

07自测模拟卷

一、选择题（本大题共9小题，每小题5分，共45分）

1 2020年天津高三上学期高考模拟第1题5分

（5分）已知全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ，则集合 $A \cap \complement_U B =$ （ ）.

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-2, 2\}$ C. $\{-2, -1\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$

答案 B

解析 $\because$ 全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ，

$$\complement_U B = \{-2, 2\},$$

$$A = \{-2, 0, 1, 2\},$$

$$\therefore A \cap \complement_U B = \{-2, 2\}.$$

故选B.

2 2020年天津和平区高三二模第2题5分

（5分）设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^3 < 1$ ”是“ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ”的（ ）.

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 “ $x^3 < 1$ ”解得 $x < 1$ ，

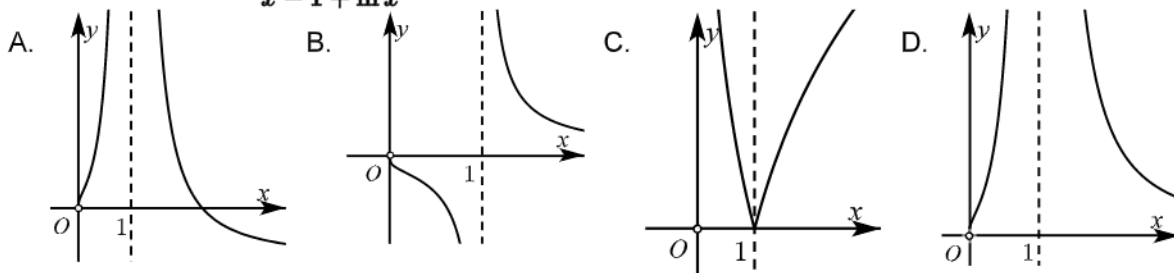
$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \text{ 解得 } 0 < x < 1,$$

则“ $x^3 < 1$ ”是“ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ”的必要而不充分条件.

故选B.

3 2020年天津和平区高三三模第3题5分

(5分) 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1+\ln x}$ 的图象大致为 () .

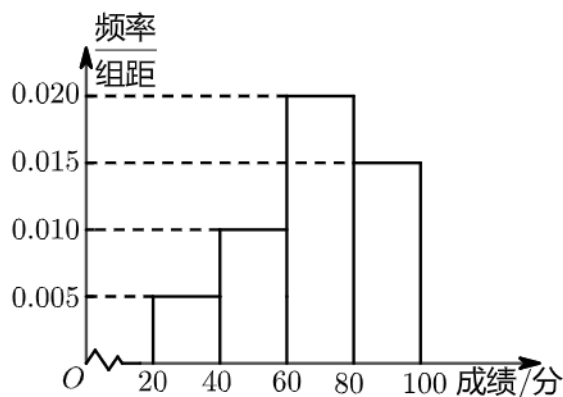


答案 B

解析 取 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{\frac{1}{e}-2} < 0$, 排除选项A、C、D. 故选B.

4 2020~2021学年11月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考(统练7)第4题5分

(5分) 某学校组织学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$, 若低于60分的人数是15人, 则该班的学生人数是 () .



A. 45

B. 50

C. 55

D. 60

答案 B

解析 根据频率分布直方图的特点可知, 置于60分的频率是 $0.005 + 0.01 \times 20 = 0.3$,

所以该班的学生人数是 $\frac{15}{0.3} = 50$.

故选B.

5 2020~2021学年天津河西区高三上学期期末第5题5分

(5分) 设 $a = 2^{\ln 2}$, $b = -\log_{\frac{1}{2}} 4$, $c = \log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系是 () .

A. $b > a > c$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $a > c > b$

答案 A

解析 $\because 0 < \ln 2 < 1$,

$$\therefore 1 < 2^{\ln 2} < 2,$$

$$\because b = -\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_2 4 = 2,$$

$$\text{又} \because 0 < \log_3 2 < 1,$$

$$\therefore b > a > c.$$

故选A.

6 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末(七校联考)第5题5分

(5分) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$, 则正方体外接球的体积为 () .

A. $4\sqrt{3}\pi$

B. $\sqrt{6}\pi$

C. $32\sqrt{3}\pi$

D. $8\sqrt{6}\pi$

答案 B

解析 设正方体的棱长为 a , 则 $BD = \sqrt{2}a$,

由于三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$,

$$\text{则} 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = 4\sqrt{3},$$

$$\text{解得} a = \sqrt{2},$$

$$\text{又} 2R = \sqrt{3}a = \sqrt{6},$$

$$\text{即} R = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{所以正方体的外接球的体积为} \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}\pi.$$

故选B.

7 2020年天津河北区高三二模第6题5分

(5分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 和直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, 若过双曲线 C 的左焦点和点 $(0, -b)$ 的直线与直线 l 平行, 则双曲线 C 的离心率为().

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 5

答案 A

解析 $\because$ 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 左焦点为 $F(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$,

则过点 $F(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 和点 $(0, -b)$ 的直线为 $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - b$,

由曲线 $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - b$ 与直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ 平行,

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{3}{5} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 3 = -b \end{cases},$$

解得 $a = \frac{4}{3}b$,

$\therefore$ 双曲线 C 的离心率为 $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \frac{5}{4}$, 故A正确.

故选A.

8 2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第7题5分

(5分) 已知函数 $f(x) = 1 + \cos 2x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则下列结论中正确的是().

- A. $f(x)$ 是最小正周期为 π 的偶函数
B. $f(x)$ 的条对称轴是 $x = \frac{\pi}{3}$
C. $f(x)$ 的最大值为2
D. 将函数 $y = \sqrt{3} \sin 2x$ 的图象左移 $\frac{\pi}{6}$ 得到函数 $f(x)$ 的图象

答案 D

解析 $f(x) = 1 + \cos 2x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $f(x)$ 不是偶函数, A错,

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, B错,

$f(x)$ 最大值为 $\sqrt{3}$, C错, 故选D.

9 2020年天津河西区高三二模第9题5分

(5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|-1, & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = x \cdot f(x) - a (a \geq -1)$ 的零点个数为2, 则实数 a 的取值范围是().

- A. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$ 或 $a = -1$
C. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$ 或 $a = -1$

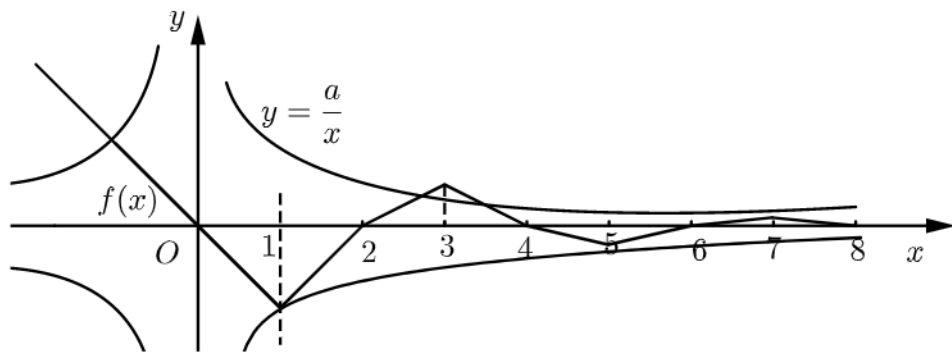
- B. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$
D. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$

答案 D

解析

$$\begin{aligned} x \leq 2 \text{ 时}, f(x) &= \begin{cases} x-2, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x, & x < 1 \end{cases}, \\ 2 < x \leq 4 \text{ 时}, f(x) &= -\frac{1}{2}[|x-3|-1], \\ 4 < x \leq 6 \text{ 时}, f(x) &= \frac{1}{4}[|x-5|-1], \\ &\dots \end{aligned}$$

故函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{a}{x}$ 的图象如下,



令 $g(x) = x \cdot f(x) - a = 0$, 当 $x = 0$ 时, 不符合题意,

当 $x \neq 0$ 时, 得 $f(x) = \frac{a}{x}$, 若 $a > 0$, 可得

$$\begin{cases} \frac{a}{3} < \frac{1}{2} \\ \frac{a}{7} > \frac{1}{8} \end{cases}, \text{解得: } \frac{7}{8} < a < \frac{3}{2},$$

若 $a = 0$, $g(x) = x \cdot f(x) - a$ 有无数个零点, 不合题意,

若 $-1 \leq a < 0$, 因 $y = \frac{a}{x}$ 的图象的左支与 $y = f(x)$ 的图象有一个交点, 则右支必然只能交于一点,

当 $-1 < a < 0$ 时, 因为 $f(1) = -1 < \frac{a}{1}$, 所以在 $(0, 2)$ 上有两个交点, 不合题意,

当 $a = -1$ 时, $\frac{a}{5} > -\frac{1}{4}$, 不合题意,

综上, 实数 a 的取值范围是 $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$.

故选: D.

二、填空题 (本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10 2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第10题5分

(5分) 已知复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$, 则 $|z| =$ _____ .

答案 $5\sqrt{2}$

解析 复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$

$$= \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} + 5i$$

$$= \frac{10i + 5i^2}{4 - i^2} + 5i$$

$$= -1 + 7i,$$

则 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 5\sqrt{2},$

故答案为: $5\sqrt{2}$.

11 2020年陕西西安高新区西安高新唐南中学高三二模理科第14题5分

(5分) 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项是 _____ .

答案 -84

解析 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式为:

$$T_{r+1} = C_9^r \cdot (\sqrt{x})^{9-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= C_9^r \cdot x^{\frac{9-r}{2}} \cdot (-1)^r \cdot x^{-r}$$

$$= C_9^r \cdot (-1)^r \cdot x^{\frac{9-3r}{2}},$$

当 $r = 3$ 时, 为常数项,

$$C_9^3 \cdot (-1)^3 = -84 .$$

12 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末（七校联考）第12题5分

（5分）已知直线 $l: y = x + m$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ 截得的弦长等于该圆的半径，则实数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 2或-4

解析 由 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$,

$$\text{得} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 6 ,$$

则圆心 $C(2, 1)$, 半径为 $\sqrt{6}$,

$$C \text{到直线} y = x + m \text{的距离} d = \frac{|2 - 1 + m|}{\sqrt{2}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{2}} ,$$

$$\therefore \text{直线} y = x + m \text{被圆} C \text{截得的弦长为} 2\sqrt{6 - \frac{(m + 1)^2}{2}} = \sqrt{6} ,$$

$$\text{整理得} (m + 1)^2 = 9 , \text{解得} m = 2 \text{或} -4 .$$

故答案为：2或-4 .

13 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟（4月）第13题5分

（5分）在某地区某高传染性病毒流行期间，为了建立指标显示疫情已受控制，以便向该地区居民显示可以过正常生活，有公共卫生专家建议的指标是“连续7天每天新增感染人数不超过5人”，根据连续7天的新增病例数计算，下列各个选项中，一定符合上述指标的是 .

- ①平均数 $\bar{x} \leq 3$;
- ②标准差 $S \leq 2$;
- ③平均数 $\bar{x} \leq 3$ 且标准差 $S \leq 2$;
- ④平均数 $\bar{x} \leq 3$ 且极差小于或等于2 ;
- ⑤众数等于1且极差小于或等于4 .

答案 ④⑤

解析

①错. 举反例: $0, 0, 0, 0, 2, 6, 6$; 其平均数 $\bar{x} = 2 \leq 3$, 不符合条件;

②错. 举反例: $6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$; 其标准差 $s = 0 \leq 2$, 不符合条件;

③错. 举反例: $0, 3, 3, 3, 3, 3, 6$; 其平均数 $\bar{x} \leq 3$ 且标准差 $s = \sqrt{\frac{18}{7}} \leq 2$, 不符合条件;

④对. 若极差小于2, 显然符合条件;

若极差小于或等于2, 有可能 (1) $0, 1, 2$; (2) $1, 2, 3$; (3) $2, 3, 4$; (4) $3, 4, 5$;

(5) $4, 5, 6$.

在平均数 $\bar{x} \leq 3$ 的条件下, 只有 (1) (2) (3) 成立, 符合条件;

⑤对. 在众数等于1且极差小于或等于4时, 其最大数不超过5, 符合条件.

故选④⑤.

14 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第14题5分

(5分) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{3}$, 则 $a+2b$ 的最小值为 _____.

答案 $3+6\sqrt{2}$

解析

$\because a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{3}$,

$\therefore a+2b = (a+2) + 2(b+2) - 6 = 3[(a+2) + 2(b+2)](\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2}) - 6$

$= 9 + \frac{6(b+2)}{a+2} + \frac{3(a+2)}{b+2} - 6 \geq 9 + 2\sqrt{\frac{6(b+2)}{a+2} \cdot \frac{3(a+2)}{b+2}} - 6 = 3 + 6\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{6(b+2)}{a+2} = \frac{3(a+2)}{b+2}$ 且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{3}$, 即 $b = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $a = 1 + 3\sqrt{2}$ 时取等号,

故 $a+2b$ 的最小值为 $3+6\sqrt{2}$.

故答案为: $3+6\sqrt{2}$.

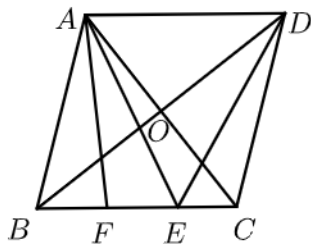
15 2020年天津宁河县芦台一中高三二模第15题5分

(5分) 已知菱形 $ABCD$ 的边长为3, 对角线 AC 与 BD 相交于 O 点, $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$, E 为 BC 边 (包含端点) 上一点, 则 $|\overrightarrow{EA}|$ 的取值范围是 _____, $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED}$ 的最小值为 _____.

答案 1: $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$

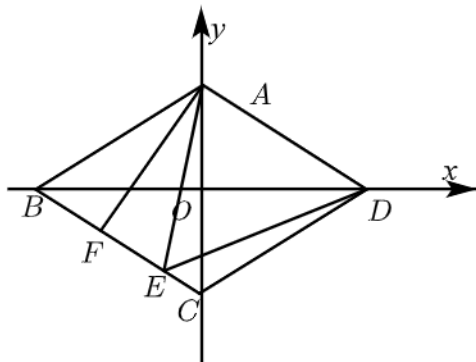
2: $\frac{23}{4}$

解析 根据菱形性质可得 $OC = \sqrt{3}$ ，则 $BO = \sqrt{6}$ 。



①作 $AF \perp BC$ ，则 $AF = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{2}$ ，此时 AE 最短，当 E 与 C 重合时， AE 最长，故 $2\sqrt{2} \leq AE \leq 2\sqrt{3}$ ，即 $|\vec{EA}| \in [2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$ 。

②以 O 为原点， BD 所在直线为 x 轴建系如图：



则 $A(0, \sqrt{3})$ ， $B(-\sqrt{6}, 0)$ ， $C(0, -\sqrt{3})$ ， $D(\sqrt{6}, 0)$ ，

所以 $BC: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{3}$ ，设 $E\left(m, -\frac{\sqrt{2}}{2}m - \sqrt{3}\right)$ ，

则 $\vec{EA} \cdot \vec{ED} = \left(-m, 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}m\right) \cdot \left(\sqrt{6} - m, \frac{\sqrt{2}}{2}m + \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$ ，其中 $m \in [-\sqrt{6}, 0]$ ，

对称轴为 $m = -\frac{\sqrt{6}}{12} \in [-\sqrt{6}, 0]$ ，故当 $m = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ 时 $\vec{EA} \cdot \vec{ED}$ 最小，最小值为 $\frac{23}{4}$ 。

故答案为： $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$ ； $\frac{23}{4}$ 。

三、解答题（本大题共5小题，共75分）

16 2020~2021学年天津高三上学期期末（部分区）第16题14分

（14分）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $2\sin B \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = \sin A$ 。

（1）（6分）求角 B 的大小。

（2）（8分）若 $AB = 4$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，求 $\sin 2A$ 的值。

答案 （1） $B = \frac{\pi}{6}$ 。

(2) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

解析

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $2\sin B \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = \sin A$

所以 $\sqrt{3}\sin B \cos C + \sin B \cos C = \sin(B + C)$,

即 $\sqrt{3}\sin B \sin C + \sin B \cos C = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,

所以 $\sqrt{3}\sin B \sin C = \cos B \sin C$,

又 $\sin C \neq 0$,

所以 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $0 < B < \pi$,

所以 $B = \frac{\pi}{6}$.

(2) 设 $BC = t$. 由题意及(1)得, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4t \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$,

解得 $t = \sqrt{3}$, 即 $BC = \sqrt{3}$,

在 $\triangle ABC$, 由余弦定理, 得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$
 $= 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 4 \times \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 7$,

所以 $AC = \sqrt{7}$,

由正弦定理, 得 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$,

所以 $\sin A = \frac{BC}{AC} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

因为 $AC = \sqrt{7} > \sqrt{3} = BC$, 以 $\angle B > \angle A$,

所以 $0 < \angle A < \frac{\pi}{6}$,

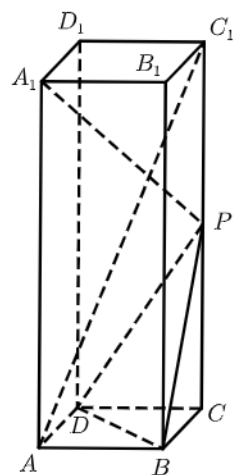
所以 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$,

所以 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{14} \times \frac{5\sqrt{7}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

17

2020~2021学年天津河北区高三上学期期末第17题15分

(15分) 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形, 点 P 为侧棱 CC_1 上的一点, 且 $AA_1 = 3AB = 3$.



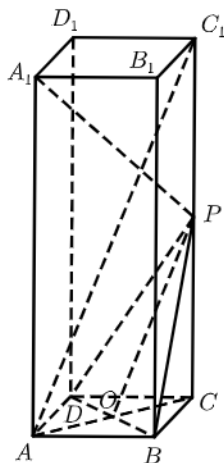
- (1) (5分) 若点 P 为 CC_1 的中点, 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 PBD .
- (2) (4分) 若 $\frac{PC}{CC_1} = \frac{1}{3}$, 求直线 A_1P 与平面 PBD 所成角的正弦值.
- (3) (6分) 若二面角 $B-PD-C$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 求 PC 的长.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- (3) 2.

解析

- (1) 连接 AC 交 BD 于 O 点, 连接 PO , 如下图,



在 $\triangle CAC_1$ 中有 P 、 O 分别为 CC_1 、 AC 的中点,

所以 $PO \parallel AC_1$, 又 $PO \subset$ 面 PBD ,

$AC_1 \not\subset$ 面 PBD ,

$\therefore AC_1 \parallel$ 平面 PBD .

- (2) $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形,
- $AA_1 = 3AB = 3$, $\frac{PC}{CC_1} = \frac{1}{3}$,

$\therefore CC_1 = 3, PC = BC = AB = 1, PC_1 = 2$, 可得 $AC = A_1C_1 = \sqrt{2}$,

$\therefore A_1P = \sqrt{6}, PO = \frac{\sqrt{6}}{2}, A_1O = \frac{\sqrt{38}}{2}$,

在 $\triangle A_1PO$ 中,

$$A_1P^2 + PO^2 - 2A_1P \cdot PO \cdot \cos \angle A_1PO = A_1O^2,$$

则有 $\cos \angle A_1PO = -\frac{1}{3} < 0$,

$\therefore PO$ 在底面的射影为 OC , 而 $DB \perp OC$

即 $DB \perp PO$, 同理 $DB \perp A_1O$,

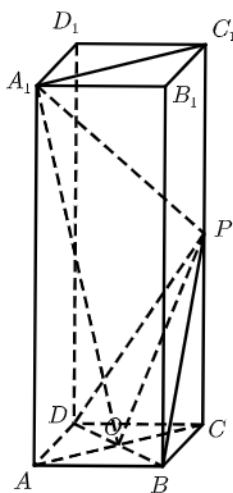
且 $A_1O \cap PO = O$,

$\therefore DB \perp$ 面 A_1PO ,

又 $DB \subset$ 面 PBD , 故面 $PBD \perp$ 面 A_1PO ,

$\therefore$ 综上所述: $\angle A_1PO$ 的补角为直线 A_1P 与平面 PBD 所成角,

故其正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

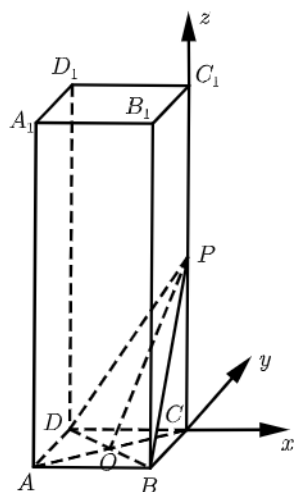


(3) 构建以 C 为原点,

$\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC_1}$ 为 x 轴, y 轴, z 轴正方向的空间直角坐标系,

则有 $C(0, 0, 0), B(0, -1, 0), D(-1, 0, 0)$,

若令 PC 的长为 a 有 $P(0, 0, a)$,



$$\therefore \overrightarrow{DB} = (1, -1, 0), \overrightarrow{PB} = (0, -1, -a),$$

在面 DBP 上若方向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} x - y = 0 \\ -y - az = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 即 } \vec{m} = \left(1, 1, -\frac{1}{a}\right),$$

而面 DCP 上的一个方向量为 $\vec{n} = (0, 1, 0)$,

$$\therefore \text{二面角 } B - PD - C \text{ 的余弦值为 } \frac{2}{3},$$

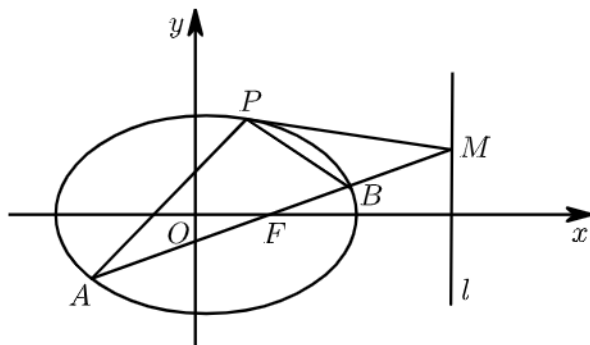
$$\text{有 } \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}} = \frac{2}{3}, \text{ 可得 } a = 2,$$

即 $PC = 2$.

18 2020年天津红桥区高三二模第19题15分

(15分) 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为

$x = 4$.



(1) (5分) 求椭圆 C 的方程;

(2) (10分) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记

PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. 若存在求 λ 的

值；若不存在，说明理由．

答案

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意，证明见解析．

解析

$$(1) \text{ 由 } P\left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ 在椭圆上得, } \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \text{ ①}$$

依题设知 $a = 2c$ ，则 $b^2 = 3c^2$ ②，

$$\text{②代入①解得 } c^2 = 1, a^2 = 4, b^2 = 3.$$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ．

(2) 方法一：由题意可设 AB 的斜率为 k ，

则直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$ ③

代入椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 并整理，得 $(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4(k^2 - 3) = 0$ ，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则有 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4(k^2 - 3)}{4k^2 + 3} \text{ ④}$$

在方程③中令 $x = 4$ 得， M 的坐标为 $(4, 3k)$ ．

$$\text{从而 } k_1 = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1}, k_2 = \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1}, k_3 = \frac{3k - \frac{3}{2}}{4 - 1} = k - \frac{1}{2}.$$

注意到 A, F, B 共线，则有 $k = k_{AF} = k_{BF}$ ，即有 $\frac{y_1}{x_1 - 1} = \frac{y_2}{x_2 - 1} = k$ ．

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} = \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} \right) \\ &= 2k - \frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} \text{ ⑤} \end{aligned}$$

$$\text{④代入⑤得 } k_1 + k_2 = 2k - \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{8k^2}{4k^2 + 3} - 2}{\frac{4(k^2 - 3)}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2}{4k^2 + 3} + 1} = 2k - 1,$$

又 $k_3 = k - \frac{1}{2}$ ，所以 $k_1 + k_2 = 2k_3$ ．故存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意．

方法二：设 $B(x_0, y_0) (x_0 \neq 1)$ ，则直线 FB 的方程为： $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$ ，

令 $x = 4$ ，求得 $M\left(4, \frac{3y_0}{x_0 - 1}\right)$ ，

从而直线 PM 的斜率为 $k_3 = \frac{2y_0 - x_0 + 1}{2(x_0 - 1)}$ ，

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } A\left(\frac{5x_0 - 8}{2x_0 - 5}, \frac{3y_0}{2x_0 - 5}\right),$$

则直线 PA 的斜率为 $k_1 = \frac{2y_0 - 2x_0 + 5}{2(x_0 - 1)}$ ，直线 PB 的斜率为： $k_2 = \frac{2y_0 - 3}{2(x_0 - 1)}$ ，

$$\text{所以 } k_1 + k_2 = \frac{2y_0 - 2x_0 + 5}{2(x_0 - 1)} + \frac{2y_0 - 3}{2(x_0 - 1)} = \frac{2y_0 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = 2k_3,$$

故存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意.

19

2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第19题15分

(15分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 - a_2 = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.

(1) (5分) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(2) (10分) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 且 $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

① (4分) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

② (6分) 求 $\sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1}$.

答案

(1) $S_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - \frac{5}{6}$.

(2) ① $b_n = n$.

② $\frac{5}{3} + (n-1) \times 5 \times 3^{n-1}$.

解析

(1) 由题意得:

$$\begin{cases} a_3 - a_2 = 10 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_2^3 = 125 \end{cases}$$

得: $a_2 = 5$, $a_3 = 15$,

$\therefore q = \frac{a_3}{a_2} = 3$,

$\therefore a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 5 \times 3^{n-2}$,

即 $a_n = 5 \times 3^{n-2}$,

$\therefore S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{\frac{5}{3} - 5 \times 3^{n-2} \times 3}{1 - 3}$,

整理得 $S_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - \frac{5}{6}$.

(2) ① $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - 1$,

$n \geq 2$ 时, $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n-1} = b_n - 1$,

两式相减得: $\frac{b_n}{n} = b_{n+1} - b_n$,

整理得 $\frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{b_n}{n} (n \geq 2)$,

令原式 $n = 1$, $b_1 = b_2 - 1$, 得 $b_2 = 2$,

$\therefore \frac{b_2}{2} = \frac{b_1}{1}$,

$\therefore \left\{ \frac{b_n}{n} \right\}$ 为一个常数列, $n \in \mathbf{N}^+$,

$$\text{首项为 } \frac{b_1}{1} = 1 ,$$

$$\therefore \frac{b_n}{n} = 1 ,$$

$$\therefore b_n = n .$$

$$\textcircled{2} \quad a_i b_{2i-1} = (5 \times 3^{i-2}) (2i-1) ,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} = (5 \times 3^{-1}) \times 1 + (5 \times 3^0) \times 3 + \cdots + (5 \times 3^{n-2}) (2n-1) ,$$

$$3 \sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} = (5 \times 3^0) \times 1 + (5 \times 3^1) \times 3 + \cdots + (5 \times 3^{n-2}) \cdot (2n-3) \\ + (5 \times 3^{n-1}) \cdot (2n-1)$$

,

两式相减得：

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} \\ &= \frac{5}{3} + 2 \cdot (5 \times 3^0 + 5 \times 3^1 + \cdots + 5 \times 3^{n-2}) - (5 \times 3^{n-1}) (2n-1) \\ &= \frac{5}{3} + 2 \times \frac{5 - 5 \times 3^{n-1}}{1-3} - (5 \times 3^{n-1}) (2n-1) \\ &= -\frac{10}{3} + (2-2n) \times 5 \times 3^{n-1} , \\ &\therefore \sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} = \frac{5}{3} + (n-1) \times 5 \times 3^{n-1} . \end{aligned}$$

20 2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第21题

(16分) 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$) .

(1) (5分) 若 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线为 $x - ey + b = 0$, 求 a , b 的值 .

(2) (5分) 求 $f(x)$ 的单调区间 .

(3) (6分) 若 $g(x) = ax - e^x$, 求证 : 在 $x > 0$ 时 , $f(x) > g(x)$.

答案

(1) $a = \frac{2}{e}$; $b = -2e$.

(2) 单调减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

(3) 证明见解析 .

解析

(1) $\because f(x) = ax - 2 - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$) , $\therefore f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$,

又 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 的切线的斜率为 $\frac{1}{e}$,

$$\therefore f'(e) = \frac{ae-1}{e} = \frac{1}{e} , \therefore a = \frac{2}{e} ,$$

$\therefore$ 切点为 $(e, -1)$ 把切点代入切线方程得 : $b = -2e$;

(2) 由(1)知: $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x} (x > 0)$,

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调减函数,

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得: $x = \frac{1}{a}$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 变化情况如下,

当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减,

当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 单 $f(x)$ 单调增,

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

(3) 当 $x > 0$ 时, 要证 $f(x) - ax + e^x > 0$, 即证 $e^x - \ln x - 2 > 0$,

令 $h(x) = e^x - \ln x - 2 (x > 0)$, 只需证 $h(x) > 0$,

$\therefore h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 由指数函数及幂函数的性质知:

$h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数又 $h'(1) = e - 1 > 0$,

$$h'\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} - 3 < 0,$$

$\therefore h'(1) < h'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$, 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 内存在唯一的零点,

也即 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点设 $h'(x)$ 的零点为 t ,

$$\text{则 } h'(t) = e^t - \frac{1}{t} = 0,$$

$$\text{即 } e^t = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{3} < t < 1 \right),$$

由 $h'(x)$ 的单调性知:

当 $x \in (0, t)$ 时, $h'(x) < h'(t) = 0$, $h(x)$ 为减函数,

当 $x \in (t, +\infty)$ 时, $h'(x) > h'(t) = 0$, $h(x)$ 为增函数,

所以当 $x > 0$ 时, $h(x) \geq h(t) = e^t - \ln t - 2 = \frac{1}{t} - \ln \frac{1}{e^t} - 2$,

$$\therefore h(x) = 0 = \frac{1}{t} + t - 2 \geq 2 - 2 = 0,$$

又 $\frac{1}{3} < t < 1$, 等号不成立.

$$\therefore h(x) > 0,$$

即当 $x > 0$ 时, $f(x) > g(x)$.