

## 06概率统计及计数原理专项复习练习题

### 1. 概率统计

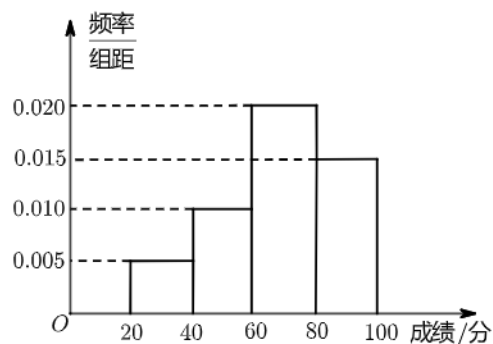


频率分布直方图

1

2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考（二）第3题5分

某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，数据的分组依次为 $[20, 40)$ ， $[40, 60)$ ， $[60, 80)$ ， $[80, 100]$ ．若低于60分的人数是18人，则该班的学生人数是（ ）．



A. 45

B. 48

C. 54

D. 60

答案

D

解析

低于60的频率为：

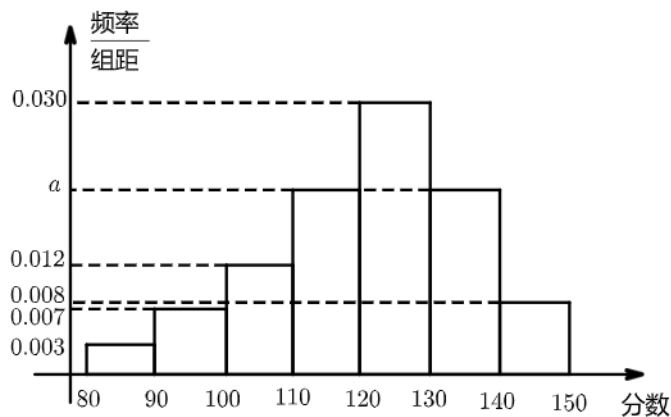
$$(0.005 + 0.01) \times 20 = 0.3 ,$$

$$\frac{18}{0.3} = 60 \text{ (人)} .$$

故选D .

2 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第4题5分

已知某校一次数学测验所有学生得分都在 $[80, 150]$ 内，根据学生得分情况绘制的频率分布直方图如图所示，则图中 $a$ 的值是（ ）。



A. 0.015

B. 0.020

C. 0.030

D. 0.040

答案 B

解析 由频率分布直方图得：

$$0.003 \times 10 + 0.007 \times 10 + 0.012 \times 10 + 2a \times 10 + 0.030 \times 10 + 0.008 \times 10 = 1,$$

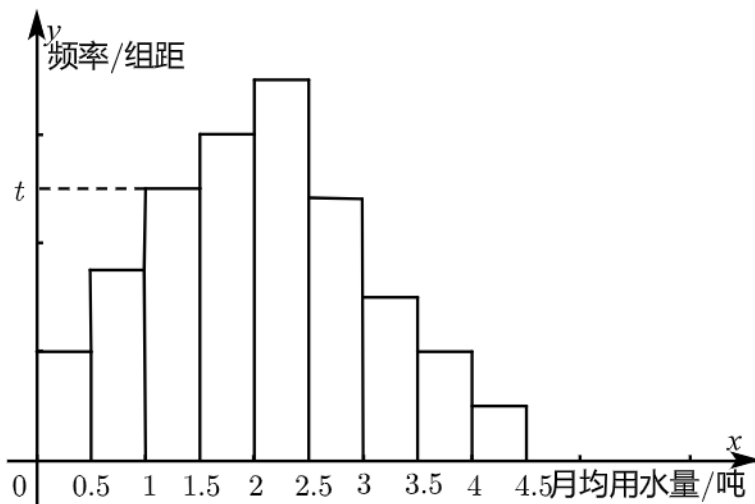
解得 $a = 0.020$ 。

故选B。

3 2020年天津高三上学期高考模拟第5题5分

某市为了解全市居民日常用水量的分布情况，调查了一些居民某年的月均用水量（单位：吨），其频率分布表和频率分别直方图如下：则图中 $t$ 的值为（ ）.

| 分组         | 频数  | 频率   |
|------------|-----|------|
| $[0, 0.5)$ | 4   | 0.04 |
| $[0.5, 1)$ | 5   | 0.08 |
| $[1, 1.5)$ | 15  | $a$  |
| $[1.5, 2)$ | 22  | 0.22 |
| $[2, 2.5)$ | $m$ | 0.25 |
| $[2.5, 3)$ | 14  | 0.14 |
| $[3, 3.5)$ | 6   | 0.06 |
| $[3.5, 4)$ | 4   | 0.04 |
| $[4, 4.5)$ | 2   | 0.02 |
| 合计         | 100 | 1.00 |



- A. 0.15      B. 0.075      C. 0.3      D. 15

答案 C

解析 如图频率分布表中，频率总和为1，

$$0.04 + 0.08 + a + 0.22 + 0.25 + 0.14 + 0.06 + 0.04 + 0.02 = 1,$$

则 $a = 0.15$ .

由频数总和为100，

得 $m = 25$ .

如图频率分布直方图中，每个小矩形面积为频率.

$\therefore$ 在 $[1, 1.5)$ ，频率为0.15，

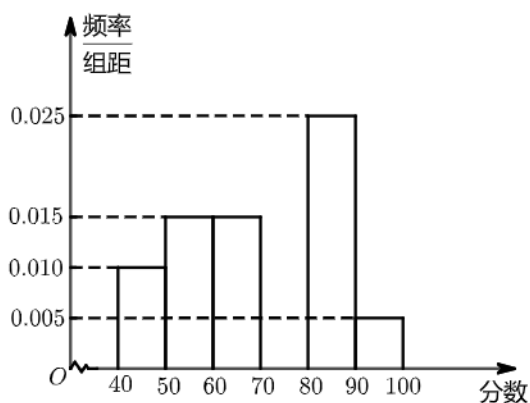
$$0.15 = t(1.5 - 1) = 0.5t,$$

$$\therefore t = 0.3.$$

故C正确.

4 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末（七校联考）第4题5分

中国女排，曾经十度成为世界冠军，铸就了响彻中华的女排精神、看过电影“夺冠”后，某大学掀起“学习女排精神，塑造健康体魄”的年度主题活动，一段时间后，学生的身体素质明显提高，现随机抽取800个学生进行体能测试，成绩的频率分布直方图如图，数据分成六组 $[40, 50)$ ， $[50, 60) \cdots [90, 100]$ ，则成绩落在 $[70, 80)$ 上的人数为（ ）。



A. 12

B. 120

C. 24

D. 240

答案 D

解析 由频率分布直方图得：成绩落在 $[70, 80)$ 上的频率为：

$$1 - (0.010 + 0.015 + 0.015 + 0.025 + 0.005) \times 10 = 0.3,$$

$$\therefore \text{成绩落在}[70, 80)\text{上的人数为 } 800 \times 0.3 = 240.$$

故选D.



离散型随机变量分布列

5

2020年天津河西区高三二模第13题5分

某批产品共10件，其中含有2件次品．若从该批产品中任意抽取3件，则取出的3件产品中恰好有一件次品的概率为 \_\_\_\_\_ ；取出的3件产品中次品的件数 $X$ 的期望是 \_\_\_\_\_ ．

答案

$$\begin{aligned} 1: & \frac{7}{15} \\ 2: & \frac{3}{5} \end{aligned}$$

解析

从10件产品中，抽取3件，有  $C_{10}^3 = 120$  种可能；

若取出的3件中恰有1件是次品，有  $C_8^2 \cdot C_2^1 = 56$  种可能；

$$\text{故满足题意的概率 } P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} ;$$

根据题意， $x = 0, 1, 2$ ，

$$P(x=0) = \frac{C_8^3}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} ; \quad P(x=1) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^1}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(x=2) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} ,$$

$$\text{故 } E(x) = \frac{7}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{5} ,$$

$$\text{故答案为： } \frac{7}{15} ; \frac{3}{5} .$$

6

2020年天津南开区高三二模第13题5分

一袋中装有6个大小相同的黑球和白球．已知从袋中任意摸出2个球，至少得到1个白球的概率是  $\frac{4}{5}$ ，则袋中白球的个数为 \_\_\_\_\_ ；从袋中任意摸出2个球，则摸到白球的个数 $X$ 的数学期望为 \_\_\_\_\_ ．

答案

$$1:3$$

$$2:1$$

解析

设白球的个数为 $n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \leq 5$ ，

$$\therefore \text{至少得到1个白球的概率为 } \frac{C_n^2 + C_n^1 \cdot C_{6-n}^1}{C_6^2} = \frac{4}{5} ,$$

$\therefore$ 解得 $n = 3$ ，

$\therefore$ 袋中白球的个数为3，

可知  $X \sim H(2, 3, 6)$ ，

$$\therefore EX = 2 \times \frac{3}{6} = 1,$$

$\therefore$ 摸到白球个数  $X$  的数学期望为1.

7

2020年天津南开区天津市南大奥宇学校高三二模第14题5分

秉承提升学生核心素养的理念，学校开设以提升学生跨文化素养为核心的多元文化融合课程，选某艺术课程的学生唱歌、跳舞至少会一项，已知会唱歌的有2人，会跳舞的有5人，现从中选2人，设  $\xi$  为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数，其中  $P(\xi > 0) = \frac{7}{10}$ ，则选该艺术课程的学生人数为 \_\_\_\_\_， $\xi$  的  $E\xi$  是 \_\_\_\_\_.

答案

1:5人

2:  $\frac{4}{5}$

解析

设既会唱歌又会跳舞的有  $x$  人，

则文娱队中共有  $7 - x$  人，则只会一项的人数是  $7 - 2x$  人，

$$\therefore P(\xi > 0) = P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = \frac{7}{10},$$

$$\therefore P(\xi = 0) = \frac{3}{10}, \text{ 即 } \frac{C_{7-2x}^2}{C_{7-x}^2} = \frac{3}{10},$$

解得  $x = 2$ ，

$\therefore$ 选该艺术课程的学生人数共有5人，

由题意知  $\xi$  的可能取值为0, 1, 2，

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$\therefore \xi$  的概率分布列为：

|       |                |               |                |
|-------|----------------|---------------|----------------|
| $\xi$ | 0              | 1             | 2              |
| $P$   | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$



8 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末（七校联考）第13题5分

为了抗击新冠肺炎疫情，现从A医院150人和B医院100人中，按分层抽样的方法，选出5人加入“援鄂医疗队”，现拟再从此5人中选出两人作为联络人，则这两名联络人中B医院至少有一人的概率是\_\_\_\_\_．设两名联络人中B医院的人数为 $X$ ，则 $X$ 的期望为\_\_\_\_\_．

答案 1:  $\frac{7}{10}$   
2:  $\frac{4}{5}$

解析 按分层抽样的方法，这5人中，

A医院有  $5 \times \frac{150}{150+100} = 3$  人，B医院有  $5 \times \frac{100}{150+100} = 2$  人

故从这5人中选2人，B医院至少有1人的概率为： $\frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} + \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{7}{10}$ ，

由题意知 $X$ 取0, 1, 2，

当 $X=0$ 时， $P = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ ，

当 $X=1$ 时， $P = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$ ，

当 $X=2$ 时， $P = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$ ，

故 $X$ 的数学期望 $E(X) = \frac{3}{10} \times 0 + \frac{3}{5} \times 1 + \frac{1}{10} \times 2 = \frac{4}{5}$ ．

故答案为： $\frac{7}{10}$ ， $\frac{4}{5}$ ．

9 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟（3月）第13题5分

某中学的十佳校园歌手有6名男同学，4名女同学，其中3名来自1班，其余7名来自其他互不相同的7个班，现从10名同学中随机选择3名参加文艺晚会，则选出的3名同学来自不同班级的概率为\_\_\_\_\_，设 $X$ 为选出3名同学中女同学的人数，则该变量 $X$ 的数学期望为\_\_\_\_\_．

答案 1:  $\frac{49}{60}$   
2:  $\frac{6}{5}$

解析 设“选出的3名同学是来自互不相同班级”为事件 $A$ ，

则 $P(A) = \frac{C_3^1 \times C_7^2 + C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{49}{60}$ ，

所以选出的3名同学是来自互不相同班级的概率为 $\frac{49}{60}$ ；

随机变量 $X$ 的所有可能值为 $0, 1, 2, 3$ ，

$$P(X=k) = \frac{C_4^k C_6^{3-k}}{C_{10}^3}, (k=0, 1, 2, 3),$$

所以随机变量 $X$ 的分布列是：

|     |               |               |                |                |
|-----|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0             | 1             | 2              | 3              |
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

随机变量 $X$ 的数学期望 $EX = 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$ 。

故答案为： $\frac{49}{60}, \frac{6}{5}$ 。



样本的数字特征

10 已知一个样本为 $x, 1, y, 5$ ，若该样本的平均数为2，则它的方差的最小值为（ ）。

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

答案

C

解析

样本 $x, 1, y, 5$ 的平均数为2，

故 $x + y = 2$ ，

故 $xy \leq 1$ ，故

$$S^2 = \frac{1}{4}[(x-2)^2 + (y-2)^2 + 10] = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2xy \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \times 2 = 3,$$

故方差的最小值是3，

故选：C。

分层抽样

11 2020年天津南开区高三二模第2题5分

某中学高一、高二、高三年级的学生人数之比依次为6:5:7,防疫站欲对该校学生进行身体健康调查,用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 $n$ 的样本,样本中高三年级的学生有21人,则 $n$ 等于( ) .

- A. 35                      B. 45                      C. 54                      D. 63

答案 C

解析  $n = 21 \div \frac{7}{6+5+7} = 54$  ,  
故选C .

12 某学校三个社团的人员分布如下表(每名同学只参加一个社团):

|    | 合唱社 | 粤曲社 | 武术社 |
|----|-----|-----|-----|
| 高一 | 45  | 30  | $a$ |
| 高二 | 15  | 10  | 20  |

学校要对这三个社团的活动效果进行抽样调查,按分层抽样的方法从社团成员中抽取30人,结果合唱社被抽出12人,则这三个社团人数共有 \_\_\_\_\_ .

答案 150

解析 据题意,得这三个社团共有  $30 \div \frac{12}{45+15} = 150$  (人) .

概率

13 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第12题5分

从11至14世纪涌现出一批著名的数学家和其创作的数学著作,如秦九韶的《数书九章》,李冶的《测圆海镜》,杨辉的《详解九章算法》、《日用算法》和《杨辉算法》.某学校团委为拓展学

生课外学习兴趣，现从上述五部著作中任意选择两部作为学生课外拓展学习的参考书目，则所选的两部中至少有一部不是杨辉著作的概率为 \_\_\_\_\_ .

**答案**  $\frac{7}{10}$

**解析** 基本事件总数  $n = C_5^2 = 10$  ,

所选的两部中至少有一部不是杨辉著作包含的基本事件个数  $m = C_2^2 + C_3^1 C_2^1 = 7$  ,

则所选的两部中至少有一部不是杨辉著作的概率  $P = \frac{m}{n} = \frac{7}{10}$  .

故答案为： $\frac{7}{10}$  .

**14 2020年天津河北区高三二模第4题5分**

袋子中有6个大小质地完全相同的球，其中1个红球，2个黄球，3个蓝球，从中任取3个球，则恰有两种颜色的概率是 ( ) .

A.  $\frac{3}{5}$

B.  $\frac{4}{5}$

C.  $\frac{7}{20}$

D.  $\frac{13}{20}$

**答案** D

**解析** 由题意可得，从6个球中任取3个球，共有  $C_6^3 = 20$  种，恰有两种颜色的概率

$$P = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_2^2 C_3^1 + C_2^2 C_1^1 + C_3^2 C_1^1}{C_6^3} = \frac{13}{20} .$$

故选D .

15 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第13题5分

现有甲、乙、丙、丁、戊5种在线教学软件，若某学校从中随机选取3种作为教师“停课不停学”的教学工具，则其中甲、乙、丙至多有2种被选取的概率为 \_\_\_\_\_ .

答案  $\frac{9}{10}$

解析 甲、乙、丙至多有2种被选取的对立事件为：

甲、乙、丙都被选取，记此事件为  $A$ ，

依题意得所有基本事件共有  $C_5^3 = 10$  种，

其中  $A$  事件发生为1种，

$$\therefore P(A) = \frac{1}{10},$$

$$\therefore \text{所求事件概率为 } 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

16 2020年天津和平区高三二模第4题5分

已知甲、乙两人独立出行，各租用共享单车一次（假定费用只可能为1、2、3元）. 甲、乙租车费用为1元的概率分别是0.5、0.2，甲、乙租车费用为2元的概率分别是0.2、0.4，则甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为（ ）.

A. 0.18

B. 0.3

C. 0.24

D. 0.36

答案 B

解析 由题意可知，

甲乙租车费用为3元的概率分别是0.3、0.4，

$$\text{则所扣车费相同的概率 } P = 0.5 \times 0.2 + 0.2 \times 0.4 + 0.3 \times 0.4 = 0.3.$$

故选B.

## 2. 二项式定理

常数项

17 2020~2021学年天津河北区高三上学期期末第11题5分

二项式  $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中常数项为 \_\_\_\_\_ .

**答案** 60

**解析**  $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r (2x^2)^{6-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r (-1)^r 2^{6-r} x^{12-3r}$  .

当  $12 - 3r = 0$  , 即  $r = 4$  时 ,  $T_5 = C_6^4 (-1)^4 2^2 = 15 \times 4 = 60$  .

故二项式展开式的常数项为 60 .

18 2020年天津高三上学期高考模拟第12题5分

$\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^4$  的展开式中 , 常数项是 \_\_\_\_\_ .

**答案** -8

**解析**  $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^4$  的展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_4^r (\sqrt[3]{x})^{4-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = C_4^r \cdot (-2)^r \cdot x^{\frac{1-r}{3}} ,$$

$$\text{令 } \frac{1-r}{3} = 0 \text{ 得 } r = 1 ,$$

$$\therefore \text{常数项为 } C_4^1 (-2) = -8 .$$

故答案为 : -8 .

19 2020年天津武清区高三二模第11题5分

若  $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$  的展开式中的常数项为  $-160$ ，则实数  $a =$  \_\_\_\_\_ .

答案  $-2$

解析  $\because$  二项式  $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$  的展开式中的通项公式为  $T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_6^r \cdot a^r \cdot x^{6-2r}$ ，

令  $6 - 2r = 0$ ，求得  $r = 3$ ，可得常数项为  $C_6^3 \cdot a^3 = -160$ ， $\therefore a = -2$  .

故答案为： $-2$  .

项的系数

20 2020年天津河东区高三一模第11题5分

$(x - 2)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数为 \_\_\_\_\_ . (用数字作答)

答案  $-160$

解析  $(x - 2)^6$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r x^r (-2)^{6-r}$ ，由题意令  $6 - r = 3$ ，解得  $r = 3$  . 所以  $x^3$  的系数为  $C_6^3 (-2)^{6-3} = C_6^3 (-2)^3 = -160$  .

21 2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第11题5分

$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$  的展开式中  $x$  项的系数为 \_\_\_\_\_ . (用数字作答)

答案  $-56$

解析  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$  的展开式的通项  $T_{r+1} = C_8^r (x^2)^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_8^r (-1)^r x^{16-3r}$ ，

令  $r = 5$ ， $T_6 = C_8^5 (-1)^5 x = -56x$  .

22 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟（3月）第11题5分

二项式  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中含  $x^6$  项的系数为 \_\_\_\_\_ .

答案 15

解析 二项式  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式的通项公式为  $T_{r+1} = C_6^r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r$   
 $= C_6^r \cdot (-1)^r \cdot x^{12-3r}$  ,

令  $12 - 3r = 6$  , 求得  $r = 2$  , 可得展开式中含  $x^6$  项的系数为  $C_6^2 = 15$  ,

故答案为 : 15.

系数和/二项式系数和

23 2017~2018学年5月天津和平区天津市第一中学高三下学期月考理科四模第10题

已知二项式  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$  的展开式的二项式系数之和为32, 则展开式中含  $x$  项的系数是 \_\_\_\_\_ .

答案 10

解析 令  $x = 1$  , 则  $2^n = 32$  ,  $n = 5$  .

二项式为  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$  ,

含  $x$  项的式子为  $C_5^3 (x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 = C_5^3 \cdot x$  ,

系数为  $C_5^3 = 10$  .