2x$ 的图像 () .



- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

- B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

答案 C

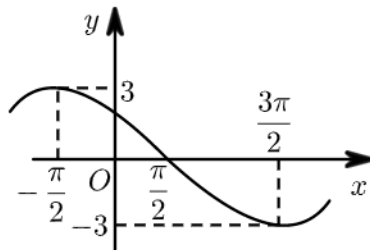
解析 由 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$ 得 $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi),$$

$$\text{由 } \frac{7\pi}{6} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ 及 } |\varphi| < \frac{\pi}{2} \text{ 得 } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 选C.}$$

15 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可以为 () .



- A. $f(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
- C. $f(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$

- B. $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
- D. $f(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{3\pi}{4}\right)$

答案 D

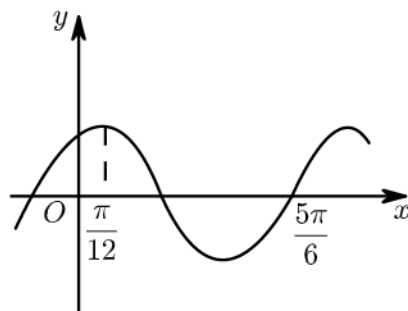
解析 由题意可得： $A = 3$ ， $\frac{1}{2}T = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ ，从而解得： $T = 4\pi$ ，从而可求 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ ，
 $\therefore$ 函数图象过点 $(-\frac{\pi}{2}, 3)$ ，
 $\therefore 3 = 3\sin(-\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \varphi)$ ，
 $\therefore$ 可解得： $\varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ．
 $\therefore$ 当 $k = 0$ 时有： $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ．
 故选D．

- 16 若函数 $f(x) = \sin \omega x (x > 0)$ 在区间 $(0, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递增，且 $f(\frac{2\pi}{3}) > f(\frac{5\pi}{6})$ ，则 ω 的值不可能
 是()
 A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{3}{4}$

答案 A

解析 由题干条件可知周期最小为 $\frac{8\pi}{3}$ ，最大为 3π ，所以 $\frac{2}{3} < \omega \leq \frac{3}{4}$ ．
 故选择A选项．

- 17 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数， $A > 0, \omega > 0$)，且函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，则有()．



- A. $f(\frac{5}{3}\pi) < f(-\frac{3}{4}\pi) < f(\frac{7}{4}\pi)$ B. $f(\frac{5}{3}\pi) < f(\frac{7}{4}\pi) < f(-\frac{3}{4}\pi)$
 C. $f(-\frac{3}{4}\pi) < f(\frac{7}{4}\pi) < f(\frac{5}{3}\pi)$ D. $f(-\frac{3}{4}\pi) < f(\frac{5}{3}\pi) < f(\frac{7}{4}\pi)$

答案 B

解析

由图象知 $\frac{3}{4}T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12}$, $\therefore$ 周期 $T = \pi$.

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\pi\right) > 0 .$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0 .$$

故选B .