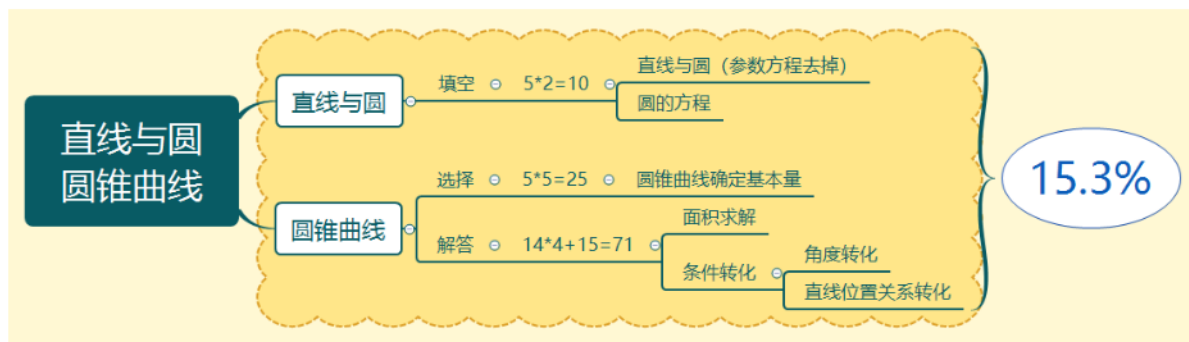


05曲线性质选填+椭圆解答专项复习



1. 直线与圆



直线与圆的位置关系

1

2020~2021学年天津河北区高三上学期期末第3题5分

已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 的圆心到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离为1，则 a 的值为（ ）.

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. 2 D. $-\frac{4}{3}$

答案 D

解析 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 的圆心坐标为： $(1, 4)$ ，

故圆心到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|a + 4 - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1,$$

$$\text{解得：} a = -\frac{4}{3}.$$

故选D.

2

2020年天津南开区高三二模第12题5分

过点 $(-\sqrt{3}, 1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切，则直线 l 在 y 轴上的截距为 _____.

答案 4

解析 若直线 l 的斜率不存在, 即 $l: x = -\sqrt{3}$, 可知与 $x^2 + y^2 = 4$ 相交,
 $\therefore$ 不成立.
 设直线 l 的斜率为 k ,
 $\therefore l: y - 1 = k(x + \sqrt{3})$,
 $\therefore kx - y + \sqrt{3}k + 1 = 0$,
 $\therefore$ 圆心 $(0, 0)$ 到 l 的距离 $d = \frac{|\sqrt{3}k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$,
 $\therefore 3k^2 + 2\sqrt{3}k + 1 = 4k^2 + 4$,
 $\therefore k^2 - 2\sqrt{3}k + 3 = 0$,
 $\therefore k = \sqrt{3}$,
 则 $l: y = \sqrt{3}x + 4$,
 $\therefore$ 直线 l 在 y 轴上的截距为4.

3 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第11题5分

已知直线 $x + y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + m = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 则实数 $m =$ _____.

答案 -4

解析 由题设可得: 圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + m = 0$ 的圆心坐标为 $(-2, 1)$,
 半径 $r = \sqrt{5 - m}$,
 又圆心到直线 $x + y + 5 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-2 + 1 + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$, $|AB| = 2$,
 由圆中的弦长公式可得: $r^2 = 5 - m = d^2 + 1 = 8 + 1$,
 解得: $m = -4$,
 故答案为: -4.

与圆锥曲线基本量结合

4 2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第13题

若经过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 的斜率为 _____.

答案 $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 抛物线的焦点为 $F(1, 0)$, 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$, 即 $kx - y - k = 0$; $\therefore$ 直线 l 与圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 相切, $\therefore \frac{|4k - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$, 解得 $k = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故答案为 $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟(3月)第8题5分

设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点为 $F(c, 0) (c > 0)$, 且离心率等于 $\sqrt{5}$, 若该双曲线的一条渐近线被圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$, 则该双曲线的标准方程为 ().

- A. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
- B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$
- C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$
- D. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{25} = 1$

答案 C

解析 由题意可得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$,
 双曲线的一条渐近线方程为 $bx - ay = 0$,
 圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 的圆心为 $(c, 0)$, 半径为 c ,
 可得圆心到渐近线的距离为 $d = \frac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = b$,
 渐近线被圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$,
 可得 $2\sqrt{5} = 2\sqrt{c^2 - b^2} = 2a$,
 可得 $a = \sqrt{5}$, $c = 5$, $b = 2\sqrt{5}$,
 则双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$.
 故选 C.

6 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称, 则双曲线 C 的离心率为 ().

A. $\sqrt{5}$

B. 5

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{5}{4}$

答案 A

解析 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$,

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4,$$

圆心 $O(2, -1)$,

$\therefore$ 圆关于渐近线对称,

$\therefore$ 渐近线过圆心,

$$\text{渐近线为 } y = \pm \frac{a}{b}x,$$

$$\text{即 } -\frac{a}{b} \times 2 = -1,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}.$$

2. 圆锥曲线选填



利用定义求解基本量

7

2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期末第7题4分

已知抛物线 $\frac{1}{20}x^2 = y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点重合, 且点 F 到

双曲线的渐近线的距离为4, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$

C. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$

D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

答案 D

解析 抛物线 $\frac{1}{20}x^2 = y$ 焦点坐标为 $(0, 5)$,

双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线的方程为 $by + ax = 0$,

$\therefore$ 抛物线的焦点到双曲线渐近线的距离为 4,

$$\therefore \frac{5b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b = 4, \text{ 即 } b = 4,$$

$$\therefore c = 5,$$

$$\therefore a = 3,$$

$$\therefore \text{双曲线方程为: } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

故选 D.

8 2020~2021 学年天津和平区高三上学期期末第 7 题 5 分

已知抛物线 $x^2 = 20y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点重合, 且点 F 到双曲线的渐近线的距离为 4, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$

C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

D. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$

答案 C

解析 $x^2 = 20y$ 焦点为 $(0, 5)$,

$\therefore$ 对于双曲线: $c = 5$,

渐近线方程为: $y = \pm \frac{a}{b}x$,

不妨选定渐近线 $y = \frac{a}{b}x$, 即 $ax - by = 0$,

$$\text{则 } F(0, c) \text{ 到渐近线距离为: } d = \frac{|-bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b = 4,$$

$$\therefore a = \sqrt{c^2 - b^2} = 3,$$

$$\therefore \text{方程为 } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

故选 C.

9 2020~2021 学年天津南开区天津市南开中学高三上学期期末第 7 题

已知 $a > b > 0$ ，曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，则 C_2 的渐近线方程为 () .

A. $\sqrt{3}x \pm y = 0$

B. $x \pm \sqrt{3}y = 0$

C. $3x \pm y = 0$

D. $x \pm 3y = 0$

答案 B

解析 $a > b > 0$ ，椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ，
双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， C_2 的离心率为 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ ，
 $\therefore C_1$ 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，
 $\therefore \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，
 $\therefore \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}$ ，即有 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，
 C_2 的渐近线方程为： $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，即 $x \pm \sqrt{3}y = 0$.
故选 B .

10 2020~2021 学年天津河西区高三上学期期末第8题5分

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距离为 4，且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$ ，则双曲线的焦距为 () .

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. $2\sqrt{5}$

答案 D

解析 $\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 $(-a, 0)$ ，渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$ ，抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ，
 $\therefore$ 点 $(-a, 0)$ 到点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 的距离为 $\frac{p}{2} + a = 4$ ，
由 $\begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}$ ，
解得 $x = -\frac{p}{2}$ ， $y = -\frac{pb}{2a}$ ，

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{p}{2} = -2 \\ -\frac{pb}{2a} = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } p = 4, \frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又} \because \frac{p}{2} + a = 4, \text{ 则 } a = 2,$$

$$\therefore a = 2, b = 1,$$

$$\text{所以双曲线 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 的焦距为 } 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5},$$

故D正确,

故选D.

11 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第8题5分

已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, M 为双曲线左支上一点,且满足 $|MF_1| = 2|F_1F_2|$,若 $\cos \angle MF_1F_2 = -\frac{5}{16}$,则该双曲线的离心率为().

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\frac{9}{2}$

答案 C

解析 设双曲线的焦距为 $2c$,则 $|MF_1| = 2|F_1F_2| = 4c$,

由双曲线的定义知, $|MF_2| - |MF_1| = 2a$,

$$\therefore |MF_2| = 4c + 2a,$$

在 $\triangle MF_1F_2$ 中,由余弦定理知,

$$\cos \angle MF_1F_2 = \frac{|MF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - |MF_2|^2}{2|MF_1| \cdot |F_1F_2|},$$

$$\text{即 } -\frac{5}{16} = \frac{(4c)^2 + (2c)^2 - (4c + 2a)^2}{2 \times 4c \times 2c},$$

$$\text{化简得, } 4a^2 + 16ac - 9c^2 = 0,$$

$$\text{解得 } c = 2a \text{ 或 } c = -\frac{2}{9}a \text{ (舍)},$$

$$\therefore \text{双曲线的离心率 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

故选C.

12 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟(3月)第7题

已知双曲线 $M: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 若双曲线 M 的右支上存在点 P , 使 $\frac{1}{\sin \angle PF_1 F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2 F_1}$, 并且 $PF_2 = 2$ 则双曲线 M 的离心率为 ().

A. $\sqrt{2}$

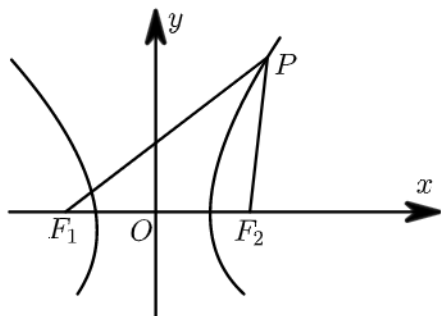
B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{4}{3}$

答案 D

解析



由双曲线 $M: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a = 3, \frac{1}{\sin \angle PF_1 F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2 F_1}$,

在 $\triangle PF_1 F_2$ 中, 由正弦定理可得,

$$\frac{PF_2}{\sin \angle PF_1 F_2} = \frac{PF_1}{\sin \angle PF_2 F_1},$$

且 $PF_1 - PF_2 = 2a, PF_2 = 2, 2c - 2 = 2a = 6, c = 4,$

$$\therefore e = \frac{4}{3}.$$

故选D.

直线与圆锥曲线的位置关系

13 2020年天津和平区高三二模第6题5分

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F , 圆 $x^2 + y^2 = c^2$ (c 为双曲线的半焦距) 与双曲线 C 的一条渐近线交于 A, B 两点, 且线段 AF 的中点 M 落在另一条渐近线上, 则双曲线 C 的方程是 ().

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

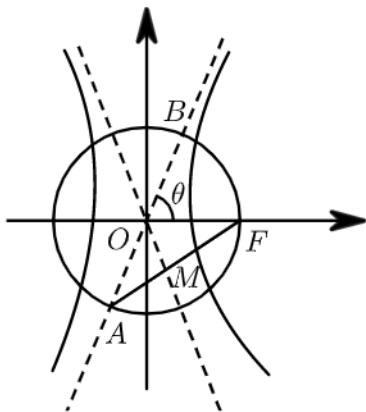
B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$

C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析 草图如下：



$$\therefore \tan \theta = \frac{b}{a},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$y_B = |OB| \cdot \sin \theta = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$x_B = |OB| \cdot \cos \theta = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\text{即 } B \left(\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\text{根据对称性 } A \left(-\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\text{则 } M \left(\frac{1}{2} \left(c - \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -\frac{bc}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\text{将 } M \text{ 点代入 } y = -\frac{b}{a}x, \text{ 整理可得 } \begin{cases} a^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases},$$

$$\text{即双曲线方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

故选D.

14 2020年天津河东区高三下学期高考模拟(4月)第5题

设F为抛物线C: $y^2 = 3x$ 的焦点, 过F且倾斜角为 30° 的直线交C于A, B两点, 则 $|AB| = ()$.

A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

B. 6

C. 12

D. $7\sqrt{3}$

答案 C

解析 方法一: $\because y^2 = 3x$,

$$\therefore \text{焦点为 } F\left(\frac{3}{4}, 0\right), \text{ 准线为 } x = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{直线方程为 } y = \tan 30^\circ \left(x - \frac{3}{4}\right),$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right),$$

$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow 16x^2 - 168x + 9 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{168}{16} = \frac{21}{2},$$

$$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + p$$

$$= \frac{21}{2} + \frac{3}{4} \times 2$$

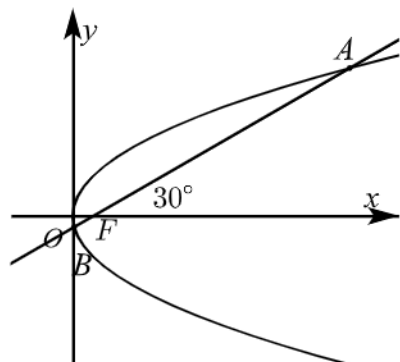
$$= 12.$$

故选C.

$$\text{方法二: } |AF| = \frac{p}{1 - \cos \theta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = 3(2 + \sqrt{3}),$$

$$|BF| = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} = 3(2 - \sqrt{3}),$$

$$|AB| = |AF| + |BF| = 3(2 + \sqrt{3}) + 3(2 - \sqrt{3}) = 12.$$



15 2020年天津和平区高三二模第14题5分

设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线为 l , 过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点, 分别过 A, B 作的垂线, 垂足为 C, D , 若 $|AF| = 4|BF|$, 则 $p =$ _____, 三角形 CDF 的面积
为 _____.

答案 1:2

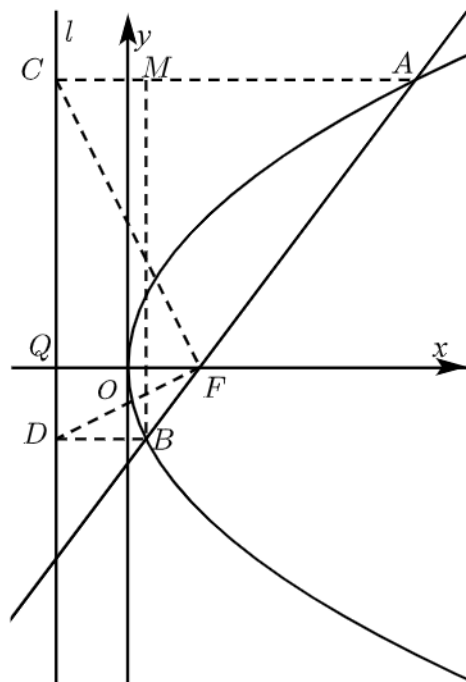
2:5

解析

方法一：抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$ ，

所以 $\frac{p}{2} = 1$ ，所以 $p = 2$ ，

如图所示，过点 B 作 $BM \parallel l$ ，交直线 AC 与点 M ，



由抛物线的定义知 $|AF| = |AC|$ ， $|BF| = |BD| = CM$ ，

且 $|AF| = 4|BF|$ ，

所以 $|AM| = 3|BF|$ ， $|AB| = 5|BF|$ ，由勾股定理得 $|BM| = 4|BF|$ ，

所以直线 AB 的斜率为 $k = \tan \angle BAM = \frac{4}{3}$ ，

设直线 AB 的方程为 $y = \frac{4}{3}(x - 1)$ ，

点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{4}{3}(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases},$$

消去 y 整理得 $4x^2 - 17x + 4 = 0$ ，

所以 $x_1 + x_2 = \frac{17}{4}$ ，

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{25}{4}$ ，

所以 $|CD| = |AB| \sin \angle BAM = \frac{25}{4} \times \frac{4}{5} = 5$ ，

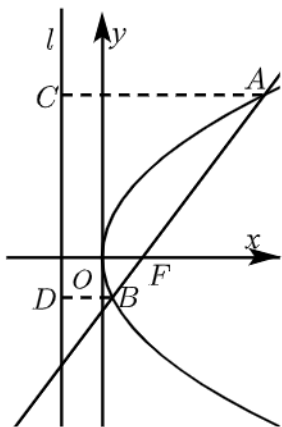
所以 $\triangle CDF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$ ，

故答案为：2，5。

方法二： $\because$ 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $F(1, 0)$ ，

$\therefore p = 2$ ，即抛物线方程为 $y^2 = 4x$ ，

$\therefore$ 准线 l 为 $x = -1$ ，



又: 设过焦点的直线为 $x = my + 1$ 并交抛物线于 A, B ,

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } y^2 - 4my - 4 = 0,$$

$$\text{又: 设 } A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), \text{ (设 } y_1 > 0, y_2 < 0 \text{)},$$

$$\therefore y_1 + y_2 = 4m, \quad ①$$

$$y_1 y_2 = -4, \quad ②$$

$$\text{又: } |AF| = 4|BF|,$$

$$\therefore \text{由抛物线性质可得 } |AC| = 4|BD|,$$

$$\text{且 } |y_1| = |4y_2| \Rightarrow y_1 = -4y_2,$$

$$\therefore 1 + \frac{y_1^2}{4} = 4\left(1 + \frac{y_2^2}{4}\right),$$

$$\text{解得 } y_1^2 = 4y_2^2 + 12, \quad ③$$

$$\text{对①式两边平方得: } (y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2 = 16m^2,$$

$$\text{解得 } y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8,$$

$$\therefore |y_1 - y_2| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2} = 4\sqrt{m^2 + 1},$$

$$\text{又: 联立} \begin{cases} y_1^2 = 4y_2^2 + 12 \\ y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8 \\ y_1 = -4y_2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } m^2 = \frac{9}{16},$$

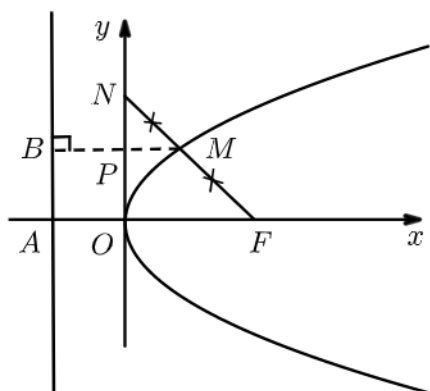
$$\therefore |y_1 - y_2| = 4\sqrt{m^2 + 1} = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2} CD \times P = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_1 - y_2| = 5.$$

- 16 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{3}{2}$

解析 如图：



不妨设 M 在第一象限抛物线 C 的准线交 x 轴于点 A ，

过 M 作准线的垂 $\perp$ 垂足为 B 交 y 轴于 P ，

$\therefore PM \parallel OF$ ，

由题意得： $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，

$FO = AO = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore M$ 为 FN 中点， $PM \parallel OF$ ，

$\therefore MP = \frac{1}{2}FO = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，

又 $BP = AO = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore MB = MP + BP = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ，

由定义可知 $MF = MB = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore FN = 2MF = \frac{3}{2}$ 。

17 2020年天津南开区天津市南大奥宇学校高三二模第6题5分

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两顶点为 A_1, A_2 ，虚轴两端点为 B_1, B_2 ，两焦点为 F_1, F_2 ，

若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$ ，则双曲线的离心率是（ ）。

A. $\sqrt{5} - 1$

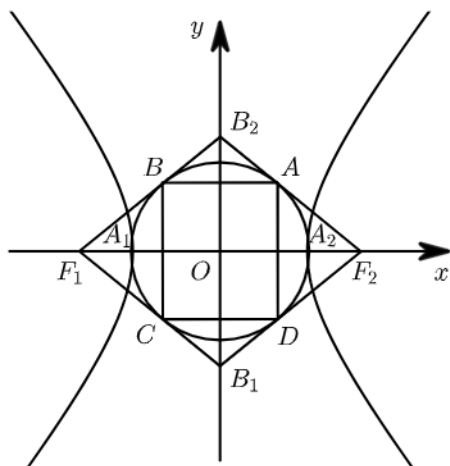
B. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

D. $\sqrt{3} + 1$

答案 C

解析



由题意可得 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

且 $a^2 + b^2 = c^2$, 菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的边长为 $\sqrt{b^2 + c^2}$,

由以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 切点分别为 A, B, C, D ,

由面积相等, 可得 $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 2c = \frac{1}{2} a \cdot 4\sqrt{b^2 + c^2}$,

即为 $b^2c^2 = a^2(b^2 + c^2)$,

即有 $c^4 + a^4 - 3a^2c^2 = 0$,

由 $e = \frac{c}{a}$, 可得 $e^4 - 3e^2 + 1 = 0$,

解得 $e^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$,

可得 $e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (舍去) .

故选: C .



取值范围问题

18

2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第8题

设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点 $F(2, 0)$ 点 $A(-2, 1)$ 为椭圆 E 内一点, 若椭圆 E 上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 8$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是 () .

A. $\left[\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right]$

B. $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right)$

C. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$

D. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$

答案

A

解析

椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点 $F(2, 0)$,

另一个焦点为 $F'(-2, 0)$,

由椭圆的定义可得 $2a = |PF| + |PF'|$,

即 $|PF'| = 2a - |PF|$,

可得 $|PA| - |PF'| = 8 - 2a$,

由 $||PA| - |PF'|| \leq |AF'| = 1$,

可得 $-1 \leq 8 - 2a \leq 1$,

解得 $\frac{7}{2} \leq a \leq \frac{9}{2}$,

又 $c = 2$, 可得

$$e = \frac{c}{a} \in \left[\frac{4}{9}, \frac{4}{7} \right].$$

故选A.

19 2020年天津和平区高三三模第6题5分

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 虚轴的上端点为 B , P 为左支上的一个动点, 若 $\triangle PBF$ 周长的最小值等于实轴长的3倍, 则该双曲线的离心率为 ().

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\sqrt{2}$

答案 A

解析 由题意可得 $B(0, b)$, $F(c, 0)$,

设 $F'(-c, 0)$,

由双曲线的定义可得 $|PF| - |PF'| = 2a$, $|PF| = |PF'| + 2a$, $|BF| = |BF'| = \sqrt{b^2 + c^2}$,

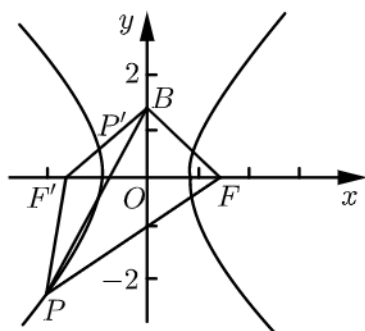
则 $\triangle BPF$ 的周长为 $|PB| + |PF| + |BF| = |PB| + |PF'| + 2a + |BF'| \geq 2|BF'| + 2a$,

当且仅当 B, P, F' 共线, 取得最小值, 且为 $2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$,

由题意可得 $6a = 2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$, 即 $4a^2 = b^2 + c^2 = 2c^2 - a^2$, 即 $5a^2 = 2c^2$,

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

故选A.



3. 椭圆解答

与直线的位置关系基础求解

直线方程求解

20 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末（七校联考）第18题15分

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆 E 的左、右焦点, M 为 E 上任意一点, $S_{\triangle F_1 M F_2}$ 的最大值为 1, 椭圆右顶点为 A .

- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 若过 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B , 过 B 作 x 轴的垂线交椭圆于 C (C 异于 B 点), 连接 AC 交 y 轴于点 P . 如果 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

教法备注

注意说明 **直线斜率存在且不为0**

答案

- (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.
- (2) $l: y = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析

- (1) 当 M 为椭圆的短轴端点时, $S_{\triangle F_1 M F_2}$ 取得最大值,
 即 $S = \frac{1}{2} \times 2c \times b = 1$,
 又因为 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2 = b^2 + c^2$,
 解得: $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = 1$,
 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) $A(\sqrt{2}, 0)$, 根据题意, 直线 l 斜率存在且不为0,

设直线 $l: y = k(x - \sqrt{2})$, $B(x_0, y_0)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x - \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{得} (1 + 2k^2)x^2 - 4\sqrt{2}k^2x + 4k^2 - 2 = 0, \sqrt{2} + x_0 = \frac{4\sqrt{2}k^2}{1 + 2k^2},$$

$$\sqrt{2}x_0 = \frac{4k^2 - 2}{1 + 2k^2},$$

$$\text{即} B\left(\frac{\sqrt{2}(2k^2 - 1)}{1 + 2k^2}, \frac{-2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2}\right),$$

$$\text{由题意得: } C\left(\frac{\sqrt{2}(2k^2 - 1)}{1 + 2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2}\right),$$

$$k_{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2}}{\frac{\sqrt{2}(2k^2 - 1)}{1 + 2k^2} - \sqrt{2}} = -k,$$

所以直线 $AC: y = -k(x - \sqrt{2})$, 令 $x = 0$, 则 $P(0, \sqrt{2}k)$,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}k) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}(2k^2 - 1)}{1 + 2k^2}, \frac{-2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} - \sqrt{2}k\right)$$

$$= \frac{4k^4 + 10k^2 - 2}{1 + 2k^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即} 8k^4 + 18k^2 - 5 = 0,$$

$$\text{解得: } k^2 = -\frac{5}{2} \text{ (舍)}, k^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以: } k = \pm \frac{1}{2},$$

$$\text{直线} l: y = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



在向量数量积中的计算

21

2020年天津高三上学期高考模拟第18题15分

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 点 $T(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知直线 $y = \sqrt{2}x + m$ 与椭圆交于 A, B 两点, 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$, 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$,

求实数 m 的值.

答案

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1.$

(2) $m = -3.$

解析

(1) 设椭圆的焦距为 $2c$ ，由已知有 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{3}$ ，又由 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得 $a^2 = 3b^2$ 。

由点 $T(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 在椭圆上，有 $\frac{8}{a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1$ ，

由此可得 $a^2 = 9$ ， $b^2 = 3$ 。

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 设点 A 的坐标为 (x_1, y_1) ，点 B 的坐标为 (x_2, y_2) 。

由方程组 $\begin{cases} y = \sqrt{2}x + m \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消去 y ，整理可得

$$7x^2 + 6\sqrt{2}mx + 3m^2 - 9 = 0. \quad ①$$

由求根公式可得

$$x_1 + x_2 = -\frac{6\sqrt{2}m}{7}, \quad x_1x_2 = \frac{3m^2 - 9}{7}. \quad ②$$

由点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$ 可得 $\overrightarrow{PA} = (x_1 - 2\sqrt{2}, y_1)$ ， $\overrightarrow{PB} = (x_2 - 2\sqrt{2}, y_2)$ ，

$$\text{故 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (x_1 - 2\sqrt{2})(x_2 - 2\sqrt{2}) + y_1y_2$$

$$= x_1x_2 - 2\sqrt{2}(x_1 + x_2) + 8 + y_1y_2. \quad ③$$

又因为 $y_1 = \sqrt{2}x_1 + m$ ， $y_2 = \sqrt{2}x_2 + m$ ，

所以 $y_1y_2 = 2x_1x_2 + \sqrt{2}m(x_1 + x_2) + m^2$ ，代入上式，

$$\text{可得 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 3x_1x_2 + (\sqrt{2}m - 2\sqrt{2})(x_1 + x_2) + m^2 + 8.$$

由已知 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$ 以及 ②，可得

$$\frac{3(3m^2 - 9)}{7} + \frac{(\sqrt{2}m - 2\sqrt{2})(-6\sqrt{2}m)}{7} + m^2 + 8 = -1,$$

整理得 $m^3 + 6m + 9 = 0$ ，解得 $m = -3$ 。

这时，①的判别式 $\Delta = -12m^2 + 252 = 144 > 0$ ，

故 $m = -3$ 满足题目条件。

所以 $m = -3$ 。

弦长公式的应用



与基本不等式结合

22 2019~2020学年10月天津和平区高三上学期月考第19题15分

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{6}, 1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

- (2) 若直线 l 与椭圆 C 相交于 A 、 B 两点, 且满足 $\angle AOB = 90^\circ$ (O 为坐标原点), 求 $|AB|$ 的取值范围.

答案

- (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 (2) $|AB| \in (0, 2\sqrt{3}]$.

解析

(1) 由题可知,
$$\begin{cases} \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a} \end{cases},$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2}, b = c = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

- (2) ①当斜率不存在时, $x = m$, ($-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$),

$$\therefore A\left(m, \sqrt{\frac{8-m^2}{2}}\right), B\left(m, -\sqrt{\frac{8-m^2}{2}}\right),$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0,$$

$$\text{即 } m^2 - \frac{8-m^2}{2} = 0,$$

$$\therefore m^2 = \frac{8}{3},$$

$$\therefore m = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$|AB| = 2\sqrt{\frac{8-m^2}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

- ②当斜率存在时, 设直线 l 方程 $y = kx + m$ ($k \neq 0$),

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases},$$

$$\therefore (1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 8 = 0,$$

$$\Delta = (4km)^2 - 4(1+2k^2)(2m^2 - 8)$$

$$= 8(8k^2 - m^2 + 4) > 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\therefore x_1x_2 = \frac{2m^2 - 8}{1+2k^2}, x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1+2k^2},$$

$$y_1y_2 = \frac{m^2 - 8k^2}{1+2k^2}, \vec{OA} = (x_1, y_1), \vec{OB} = (x_2, y_2),$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0,$$

$$\text{即 } x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{3m^2 - 8 - 8k^2}{1+2k^2} = 0,$$

$$\therefore 3m^2 = 8(1+k^2),$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8k^2 - m^2 + 4}}{1+2k^2} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 + 4 + \frac{1}{k^2}}}, \end{aligned}$$

由均值不等式可得,

$$|AB| \leq 2\sqrt{3} \quad (\text{当且仅当 } k^2 = \frac{1}{2} \text{ 时取“=”}),$$

综上: $|AB| \in (0, 2\sqrt{3}]$.



与解不等式结合

23 2020年天津和平区高三三模第19题16分

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$, 使得

$|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$. 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

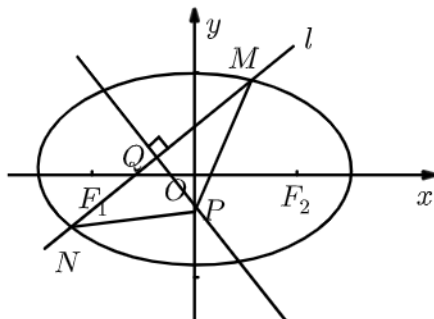
答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 存在, $m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解析

(1)



由题意得: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $a^2 = b^2 + c^2$,

得: $a = \sqrt{2}b = \sqrt{2}c$, 即 $b = c$,

椭圆上的点到左焦点 F_1 最大值为 $a + c = \sqrt{2} + 1$

解得： $a = \sqrt{2}$ ， $c = 1$ ， $b = 1$ ，

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 由题意得： P 点为 MN 垂直平分线与 y 轴交点，

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

将直线的方程与椭圆 C 方程联立
$$\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

得： $(2k^2 + 1)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$ ，

$\Delta = (4kt)^2 - 4(2k^2 + 1)(2t^2 - 2) = 8(2k^2 + 1 - t^2) > 0$ ，

得 $t^2 < 2k^2 + 1$ ，

由韦达定理得： $x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1 + 2k^2}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2}$ 。

设 MN 中点为 Q ，

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2kt}{1 + 2k^2}$ ， $\frac{y_1 + y_2}{2} = k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + t = \frac{t}{2k^2 + 1}$ ，

$\therefore Q\left(\frac{-2kt}{1 + 2k^2}, \frac{t}{1 + 2k^2}\right)$ 。

则直线 PQ ： $y - \frac{t}{1 + 2k^2} = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{2kt}{1 + 2k^2}\right)$ ，

令 $x = 0$ ，得 $y = -\frac{t}{1 + 2k^2} = m$ ，

$|MN| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|1 + 2k^2|}$

$= \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{8(2k^2 + 1 - t^2)}}{1 + 2k^2}$

$= 2$ ，

得： $t^2 = \frac{2k^2 + 1}{2(k^2 + 1)}$ 。

又 $\therefore m = -\frac{t}{1 + 2k^2}$ ，

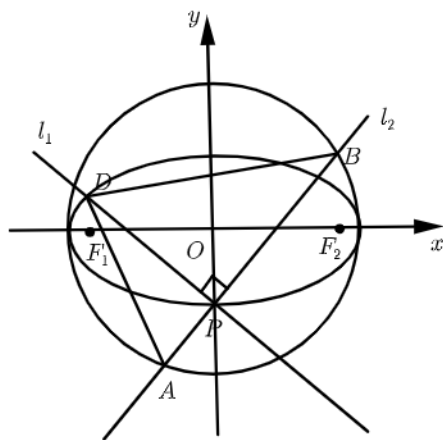
$\therefore m^2 = \frac{t^2}{(1 + 2k^2)^2} = \frac{1}{(2k^2 + 2)(2k^2 + 1)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，

$\therefore m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 。



与三角形面积与基本不等式结合

如图, 点 $P(0, -1)$ 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点, C_1 的长轴是圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的直径. l_1, l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线, 其中 l_1 交椭圆 C_1 于另一点 D , l_2 交圆 C_2 于 A, B 两点.



- (1) 求椭圆 C_1 的方程.
- (2) 当 $\triangle ABD$ 的面积取得最大值时, 求直线 l_1 的方程.

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
- (2) $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}x - 1$.

解析

- (1) 由题意得 $\begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$,
 $\therefore$ 椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
- (2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_0, y_0)$,
 由题意知直线 l_1 的斜率存在, 不妨设其为 k ,
 则直线 l_1 的方程为 $y = kx - 1$,
 故点 O 到直线 l_1 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$,
 又圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$,
 $\therefore |AB| = 2\sqrt{4 - d^2} = 2\sqrt{\frac{4k^2 + 3}{k^2 + 1}}$,
 又 $l_1 \perp l_2$,
 $\therefore$ 直线 l_2 的方程为 $x + ky + k = 0$,
 由 $\begin{cases} x + ky + k = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$,
 消去 y , 整理得 $(4 + k^2)x^2 + 8kx = 0$,
 故 $x_0 = \frac{8k}{4 + k^2}$,

代入 l_2 的方程得 $y_0 = \frac{4-k^2}{4+k^2}$,

$$\begin{aligned}\therefore |PD| &= \sqrt{\left(-\frac{8k}{4+k^2}\right)^2 + \left(\frac{4-k^2}{4+k^2} + 1\right)^2} \\ &= \frac{8\sqrt{k^2+1}}{4+k^2},\end{aligned}$$

设 $\triangle ABD$ 的面积为 S ,

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |PD| = \frac{8\sqrt{4k^2+3}}{4+k^2},$$

$$\therefore S = \frac{32}{\sqrt{4k^2+3} + \frac{13}{\sqrt{4k^2+3}}},$$

$$\leq \frac{32}{2\sqrt{4k^2+3} \cdot \frac{13}{\sqrt{4k^2+3}}}$$

$$= \frac{16\sqrt{13}}{13},$$

$$\text{当且仅当 } \sqrt{4k^2+3} = \frac{13}{\sqrt{4k^2+3}},$$

即 $k = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时取等号,

$\therefore$ 当 $k = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时, $\triangle ABD$ 面积取得最大值 $\frac{16\sqrt{13}}{13}$,

此时直线 l_1 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}x - 1$.

定值定点问题

定值问题

25 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟(3月)第19题

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值? 并说明理由.

答案

(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $k_1 + k_2$ 为定值0, 证明见解析.

解析

(1) 由题意可得 $b = \sqrt{2}$,

又 $a + b = 3\sqrt{2}$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$,

则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设直线在 y 轴上的截距为 m ,

$\therefore$ 直线的方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} ,$$

$$\text{得 } x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0 ,$$

$$\text{当 } \Delta = 4m^2 - 8m^2 + 16 > 0 ,$$

即 $-2 < m < 2$ 时, 直线与椭圆交于两点,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -2m , x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 4 ,$$

$$\text{又 } k_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} , k_2 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} ,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} \\ &= \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} , \end{aligned}$$

$$\text{又 } y_1 = \frac{1}{2}x_1 + m , y_2 = \frac{1}{2}x_2 + m ,$$

$$\therefore (y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x_1 + m - 1 \right) (x_2 - 2) + \left(\frac{1}{2}x_2 + m - 1 \right) (x_1 - 2)$$

$$= x_1 \cdot x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) - 4(m - 1)$$

$$= 2m^2 - 4 + (m - 2)(-2m) - 4(m - 1) = 0 .$$

故 $k_1 + k_2 = 0$.

26

2020年天津蓟县高三二模第19题15分

已知 F_1 , F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点其焦距为6, 过 F_1 的直线与 C 交于 A , B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$.

(1) 求 C 的方程 .

(2) 若 $M(x_0, y_0)$ 是 C 上的动点, 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 6$ 作两条切线, 分别交 C 于 P , Q 两点. 已知直线 OP , OQ 的斜率存在, 并分别记为 k_1 , k_2 .

① 求证: $k_1 k_2$ 为定值 .

② 试问 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 请说明理由 .

答案

$$(1) \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) ① 证明见解析.

② 是定值, 该定值为27.

解析

(1) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2c (c > 0)$,

则 $2c = 6$,

故: $c = 3$.

$\because$ 直线 AB 过 C 的焦点 F_1 , 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$,

$$\therefore |AB| + (|AF_2| + |BF_2|)$$

$$= (|AF_1| + |BF_1|) + (|AF_2| + |BF_2|) = 4a = 12\sqrt{2},$$

$$\therefore a = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 18 - 9 = 9,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程是 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) ① $\because$ 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 6$ 作两条切线

分别交 C 于 P, Q 两点,

已知直线 OP, OQ 的斜率存在, 并分别记为 k_1, k_2 ,

$$\therefore \text{直线 } OP: y = k_1 x,$$

$$\text{直线 } OQ: y = k_2 x,$$

$\because$ 直线 OP, OQ 与圆 M 相切,

$$\therefore \text{根据点到直线距离公式可得: } \frac{|k_1 x_0 - y_0|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \sqrt{6},$$

$$\text{化简得 } (x_0^2 - 6)k_1^2 - 2x_0 y_0 k_1 + y_0^2 - 6 = 0,$$

$$\text{同理可得 } (x_0^2 - 6)k_2^2 - 2x_0 y_0 k_2 + y_0^2 - 6 = 0,$$

$\therefore k_1, k_2$ 是一元二次方程 $(x_0^2 - 6)k^2 - 2x_0 y_0 k + y_0^2 - 6 = 0$ 的两实数根.

$$\text{则有 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2 - 6}{x_0^2 - 6},$$

又 $\because$ 点 $M(x_0, y_0)$ 在 C 上,

$$\therefore \frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{3} = 1, \text{ 即 } y_0^2 = 9 - \frac{1}{2}x_0^2,$$

$$\therefore k_1 k_2 = \frac{3 - \frac{1}{2}x_0^2}{x_0^2 - 6} = \frac{\frac{1}{2}(6 - x_0^2)}{x_0^2 - 6} = -\frac{1}{2} \text{ (定值)}.$$

② 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned}
 & \text{联立方程组} \begin{cases} y = k_1 x \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}, \\
 & \text{解得} \begin{cases} x_1^2 = \frac{18}{1+2k_1^2} \\ y_1^2 = \frac{18k_1^2}{1+2k_1^2} \end{cases}, \\
 & \therefore x_1^2 + y_1^2 = \frac{18(1+k_1^2)}{1+2k_1^2}, \\
 & \text{同理可得} x_2^2 + y_2^2 = \frac{18(1+k_2^2)}{1+2k_2^2}, \\
 & \text{由①知} k_1 k_2 = -\frac{1}{2}, \\
 & \therefore |OP|^2 + |OQ|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\
 & = \frac{18(1+k_1^2)}{1+2k_1^2} + \frac{18(1+k_2^2)}{1+2k_2^2} \\
 & = \frac{18(1+k_1^2)}{1+2k_1^2} + \frac{18 \left(1 + \left(-\frac{1}{2k_1} \right)^2 \right)}{1+2 \left(-\frac{1}{2k_1} \right)^2} \\
 & = \frac{27+54k_1^2}{1+2k_1^2} = 27, \\
 & \therefore |OP|^2 + |OQ|^2 = 27 \text{ (定值)}.
 \end{aligned}$$

27 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第19题15分

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 设 P 为圆 $x^2 + y^2 = 3$ 上任意一点, 过点 P 作该圆的切线交椭圆于 E, F 两点.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 试判断 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 是否为定值? 若为定值, 则求出该定值; 否则, 请说明理由.

答案

- (1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 (2) 是, -3 .

解析

$$\text{由题可得} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{6}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2 \end{cases}.$$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) ①当过点 P 且与圆 $x^2 + y^2 = 3$ 相切的切线斜率不存在时，

由对称性，不妨设切线方程为 $x = \sqrt{3}$ ，

则 $P(\sqrt{3}, 0)$ ， $E(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ， $F(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ，

所以 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = -3$ 。

②当过点 P 且与圆 $x^2 + y^2 = 3$ 相切的切线斜率存在时，

不妨设切线的方程为 $y = kx + m$ ，

设点 $E(x_1, y_1)$ ， $F(x_2, y_2)$ ， $P(x_0, y_0)$ ，

将直线方程与圆的方程联立并整理，

得 $(1 + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - 3 = 0$ ，

由直线与圆相切易得 $m^2 = 3(1 + k^2)$ ， $x_0 = -\frac{km}{k^2 + 1}$ ，

联立直线和椭圆的方程并整理，

得 $(1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 12 = 0$ ，

则 $\Delta = 36k^2m^2 - 4(1 + 3k^2)(3m^2 - 12) > 0$ ，

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{6km}{1 + 3k^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{3m^2 - 12}{1 + 3k^2}$ 。

所以 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot (x_2 - x_0, y_2 - y_0)$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)$$

$$= (k^2 + 1)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)$$

$$= (k^2 + 1)[x_1x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2]$$

$$= (k^2 + 1) \left[\frac{3m^2 - 12}{1 + 3k^2} + \frac{6km \cdot \left(-\frac{km}{k^2 + 1}\right)}{1 + 3k^2} + \left(\frac{km}{k^2 + 1}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{-9k^2 - 3}{1 + 3k^2}$$

$$= -3。$$

综上所述， $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 为定值 -3 。



定点问题

28

2020年天津南开区天津市第二十五中学高三下学期高考模拟(3月)第19题

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，下顶点为 A ，椭圆 C 的离心率是

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\sqrt{3}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的标准方程 .
- (2) 直线 l 与椭圆 C 交于 B, D 两点 (异于 A 点) , 若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为 1 , 证明 : 直线 l 恒过定点 , 并求出该定点的坐标 .

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
- (2) 证明见解析 , 定点为 $(2, -1)$.

解析

- (1) 由题意知 : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = \sqrt{3}$, $a^2 = b^2 + c^2$,

解得 : $a^2 = 4$, $b^2 = 1$,

所以椭圆的标准方程为 : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

- (2) 由(1)得 , $A(0, -1)$,

当直线的斜率不存在时 , 设直线为 : $x = m$, 代入椭圆中 : $y^2 = 1 - \frac{m^2}{4}$,

设 $B\left(m, \sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right)$, $D\left(m, -\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right)$,

由题意得 : $\frac{2}{m} = 1$, 所以 $m = 2$;

$$\therefore k_{AB} + k_{AD} = \frac{\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}} + 1}{m} + \frac{-\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}} + 1}{m} = \frac{2}{m} ,$$

当直线 BD 的斜率存在时 , 设直线为 : $y = kx + t$,

设 $B(x, y)$, $D(x', y')$,

联立与椭圆的方程整理得 :

$$(1 + 4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 4 = 0 ,$$

$$\Delta = 64k^2t^2 - 4(1 + 4k^2)(4t^2 - 4) > 0 ,$$

$$t^2 < 1 + 4k^2 , \therefore t^2 < 1 ,$$

$$x + x' = \frac{-8kt}{1 + 4k^2} , xx' = \frac{4t^2 - 4}{1 + 4k^2} , y + y' = k(x + x') + 2t = \frac{2t}{1 + 4k^2} ,$$

$$\begin{aligned} \therefore k_{AB} + k_{AD} &= \frac{y+1}{x} + \frac{y'+1}{x'} \\ &= \frac{kx+1+t}{x} + \frac{kx'+1+t}{x'} \\ &= 2k + \frac{(1+t)(x+x')}{xx'} \\ &= 2k + \frac{(1+t)(-8kt)}{4t^2-4} \\ &= 2k + 2\frac{-kt}{t-1} \\ &= \frac{-2k}{t-1} , \end{aligned}$$

由题意知 : $-2k = t + 1$, $\therefore t = -2k - 1$,

所以直线为 $y = kx - 2k - 1 = k(x - 2) - 1$,

当 $x = 2$ 时, $y = -1$, 即过 $(2, -1)$,

综上所述, 直线恒过点 $(2, -1)$.

条件转化



三角形面积比值的转化

29

2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考(二)第18题15分

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴长为2, 若点 A 、 B 分别是椭圆 E 的左、右顶点, 动点 $M(a, t)$, $(t \geq \sqrt{2})$, 直线 AM 交椭圆 E 于点 P .

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2)

① 求证: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值.

② 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 , 四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为1,

解析

(1) $\because$ 短轴长为2,

$$\therefore b = 1,$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore a = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) ① 方法一: $\because k_{AM} = \frac{t}{2\sqrt{2}},$

$$\text{设 } l_{AM}: y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2}),$$

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\therefore (t^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{2}t^2x + 2t^2 - 8 = 0,$$

$$\begin{aligned}\therefore (-\sqrt{2})x_P &= \frac{2t^2 - 8}{t^2 + 4}, \\ \therefore x_P &= \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \\ \therefore y_P &= \frac{t}{2\sqrt{2}}(x_P + \sqrt{2}) = \frac{4t}{t^2 + 4}, \\ \therefore P &\left(\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \frac{4t}{t^2 + 4} \right), \\ \therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP} &= (\sqrt{2}, t) \cdot \left(\frac{-2\sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \frac{4t}{t^2 + 4} \right) = 0.\end{aligned}$$

方法二：设 $AM: y = k(x + \sqrt{2})$,

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x + \sqrt{2}) \end{cases} \\ \Rightarrow (1 + 2k^2)x^2 + 4\sqrt{2}k^2x + 4k^2 - 2 = 0, \\ x_A x_P = \frac{4k^2 - 2}{1 + 2k^2} \Rightarrow x_P = \frac{\sqrt{2}(1 - 2k^2)}{1 + 2k^2}, \\ y_P = k(x_P + \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2}, \\ \therefore P \left(\frac{\sqrt{2}(1 - 2k^2)}{1 + 2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} \right),\end{aligned}$$

其中 $M(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k)$, $B(\sqrt{2}, 0)$,

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{-4\sqrt{2}k^2}{1 + 2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} \right), \quad \overrightarrow{OM} = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k), \\ \therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{OM} &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \text{ 方法一: } \because S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4\sqrt{2}t}{t^2 + 4}, \\ S_2 &= S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{4t}{t^2 + 4} \\ &= \sqrt{2}t - \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 4}, \\ \therefore \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{4\sqrt{2}t}{t^2 + 4}}{\sqrt{2}t - \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 4}} = \frac{1}{\frac{t^2 + 4}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}} \leq 1,\end{aligned}$$

当 $t = \sqrt{2}$ 时取等,

$\therefore \frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1.

$$\begin{aligned}\text{方法二: } S_1 &= \frac{1}{2} |AB| |y_P| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} = \frac{|4k|}{1 + 2k^2}, \\ S_2 &= S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot |2\sqrt{2}k| - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{|2\sqrt{2}k|}{1 + 2k^2} \\ &= \frac{|2k|(1 + 4k^2)}{1 + 2k^2}, \\ \therefore \frac{S_1}{S_2} &= \frac{|4k|}{1 + 2k^2} \cdot \frac{1 + 2k^2}{|2k|(1 + 4k^2)} = \frac{2}{1 + 4k^2},\end{aligned}$$

由于 $t \geq \sqrt{2}$, 所以直线 AM 的斜率 $k \geq \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1, 当且仅当 $k = \frac{1}{2}$ 取等.



角度条件的转化

30 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟(3月)第18题

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，且 $F_1(-1, 0)$ ，椭圆经过点 $(1, \frac{3}{2})$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 直线 l 过椭圆右顶点 B ，交椭圆于另一点 A ，点 G 在直线 l 上，且 $\angle GOB = \angle GBO$ 。若 $GF_1 \perp AF_2$ ，求直线 l 的斜率。

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。
- (2) $\pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。

解析

- (1) 由题意可得 $c = 1$ ， $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ ，又椭圆经点 $(1, \frac{3}{2})$ ，
由椭圆的定义可得 $2a = \sqrt{(1+1)^2 + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ ，即 $a = 2$ ，
又 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ ，
则椭圆的方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。
- (2) $B(2, 0)$ ，由题意可得直线 l 的斜率存在，设为 k ，方程设为 $y = k(x - 2)$ ，
联立椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，
可得 $(3 + 4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$ ，
判别式 $\Delta = 256k^4 - 4(3 + 4k^2)(16k^2 - 12) = 144 > 0$ ，
则 $2x_A = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}$ ，即 $x_A = \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}$ ， $y_A = k(x_A - 2) = -\frac{12}{3 + 4k^2}$ ，
由点 G 在直线 l 上，且 $\angle GOB = \angle GBO$ ，可得 $|OG| = |BG|$ ，
即 G 在 OB 的垂直平分线上，可得 $G(1, -k)$ ，
又 $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ ，
 $A(\frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}, -\frac{12}{3 + 4k^2})$ ， $GF_1 \perp AF_2$ ，
可得 $k_{GF_1} \cdot k_{AF_2} = -1$ ，
即 $\frac{k}{-2} \cdot \frac{-\frac{12}{3 + 4k^2}}{\frac{-9 + 4k^2}{3 + 4k^2}} = -1$ ，
化为 $10k^2 = 9$ ，即 $k = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。



点在圆上条件的转化

31

2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第20题

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设椭圆 C 的上顶点为 P , 证明: 当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) $\triangle AF_1B$ 的周长等于 $|AF_1| + |AB| + |BF_1| = |AF_1| + |AF_2| + |BF_2| + |BF_1| = 4a$,

$$\therefore 4a = 4\sqrt{2} \text{ 从而 } a = \sqrt{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore c = 1, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) 由(1)得 $P(0, 1), F_2(1, 0)$,

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{依题意得, 直线 } l \text{ 的方程为 } x = 3y + 1,$$

$$\text{将 } l \text{ 的方程代入 } C \text{ 并整理, 可得 } 11y^2 + 6y - 1 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{6}{11}, y_1 y_2 = -\frac{1}{11},$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x_1 x_2 + (y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= (3y_1 + 1)(3y_2 + 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= 10y_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) + 2 = -\frac{10}{11} - \frac{12}{11} + 2 = 0,$$

$$\therefore PA \perp PB,$$

综上, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.



等边三角形的条件转化

32 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第18题15分

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，短轴的两个端点和右焦点构成的三角形面积为 $2\sqrt{5}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 已知斜率为 k 的直线 l 经过点 $A(-a, 0)$ ，且直线 l 与椭圆 C 交于点 P (P 不在 x 轴上)，若点 Q 在 y 轴的负半轴上， $\triangle APQ$ 是等边三角形，求 k 的值。

答案

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 。

解析

(1) 由题意得：
$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{1}{2} \times 2b \times c = 2\sqrt{5} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

解得： $a^2 = 9, b^2 = 4, c^2 = 5$ 。

$\therefore$ 椭圆方程为： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

(2) 设 $A(x_1, y_1), P(x_2, y_2), Q(0, y_0)$ ， AP 中点为 M ，

则 $x_1 = -3, y_1 = 0, AP: y - 0 = k(x + 3)$ ，

即 $y = kx + 3k (k \neq 0)$ ，

$\begin{cases} y = kx + 3k \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow (4 + 9k^2)x^2 + 54k^2x + 81k^2 - 36 = 0 (\Delta > 0)$ ，

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-54k^2}{4 + 9k^2}, x_1x_2 = \frac{81k^2 - 36}{4 + 9k^2}$ ，

$\therefore x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-27k^2}{4 + 9k^2}, y_M = kx_M + 3k = \frac{12k}{4 + 9k^2}$ ，

$|AP| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$= 24\sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{1}{4 + 9k^2}$ 。

$\therefore \triangle APQ$ 为等边三角形，

$\therefore QM \perp AP$ ，且 $|QM| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AP|$ ，

$\frac{y_0 - \frac{12k}{4 + 9k^2}}{0 + \frac{27k^2}{4 + 9k^2}} = -\frac{1}{k}$ ，

得 $y_0 = \frac{-15k}{4 + 9k^2}$ ，

$|QM| = \sqrt{\left(y_0 - \frac{12k}{4 + 9k^2}\right)^2 + \left(0 + \frac{27k^2}{4 + 9k^2}\right)^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{27\sqrt{k^2+k^4}}{4+9k^2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 24\sqrt{1+k^2} \cdot \frac{1}{4+9k^2}, \\
 &\text{得 } k^2 = \frac{16}{27}, \\
 &\because y_0 < 0, \\
 &\therefore k = \frac{4\sqrt{3}}{9}.
 \end{aligned}$$



垂直平分线条件的转化

33

2020年天津南开区高三二模第18题15分

已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 过点 $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 且 $MF_2 \perp F_1F_2$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若存在点 $Q(m, 0)$, 使得 $|QA| = |QB|$.

① 求实数 m 的取值范围.

② 若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q , 求实数 m 的值.

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① $m \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

② $\frac{1}{5}$.

解析

(1) $\because M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), MF_2 \perp F_1F_2$,
 $\therefore \begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1 \end{cases}$,
 $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① 设直线的方程为 $y = k(x - 2)$,

代入椭圆 C 的方程, 消去 y , 得 $(1 + 2k^2)x^2 - 8k^2x + 8k^2 - 2 = 0$.

$\because$ 直线 l 交椭圆 C 于两点,

$\therefore \Delta = (-8k^2)^2 - 4(1 + 2k^2)(8k^2 - 2) > 0$, 解得 $2k^2 < 1$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1 + 2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{8k^2 - 2}{1 + 2k^2}$.

设 AB 中点为 $M(x_0, y_0)$,

$$\text{则有 } x_0 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, y_0 = k(x_0 - 2) = -\frac{2k}{1+2k^2}.$$

当 $k \neq 0$ 时, $\because |QA| = |QB|, \therefore QM \perp l$,

$$\therefore k_{QM} \cdot k = \frac{-\frac{2k}{1+2k^2} - 0}{\frac{4k^2}{1+2k^2} - m} \cdot k = -1, \text{ 解得 } m = \frac{2k^2}{1+2k^2}.$$

$$\therefore m = \frac{2k^2}{1+2k^2} = 1 - \frac{1}{1+2k^2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

当 $k = 0$ 时, 可得 $m = 0$,

$$\text{综上, } m \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

② 依题意有 $|QF_1| = |QA| = |QB|$, 且 $F_1(-1, 0)$,

$$\therefore \text{由 } \begin{cases} (x-m)^2 + y^2 = (m+1)^2 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 得 } x^2 - 4mx^2 - 4m = 0,$$

$\therefore x_1, x_2$ 也是此方程的两个根.

$$\therefore x_1 + x_2 = 4m = \frac{8k^2}{1+2k^2}, x_1 x_2 = -4m = \frac{8k^2 - 2}{1+2k^2}.$$

$$\therefore \frac{8k^2}{1+2k^2} = \frac{2-8k^2}{1+2k^2}, \text{ 解得 } k^2 = \frac{1}{8},$$

$$\therefore m = \frac{2k^2}{1+2k^2} = \frac{1}{5}.$$



三角函数式条件的转化

34

2017年天津南开区高三一模文科第19题14分

已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点, 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M, N , 且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$ (O 为坐标原点), 求直线 m 的方程.

答案

(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ 或 $x = -2.$

解析

(1) $\because$ 过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, 令 $y = 0$, 得椭圆焦点坐标为 $(2, 0)$,

$\therefore$ 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上,

设椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点为 (m, n) ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m - 2\sqrt{3} \\ \frac{n}{m} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = \frac{a^2}{2} \end{cases}, \text{解得 } n = -\sqrt{3}, m = 3, a^2 = 2m = 6,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 6 - 4 = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) ① 当直线 m 的斜率不存在时, 满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$, 此时直线 m 的方程为

$$x = -2.$$

② 当直线 m 的斜率存在时, 由题设知直线 m 的斜率不为零,

$\therefore$ 直线 m 的方程可设为 $y = k(x + 2)$.

$$\text{代入椭圆方程得: } (3k^2 + 1)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 6}{3k^2 + 1},$$

$$\text{由 } \tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}, \text{ 得: } |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{又 } |MN| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{6}(1 + k^2)}{3k^2 + 1}, \text{ 原点 } O \text{ 到 } m \text{ 的距离 } d = \frac{|2k|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

$$\text{则 } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |MN| d = \frac{\sqrt{6}(1 + k^2)}{3k^2 + 1} \cdot \frac{|2k|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore m \text{ 的方程是 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2) \text{ 或 } x = -2.$$