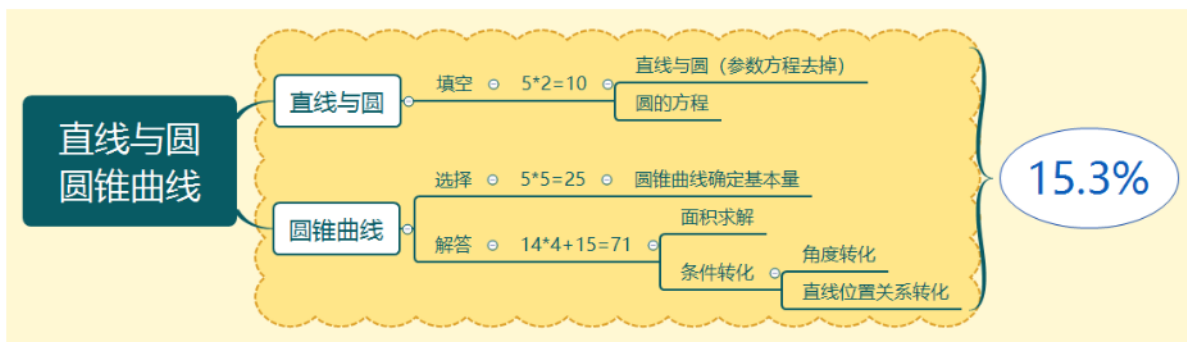


05曲线性质选填+椭圆解答专项复习



1. 直线与圆



直线与圆的位置关系

1 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 的圆心到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离为 1, 则 a 的值为 () .

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. 2 D. $-\frac{4}{3}$

2 过点 $(-\sqrt{3}, 1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 在 y 轴上的截距为 _____ .

3 已知直线 $x + y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + m = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 则实数 $m =$ _____ .



与圆锥曲线基本量结合

4 若经过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 的斜率为 _____ .

5 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点为 $F(c, 0) (c > 0)$ ，且离心率等于 $\sqrt{5}$ ，若该双曲线的一条渐近线被圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$ ，则该双曲线的标准方程为 () .

- A. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
- B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$
- C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$
- D. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{25} = 1$

6 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称，则双曲线 C 的离心率为 () .

- A. $\sqrt{5}$
- B. 5
- C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- D. $\frac{5}{4}$

2. 圆锥曲线选填



利用定义求解基本量

7 已知抛物线 $\frac{1}{20}x^2 = y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点重合，且点 F 到双曲线的渐近线的距离为 4，则双曲线的方程为 () .

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$
- C. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$
- D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

8 已知抛物线 $x^2 = 20y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点重合，且点 F 到双曲线的渐近线的距离为 4，则双曲线的方程为 () .

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
- B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$
- C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

D. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$

- 9 已知 $a > b > 0$ ，曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，则 C_2 的渐近线方程为 () .

A. $\sqrt{3}x \pm y = 0$

B. $x \pm \sqrt{3}y = 0$

C. $3x \pm y = 0$

D. $x \pm 3y = 0$

- 10 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距离为 4，且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$ ，则双曲线的焦距为 () .

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. $2\sqrt{5}$

- 11 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点， M 为双曲线左支上一点，且满足 $|MF_1| = 2|F_1F_2|$ ，若 $\cos \angle MF_1F_2 = -\frac{5}{16}$ ，则该双曲线的离心率为 () .

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\frac{9}{2}$

- 12 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 若双曲线 M 的右支上存在点 P ，使 $\frac{1}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2F_1}$ ，并且 $PF_2 = 2$ 则双曲线 M 的离心率为 () .

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{4}{3}$



直线与圆锥曲线的位置关系

- 13 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F ，圆 $x^2 + y^2 = c^2$ (c 为双曲线的半焦距) 与双曲线 C 的一条渐近线交于 A, B 两点，且线段 AF 的中点 M 落在另一条渐近线上，则双曲线 C 的方程是 () .

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$

C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

14 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| = ()$.

A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

B. 6

C. 12

D. $7\sqrt{3}$

15 设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线为 l , 过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点, 分别过 A, B 作 l 的垂线, 垂足为 C, D , 若 $|AF| = 4|BF|$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$, 三角形 CDF 的面积
为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| = \underline{\hspace{2cm}}$.

17 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两顶点为 A_1, A_2 , 虚轴两端点为 B_1, B_2 , 两焦点为 F_1, F_2 , 若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 则双曲线的离心率是 ().

A. $\sqrt{5} - 1$

B. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

D. $\sqrt{3} + 1$



取值范围问题

18 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个焦点 $F(2, 0)$ 点 $A(-2, 1)$ 为椭圆 E 内一点, 若椭圆 E 上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 8$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right]$

B. $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right)$

C. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$

D. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$

19 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 虚轴的上端点为 B , P 为左支上的一个动点, 若 $\triangle PBF$ 周长的最小值等于实轴长的3倍, 则该双曲线的离心率为 ().

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\sqrt{2}$

3. 椭圆解答

与直线的位置关系基础求解



直线方程求解

20 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆 E 的左、右焦点, M 为 E 上任意一点, $S_{\triangle F_1 M F_2}$ 的最大值为 1, 椭圆右顶点为 A .

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 若过 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B , 过 B 作 x 轴的垂线交椭圆于 C (C 异于 B 点), 连接 AC 交 y 轴于点 P . 如果 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

 在向量数量积中的计算

21 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，点 $T\left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 在椭圆上。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 已知直线 $y = \sqrt{2}x + m$ 与椭圆交于 A, B 两点，点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$ ，且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$ ，求实数 m 的值。

弦长公式的应用



与基本不等式结合

22 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{6}, 1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若直线 l 与椭圆 C 相交于 A 、 B 两点，且满足 $\angle AOB = 90^\circ$ (O 为坐标原点)，求 $|AB|$ 的取值范围。



与解不等式结合

23 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

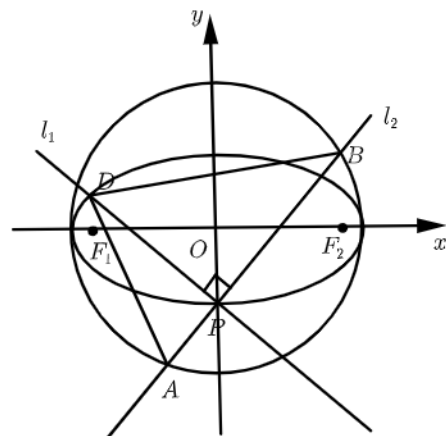
(2) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$, 使得 $|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$. 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.



与三角形面积与基本不等式结合

24

如图, 点 $P(0, -1)$ 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点, C_1 的长轴是圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的直径. l_1, l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线, 其中 l_1 交椭圆 C_1 于另一点 D , l_2 交圆 C_2 于 A, B 两点.



- (1) 求椭圆 C_1 的方程.
- (2) 当 $\triangle ABD$ 的面积取得最大值时, 求直线 l_1 的方程.

定值定点问题



定值问题

25 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值 ? 并说明理由 .

26 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点其焦距为6, 过 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 若 $M(x_0, y_0)$ 是 C 上的动点, 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 6$ 作两条切线, 分别交 C 于 P, Q 两点. 已知直线 OP, OQ 的斜率存在, 并分别记为 k_1, k_2 .

① 求证: $k_1 k_2$ 为定值.

② 试问 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 请说明理由.

27 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。设 P 为圆 $x^2 + y^2 = 3$ 上任意一点，过点 P 作该圆的切线交椭圆于 E, F 两点。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 试判断 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 是否为定值？若为定值，则求出该定值；否则，请说明理由。



定点问题

28 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 下顶点为 A , 椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\sqrt{3}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 直线 l 与椭圆 C 交于 B, D 两点 (异于 A 点), 若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为 1, 证明: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

条件转化



三角形面积比值的转化

29 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为 2，若点 A 、 B 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 $M(a, t)$ ， $(t \geq \sqrt{2})$ ，直线 AM 交椭圆 E 于点 P 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2)

① 求证： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值。

② 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 ，四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值。



角度条件的转化

30 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，且 $F_1(-1, 0)$ ，椭圆经过点 $(1, \frac{3}{2})$ 。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 直线 l 过椭圆右顶点 B ，交椭圆于另一点 A ，点 G 在直线 l 上，且 $\angle GOB = \angle GBO$ 。若

$GF_1 \perp AF_2$ ，求直线 l 的斜率。



点在圆上条件的转化

31 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设椭圆 C 的上顶点为 P , 证明: 当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.



等边三角形的条件转化

32 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，短轴的两个端点和右焦点构成的三角形面积为 $2\sqrt{5}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 已知斜率为 k 的直线 l 经过点 $A(-a, 0)$ ，且直线 l 与椭圆 C 交于点 P (P 不在 x 轴上)，若点 Q 在 y 轴的负半轴上， $\triangle APQ$ 是等边三角形，求 k 的值。



垂直平分线条件的转化

33 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 过点 $M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 且 $MF_2 \perp F_1F_2$.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若存在点 $Q(m, 0)$, 使得 $|QA| = |QB|$.
 - ① 求实数 m 的取值范围.
 - ② 若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q , 求实数 m 的值.



三角函数式条件的转化

34

已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$ ，斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点，椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M 、 N ，且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$ (O 为坐标原点)，求直线 m 的方程。