

07自测模拟卷练习题

一、选择题 (本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

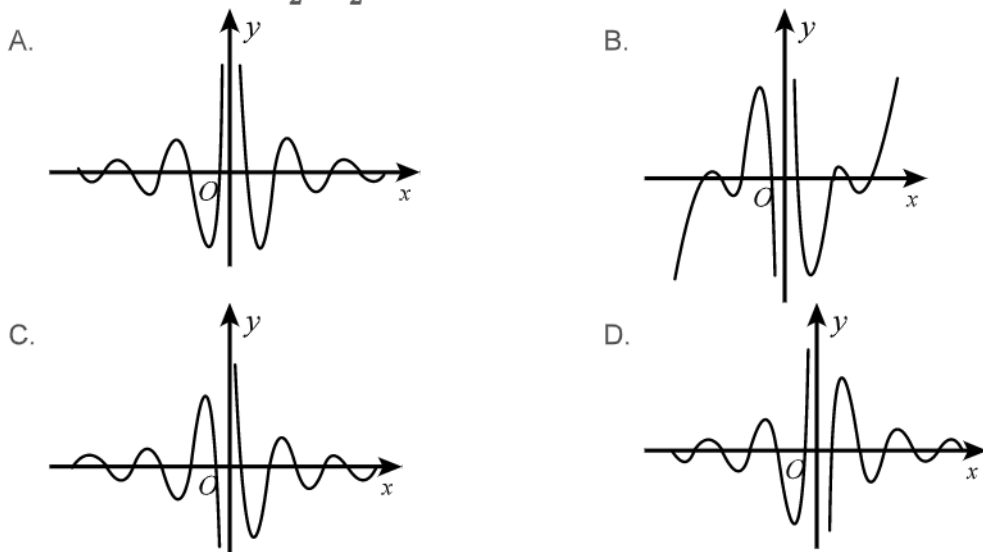
1 (5分) 设集合 $M = \{x | x^2 \leq 4\}$, 集合 $N = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, $\complement_M N = (\quad)$.

- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$
C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

2 (5分) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 " $\frac{1}{x} < 1$ " 是 " $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$ " 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3 (5分) 若函数 $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$ 的图象大致为 ().



4 (5分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增则 ().

- A. $f(\log_2 \pi) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f(2^{-\pi})$ B. $f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) f(2^{-\pi}) > f(\log_2 \pi)$
C. $f(2^{-\pi}) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f(\log_2 \pi)$ D. $f(2^{-\pi}) > f(\log_2 \pi) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right)$

- 5 (5分) 袋中装有标号为1, 2, 3, 4, 5, 6且大小相同的6个小球, 从袋子中一次性摸出两个球, 记下号码并放回, 如果两个号码的和是3的倍数, 则获奖, 若有5人参与摸球, 则恰好2人获奖的概率是() .

A. $\frac{40}{243}$ B. $\frac{70}{243}$ C. $\frac{80}{243}$ D. $\frac{38}{243}$

- 6 (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角A、B、C的对边分别为a、b、c, 若 $a=1$, $c=2\sqrt{3}$,

$b \sin A = a \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right)$, 则 $\sin C =$ () .

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{57}}{19}$

- 7 (5分) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $M(1, m)$ 到其焦点的距离为5, 双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为A且离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 若双曲线的一条渐近线与直线AM垂直,

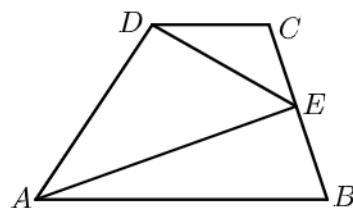
则双曲线的方程为() .

A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ C. $x^2 - 2y^2 = 1$ D. $x^2 - 4y^2 = 1$

- 8 (5分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + (x-t)^2}{x}$, $t \in \mathbf{R}$, 若存在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $f(x) + xf'(x) > 0$, 则实数t的取值范围是() .

A. $(-\infty, \sqrt{2})$ B. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$ D. $(-\infty, 3)$

- 9 (5分) 如图梯形ABCD, $AB \parallel CD$ 且 $AB=5$, $AD=2DC=4$, E在线段BC上, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为() .



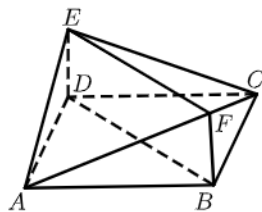
A. $\frac{15}{13}$ B. $\frac{95}{13}$ C. 15 D. $-\frac{15}{13}$

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

10 (5分) 若复数 $2 + i = (1 + i)(a + bi)$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 其中 i 是虚数单位，则 $b =$ _____ .

11 (5分) $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中， $\frac{1}{x^2}$ 项的系数为 _____ .

12 (5分) 已知如图所示的多面体 $EF-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，四边形 $BDEF$ 是矩形， $ED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ，若 $BF = BD = 2$ ，则多面体的体积 _____ .



13 (5分) 若圆 $C_1: (x+a)^2 + y^2 = 8 + a^2$ ($a > 0$) 与圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ ，则圆 C_2 上位于 AB 右方的点到 AB 的最长距离为 _____ .

14 (5分) 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$ 的最小值为 _____ .

15 (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & -3 \leq x \leq 0 \\ 2x - 3, & x > 0 \end{cases}$ ，若方程 $f(x) + |x - 2| - kx = 0$ 有且只有三个不相等的实数解，则实数 k 的取值范围是 _____ .

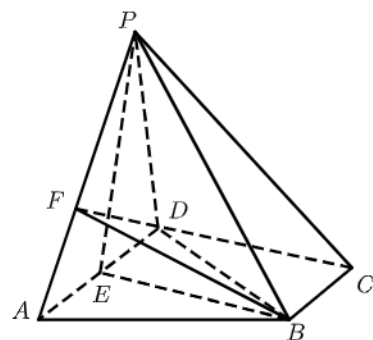
三、解答题（本大题共5小题，共75分）

16 (14分) 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R})$,

(1) (6分) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) (8分) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调性.

- 17 (15分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$ 且 $CD = \sqrt{3}$, E 为 AD 的中点, F 是棱 PA 的中点, $PA = 2$, $PE \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp CD$.



- (1) (5分) 证明: $BF \parallel$ 平面 PCD .
- (2) (4分) 求二面角 $P-BD-F$ 的正弦值.
- (3) (6分) 在线段 PC (不含端点) 上是否存在一点 M , 使得直线 BM 和平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$? 若存在, 求此时 PM 的长, 若不存在, 说明理由.

18 (15分) 如图, 已知中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆的一个焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 是椭圆上的一点.

(1) (5分) 求椭圆的标准方程.

(2) (10分) 设椭圆的上、下顶点分别为 A 、 B , $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$) 是椭圆上异于 A 、 B 的任意一点, $PQ \perp y$ 轴, Q 为垂足, M 为线段 PQ 的中点, 直线 AM 交直线 $l: y = -1$ 于点 C , N 为线段 BC 的中点.

① (5分) 求证: $OM \perp MN$.

② (5分) 若 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 y_0 的值.

19 (15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3(a_n - 2)$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，数列 $\{b_n\}$ 是公差为0的等差数列，且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$ ， b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项。

(1) (5分) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) (4分) 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}}$ ；

(3) (6分) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases}$ ($k \in \mathbf{N}^*$)，求 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)。

20 (16分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x \ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

(1) (5分) 求实数 b 的值.

(2) (5分) 当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) (6分) 当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2\ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$ 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.