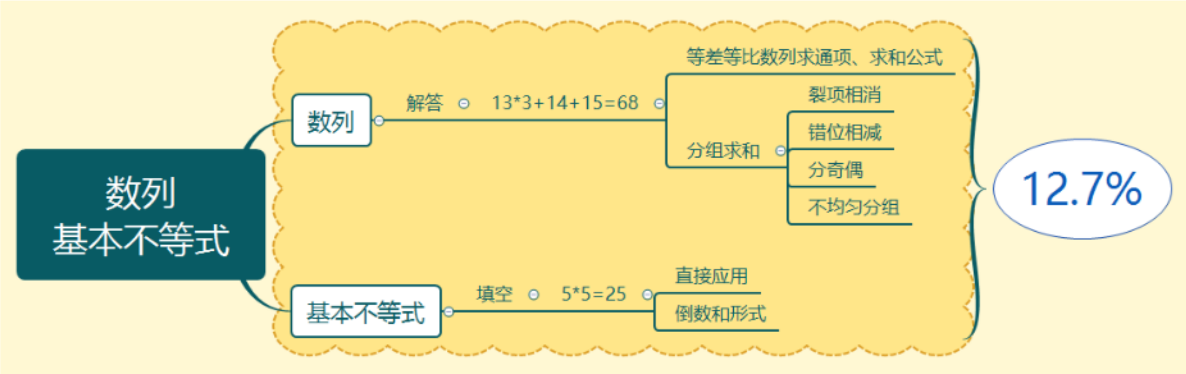
03数列、基本不等式专项复习



1. 数列

数列性质在选填题中的应用

1 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2\sin(\dfrac{2n+1}{2}\pi)$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots a_{12}=$（　　）．

A. 0　　　　B. 55　　　　C. 66　　　　D. 78

答案 D

解析 $a_1=1^2\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1^2$，

$a_2=2^2\cdot\sin\dfrac{5\pi}{2}=2^2$，

$a_3=3^2\sin\dfrac{7\pi}{2}=-3^2$，

$a_4=4^2\sin\dfrac{9\pi}{2}=4^2$，

$a_5=-5^2$，

$a_6=6^2$，

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=-1^2+2^2-3^2+4^4-5^2+6^2+10^2-11^2+12^2$

$=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)\cdots+(10^2-9^2)+(12^2-11^2)$

$=78$．

故选D．

2 **2017~2018学年5月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考理科第6题5分**

等比数列$\{a_n\}$的首项为2，项数为奇数，其奇数项之和为$\frac{85}{32}$，偶数项之和为$\frac{21}{16}$，这个等比数列前n项和的积为$T_n(n\geqslant 2)$，则T_n的最大值为（　）．

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

答案 D

解析 设共有$2m+1$项，由题意，

$S=a_1+a_3+\cdots+a_{2m+1}=\frac{85}{32}$，

$S=a_2+a_4+\cdots+a_{2m}=\frac{21}{16}$，

$S=a_1+a_2q+\cdots+a_{2m}q$

$=2+q(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$

$=2+\frac{21}{16}q=\frac{85}{32}$，

$\therefore q=\frac{1}{2}$，

$\therefore T_n=a_1\cdot a_2\cdots a_n=2^n\cdot\frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}=2^{\frac{3}{2}n-\frac{n^2}{2}}$，

$\therefore$当$n=1$或2时，T_n最大值为2．

故选D．

3 **2020年天津红桥区高三二模第13题5分**

已知实数a，b满足条件：$ab<0$，且1是a^2与b^2的等比中项，又是$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的等差中项，则$\frac{a+b}{a^2+b^2}=$ ______．

答案 $-\frac{1}{3}$

解析 $\because$实数a，b满足条件：$ab<0$，

1是a^2与b^2的等比中项，则$ab=-1$，

又$\because 1$是$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的等差中项，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，

解得$a+b=-2$，

$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$= a^2 + b^2 - 2$

$= 4$，

则$a^2 + b^2 = 6$，

$\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$．

4 **2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高三上学期期末第12题5分**

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等差数列，前n项和分别为S_n，T_n，且满足：$\forall_n \in \mathbf{N}^*$，$\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+3}{2n+1}$，则$\frac{a_1 + a_6 + a_{14} + a_{19}}{b_5 + b_8 + b_{12} + b_{15}} =$______．

答案 $\frac{22}{39}$

解析 $\because \{a_n\}$为等差数列，

$\therefore a_1 + a_{19} = a_6 + a_{14} = 2a_{10}$，

同理：因为b_n为等差数列，

$\therefore b_5 + b_{15} = b_8 + b_{12} = 2b_{10}$，

$\therefore \frac{a_1 + b_b + a_{14} + a_{19}}{b_5 + b_8 + b_{12} + b_{15}}$

$= \frac{2a_{10}}{2b_{10}}$

$= \frac{a_1 + a_{19}}{b_1 + b_{19}}$

$= \frac{(a_1 + a_{19}) \times \frac{19}{2}}{(b_1 + b_{19}) \times \frac{19}{2}}$

$= \frac{S_{19}}{T_{19}}$，

又$\because \frac{S_n}{T_n} = \frac{n+3}{2n+1}$，

$\therefore \frac{S_{19}}{T_{19}} = \frac{22}{39}$，

即$\frac{a_1 + a_b + a_{10} + a_{19}}{b_5 + b_8 + b_{12} + b_{15}} = \frac{22}{39}$．

错位相减求和

5 **2020年天津河东区高三下学期高考模拟第19题16分**

设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4 = 4S_2$，$a_{2n} = 2a_n + 1$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且$T_n+\frac{a_n+1}{2^n}=\lambda$（$\lambda$为常数）．令$c_n=b_{2n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）．求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$R_n$．

答案 (1) $a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) $R_n=\frac{1}{9}\left(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}}\right)$．

解析 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d．由$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$得$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d,\\ a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1.\end{cases}$，解得$a_1=1$，$d=2$．因此$a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) 由题意知$T_n=\lambda-\frac{n}{2^{n-1}}$，所以$n\geqslant 2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=-\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^{n-2}}=\frac{n-2}{2^{n-1}}$．

故$c_n=b_{2n}=\frac{2n-2}{2^{2n-1}}=(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以

$R_n=0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0+1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，则

$\frac{1}{4}R_n=0\times\left(\frac{1}{4}\right)^1+1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

，两式相减得

$\frac{3}{4}R_n=(\frac{1}{4})^1+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\cdots+(\frac{1}{4})^{n-1}-(n-1)\times(\frac{1}{4})^n=\frac{\frac{1}{4}-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}-(n-1)\times(\frac{1}{4})^n=\frac{1}{3}-\frac{1+3n}{3}(\frac{1}{4})^n$

，整理得$R_n=\frac{1}{9}\left(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}}\right)$．所以数列$\{c_n\}$的前$n$项和$R_n=\frac{1}{9}\left(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}}\right)$．

6 2020年天津南开区天津市第二十五中学高三下学期高考模拟（3月）第18题

已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，数列$\{b_n\}$为等差数列，且$b_1=a_1=1$，$b_3=a_3+1$，$b_5=a_5-7$．

(1) 求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和A_n．

(3) 设S_n为数列$\{a_n^2\}$的前n项和，若对于任意$n\in\mathbf{N}^*$，有$S_n+\frac{1}{3}=t\cdot 2^{b_n}$，求实数$t$的值．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $A_n=(2n-3)\cdot 2^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

(3) $\frac{2}{3}$.

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

且$a_1=b_1=1$，因为$b_3=a_3+1$，$b_5=a_5-7$，

则有$\begin{cases}1+2d=q^2+1\\1+4d=q^4-7\end{cases}$，解得：$\begin{cases}d=2\\q=2\end{cases}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

数列$\{b_n\}$的通项公式为：$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由（1）可知，$a_nb_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

则$A_n=1\times1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$，

$2A_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$，

两式相减得：

$$\begin{aligned}A_n&=(2n-1)\cdot 2^n-2(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-1\\&=(2n-1)\cdot 2^n-2\times\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-1\\&=(2n-3)\cdot 2^n+3,\end{aligned}$$

所以数列$\{a_nb_n\}$的前n项和为：$A_n=(2n-3)\cdot 2^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

(3) 由（1）可知，$a_n^2=\left(2^{n-1}\right)^2=4^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

则$S_n=1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}=\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4^n-1}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$，

由$S_n+\frac{1}{3}=t\cdot 2^{b_n}$得：$\frac{4^n-1}{3}+\frac{1}{3}=t\cdot 2^{2n-1}$，

化简得：$t=\frac{4^n}{3\times 2^{2n-1}}=\frac{2}{3}$，

则实数t的值为$\frac{2}{3}$.

7 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟（3月）第18题

已知数列$\{a_n\}$满足条件$a_1=1$，$a_2=3$，且$a_{n+2}=(-1)^n(a_n-1)+2a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式 .

(2) 设$b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$，$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求证：$S_n\geqslant\frac{2^n-n}{2^n+1}$.

答案 (1) $a_n=\begin{cases}3^{\frac{n}{2}},n为偶\\n,n为奇\end{cases}$.

(2) 证明见解析．

解析 (1) ①当n为偶数时，$a_{n+2}=3a_n$．

即$q^2=3$．

$q=3^{\frac{1}{2}}$．

$a_n=a_2\cdot q^{n-2}=3^{\frac{n}{2}}$．

②当n为奇数时$a_{n+2}=a_n+2$．

即$2d=2$．

$d=1$．

$a_n=a_1+(n-1)d=n$．

综上：$a_n=\begin{cases}3^{\frac{n}{2}},n为偶\\ n,n为奇\end{cases}$．

(2) 设$b_n=\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$，则$b_n=\dfrac{2n-1}{3^n}$，

则$S_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{9}+\dfrac{5}{27}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}$①，

则有$\dfrac{1}{3}S_n=\dfrac{1}{9}+\dfrac{3}{27}+\dfrac{5}{81}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}$②，

①−②可得：$\dfrac{2}{3}S_n=\dfrac{1}{3}+2\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)-\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}$，

变形可得：$S_n=1-\dfrac{n+1}{3^n}$，

若证明$S_n\geqslant\dfrac{2^n-n}{2^n+1}$，则需要证明$1-\dfrac{n+1}{3^n}\geqslant\dfrac{2^n-n}{2^n+1}$，

即证明$3^n\geqslant 2^n+1$（$n\geqslant 1$），

即证明$3^n-2^n\geqslant 1$，

显然成立，

故有$S_n\geqslant\dfrac{2^n-n}{2^n+1}$．

分段数列通项求解（分奇偶）

8 2020年天津和平区高三三模第18题15分

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，且$[3+(-1)^n]a_{n+2}-2a_n+2[(-1)^n-1]=0$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(1) 求a_3，a_4，a_5，a_6的值及数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$b_n=a_{2n-1}\cdot a_{2n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

答案 (1) $a_3=3$，$a_4=\frac{1}{4}$，$a_5=5$，$a_6=\frac{1}{8}$，$a_n=\begin{cases}n, & n=2k-1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n=2k\end{cases}$.

(2) $S_n=3-(2n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

解析 (1) 由题意得：

$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，且$[3+(-1)^n]a_{n+2}-2a_n+2[(-1)^n-1]=0$，

令$n=1$，得：

$2a_3-2a_1-4=0$，$a_3=3$，

令$n=2$，得：

$4a_4-2a_2=0$，$a_4=\frac{1}{4}$，

令$n=3$，得：

$2a_5-2a_3-4=0$，$a_5=5$，

令$n=4$，得：

$4a_6-2a_4=0$，$a_6=\frac{1}{8}$，

当n为奇数，即$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，有：

$2a_{n+2}-2a_n=4$，

即$a_{n+2}-a_n=2$，即相邻两个奇数项差恒为2，

设奇数项为a_{2k-1}，又因为$a_1=1$，

$\therefore a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times2=2k-1$，

即$a_n=n$.

当n为偶数，即$n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，有：

$4a_{n+2}=2a_n$，即$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_n$，

设偶数项为a_{2k}，且$a_2=\frac{1}{2}$，

$a_{2k}=a_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$，

即$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=\begin{cases}n, & n=2k-1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n=2k\end{cases}$.

(2) $b_n=a_{2n-1}\cdot a_{2n}$，即$b_n=(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(2n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

两式相减得：

$\frac{1}{2}S_n=1\times\frac{1}{2}+2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$-(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

$=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

$=\frac{3}{2}-(2n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$\therefore S_n=3-(2n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

裂项相消

9 **2020年天津河北区高三二模第18题15分**

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=3a_n+4n-7$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明：数列$\{a_n-2\}$是等比数列 .

(2) 若$b_n=\frac{a_n-2}{(a_{n+1}-1)(a_n-1)}$ ，$n\in\mathbf{N}^*$ ，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n .

答案 (1) 证明见解析 .

(2) $T_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\times 3^n+2}$.

解析 (1) 当$n=1$时，$2S_1=3a_1-3$，

$\therefore a_1=3$.

当$n\geqslant 2$时，$2S_n=3a_n+4n-7$，

$2S_{n-1}=3a_{n-1}+4(n-1)-7$，

$\therefore 2a_n=3a_n-3a_{n-1}+4$，即$a_n=3a_{n-1}-4$.

从而$a_n-2=3(a_{n-1}-2)$，即$\frac{a_n-2}{a_{n-1}-2}=3$.

又$a_1-2=1$，

$\therefore$数列$\{a_n-2\}$是以1为首项，3为公比的等比数列 .

(2) 由（1）知$a_n-2=3^{n-1}$，即$a_n=3^{n-1}+2$.

$\therefore b_n=\dfrac{a_n-2}{(a_{n+1}-1)(a_n-1)}=\dfrac{3^{n-1}}{(3^n+1)(3^{n-1}+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^{n-1}+1}-\dfrac{1}{3^n+1}\right)$.

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^0+1}-\dfrac{1}{3^1+1}+\dfrac{1}{3^1+1}-\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}+1}-\dfrac{1}{3^n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3^n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\times 3^n+2}$.

10 2017年天津南开区高三一模理科第18题13分

等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$2a_5$，a_4，$4a_6$成等差数列，且满足$a_4=4a_3^2$，数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{(n+1)b_n}{2}$，$n\in \mathbf{N}^*$，且$b_1=1$.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 设$c_n=\dfrac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n$，$n\in \mathbf{N}^*$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}c_k<\dfrac{1}{3}$.

答案 (1) $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$b_n=n$，$n\in \mathbf{N}^*$.

(2) 证明见解析 .

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由题意可知$2a_4=2a_5+4a_6$，即$a_4=a_4q+2a_4q^2$，

由$a_n>0$，则$2q^2+q-1=0$，解得：$q=\dfrac{1}{2}$，或$q=-1$（舍去），

$a_4=4a_3^2=4a_2a_4$，则$a_2=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore a_1=\dfrac{1}{2}$，

等比数列$\{a_n\}$通项公式$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

当$n\geqslant 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+1)b_n}{2}-\dfrac{nb_{n-1}}{2}$，

整理得：$\dfrac{b_n}{n}=\dfrac{b_{n-1}}{n-1}$，

$\therefore$数列$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$是首项为$\dfrac{b_1}{1}=1$的常数列，

则$\dfrac{b_n}{n}=1$，则$b_n=n$，$n\in \mathbf{N}^*$，

数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=n$，$n\in \mathbf{N}^*$.

(2) 由（1）可知：$c_n=\dfrac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n=\dfrac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\dfrac{1}{2^n}$. …（8分）

$\therefore c_n=\left(\dfrac{2}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\dfrac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}$，…（10分）

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}c_k=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5\cdot 2}\right)+\left(\dfrac{1}{5\cdot 2}-\dfrac{1}{7\cdot 2^2}\right)$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{n}},$$

由$n\in\mathbf{N}^*$，

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{n}}<\frac{1}{3},$$

故不等式成立．

11 **2019~2020学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高二下学期期中第17题14分**

已知数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，且$a_1+a_4=9$，$a_2a_3=8$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式

(2) 设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

答案

(1) $a_n=2^{n-1}$

(2) $T_n=\dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$

解析

(1) 方法一：$\because\{a_n\}$是递增的等比数列，且$a_1+a_4=9$，$a_2a_3=8$

$$\therefore\begin{cases}a_1+a_4=9\\a_1<a_4\\a_1a_4=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\a_4=8\end{cases}\Rightarrow q^3=\frac{a_4}{a_1}=8\Rightarrow q=2\Rightarrow a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}.$$

方法二：由题设知$a_1\cdot a_4=a_2\cdot a_3=8$，

又$a_1+a_4=9$，可解得$\begin{cases}a_1=1\\a_4=8\end{cases}$，或$\begin{cases}a_1=8\\a_4=1\end{cases}$（舍去）．

由$a_4=a_1q^3$得公比为$q=2$，故$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$．

(2) 由（Ⅰ）可知$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$

$$\therefore b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$\therefore T_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}.$$

分组求和

12 **2020年天津高三上学期高考模拟第19题15分**

已知数列$\{a_n\}$是公差为1的等差数列，数列$\{b_n\}$是等比数列，且$a_3+a_4=a_7$，$b_2\cdot b_4=b_5$，$a_4=4b_2-b_3$，数列$\{c_n\}$满足：$c_n=\begin{cases}b_{2m-1}, n=3m-2\\ b_{2m}, n=3m-1\\ a_m, n=3m\end{cases}$，其中$m\in\mathbf{N}^*$．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 记$t_n=c_{3n-2}c_{3n-1}+c_{3n-1}c_{3n}+c_{3n}c_{3n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{t_n\}$的前$n$项和．

教法备注

等比+错位相减

答案

(1) $a_n=n$，$b_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) $T_n=\dfrac{2}{15}\times16^n+\dfrac{6n-2}{3}\times4^n+\dfrac{8}{15}$．

解析

(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为d，数列$\{b_n\}$的公比为q，则$d=1$．

由$a_3+a_4=a_7$可得$a_1=d=1$．

由$b_2\cdot b_4=b_5$可得$b_1^2\cdot q^4=b_1\cdot q^4$，又因为$b_1\neq0$，$q\neq0$，

故可得$b_1=1$．

再由$a_4=4b_2-b_3$可得$q^2-4q+4=0$，解得$q=2$．

所以$a_n=n$，$b_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) $c_n=\begin{cases}2^{2m-2}, n=3m-2\\ 2^{2m-1}, n=3m-1\\ m, n=3m\end{cases}$，其中$m\in\mathbf{N}^*$．

所以$t_n=2^{2n-2}\cdot2^{2n-1}+2^{2n-1}\cdot n+n\cdot2^{2n}=2^{4n-3}+3n\cdot2^{2n-1}$，

记$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k$，$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}2^{4k-3}$，$B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot2^{2k-1}$，

则$A_n=\dfrac{2\times(1-2^{4n})}{1-2^4}=\dfrac{2(16^n-1)}{15}=\dfrac{2}{15}\times16^n-\dfrac{2}{15}$，

$B_n=1\times2+2\times8+3\times32+\cdots+n\times2^{2n-1}$，①

故有$4B_n=1\times8+2\times32+\cdots+(n-1)\times2^{2n-1}+n\times2^{2n+1}$，②

①−②，可得：

$-3B_n=2+8+32+\cdots+2^{2n-1}-n\times2^{2n+1}$

$=\dfrac{2(1-4^n)}{1-4}-n\times2^{2n+1}$

$=\dfrac{2-6n}{3}\times4^n-\dfrac{2}{3}$，

由此可得$3B_n=\dfrac{6n-2}{3}\times4^n+\dfrac{2}{3}$，

由$T_n=A_n+3B_n$，

故可得$T_n=\frac{2}{15}\times16^n+\frac{6n-2}{3}\times4^n+\frac{8}{15}$．

13 **2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考（二）第19题15分**

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2$，$S_5=30$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且$T_n=2^n-1$

．

(1) 求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\frac{b_n}{(b_n+1)(b_{n+1}+1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$M_n$，求$M_n$．

(3) 设$d_n=(-1)^n(a_nb_n+\ln S_n)$，求数列$\{d_n\}$的前$n$项和．

教法备注

错位相减+裂项相消

答案

(1) $a_n=2n$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$．

(3) $(-1)^n\ln(n+1)-\frac{2}{9}-\frac{3n+1}{9}\cdot(-2)^{n+1}$．

解析

(1) $S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=10+10d=30$，

$\therefore d=2$，

$\therefore a_n=2n$，

对数列$\{b_n\}$：当$n=1$时，$b_1=T_1=2^1-1=1$，

当$n\geqslant2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，

当$n=1$时也满足上式，

$\therefore b_n=2^{n-1}$．

(2) $c_n=\frac{b_n}{(b_n+1)(b_{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}=$
$\frac{(2^n+1)-(2^{n-1}+1)}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}=\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}$，

$\therefore M_n=\left(\frac{1}{2^0+1}-\frac{1}{2^1+1}\right)+\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$．

(3) $d_n=(-1)^n(a_nb_n+\ln S_n)=(-1)^na_nb_n+(-1)^n\ln S_n$，

$\because S_n=\dfrac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)$，

$\therefore \ln S_n=\ln n(n+1)=\ln n+\ln(n+1)$，

而$(-1)^n a_n b_n=(-1)^n\cdot 2n\cdot 2^{n-1}=n\cdot(-2)^n$，

设数列$\{(-1)^n a_n b_n\}$的前n项和为A_n，数列$\{(-1)^n\ln S_n\}$的前n项和为B_n，

$A_n=1\cdot(-2)^1+2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)^3+\cdots+n\cdot(-2)^n\ (1)$，

$-2A_n=1\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^4+\cdots+n\cdot(-2)^{n+1}\ (2)$，$(1)-(2)$得：

$3A_n=1\cdot(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n-n\cdot(-2)^{n+1}$

$=\dfrac{(-2)(1-(-2)^n)}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^{n+1}=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{3n+1}{3}\cdot(-2)^{n+1}$，

$\therefore A_n=-\dfrac{2}{9}-\dfrac{3n+1}{9}\cdot(-2)^{n+1}$，

当n为偶数时，

$B_n=-(\ln 1+\ln 2)+(\ln 2+\ln 3)-(\ln 3+\ln 4)+\cdots+[\ln n+\ln(n+1)]=\ln(n+1)$，

当n为奇数时，

$B_n=-(\ln 1+\ln 2)+(\ln 2+\ln 3)-(\ln 3+\ln 4)+\cdots-[\ln n+\ln(n+1)]=-\ln(n+1)$

，

由以上可知$B_n=(-1)^n\ln(n+1)$，

所以，数列$\{c_n\}$的前n项和$A_n+B_n=(-1)^n\ln(n+1)-\dfrac{2}{9}-\dfrac{3n+1}{9}\cdot(-2)^{n+1}$．

分段数列求和

14　2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末（七校联考）第19题15分

设$\{a_n\}$是等比数列，公比大于0，$\{b_n\}$是等差数列，（$n\in\mathbf{N}^*$）．已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{c_n\}$满足$c_1=c_2=1$，$c_n=\begin{cases}1,3^k<n<3^{k+1}\\ a_k,n=3^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$．

① 求数列$\{b_{3^n}(c_{3^n}-1)\}$的通项公式．

② 若$\left\{\dfrac{na_n}{(n+1)(n+2)}\right\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）的前$n$项和$T_n$，求$T_{3n}+\sum\limits_{i=1}^{3^n}b_ic_i$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

教法备注

裂项+分组求和

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) ① $3\times6^{n-1}-3^n$．

② $\dfrac{8^n}{3n+2}+\dfrac{6^{n+1}+4}{10}+\dfrac{9^n-2\times3^n}{2}$．

解析 (1) 由题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

则$2=q$，$a_3=q^2$，

则$q^2-q-2=0$，

解得$q=-1$（舍去），或$q=2$，

$\therefore a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

则由$a_4=b_3+b_5$，可得$b_1+3d=4$，

由$a_5=b_4+2b_6$，可得$3b_1+13d=16$，

联立$\begin{cases}b_1+3d=4\\3b_1+13d=16\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b_1=1\\d=1\end{cases}$，

$\therefore b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) ① 由（1），可知

$$c_n=\begin{cases}1,3^k<n<3^{k+1}\\a_k,n=3^k\end{cases}=\begin{cases}1,3^k<n<3^{k+1}\\2^{k-1},n=3^k\end{cases},$$

$\therefore b_{3^n}\left(c_{3^n}-1\right)=b_{3^n}\left(a_n-1\right)$

$=3^n\left(2^{n-1}-1\right)=3\times6^{n-1}-3^n$．

② 由题意，可得

$$\frac{na_n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n\times2^{n-1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^n}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n+1},$$

则$T_n=\dfrac{2^1}{3}-\dfrac{2^0}{2}+\dfrac{2^2}{4}-\dfrac{2^1}{3}+\cdots+\dfrac{2^n}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n+1}$

$=\dfrac{2^n}{n+2}-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore T_{3n}=\dfrac{2^{3n}}{3n+2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{8^n}{3n+2}-\dfrac{1}{2}$，

$$\because\sum_{i=1}^{3^n}b_ic_i=\sum_{i=1}^{3^n}\left[b_i\left(c_i-1\right)+b_i\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{3^n}b_i\left(c_i-1\right)+\sum_{i=1}^{3^n}b_i$$

$$=\sum_{i=1}^{3^n}b_{3^i}\left(c_{3^i}-1\right)+\sum_{i=1}^{3^n}b_i$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{n}\left(3\times 6^{i-1}-3^{i}\right)+\sum_{i=1}^{3^n} i\\
&=\sum_{i=1}^{n}3\times 6^{i-1}-\sum_{i=1}^{3^n}3^{i}+\sum_{i=1}^{3^n} i\\
&=\frac{3\times(1-6^n)}{1-6}-\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}+\frac{(1+3^n)\times 3^n}{2}\\
&=\frac{3\times(6^n-1)}{5}-\frac{3\times(3^n-1)}{2}+\frac{(1+3^n)\times 3^n}{2}\\
&=\frac{6^{n+1}+9}{10}+\frac{3^{2n}-2\times 3^n}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore T_{3n}+\sum_{i=1}^{3^n}b_ic_i&=\frac{8^n}{3n+2}-\frac{1}{2}+\frac{6^{n+1}+9}{10}+\frac{3^{2n}-2\times 3^n}{2}\\
&=\frac{8^n}{3n+2}+\frac{6^{n+1}+4}{10}+\frac{9^n-2\times 3^n}{2}.
\end{aligned}
$$

15 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟（3月）第19题

设$\{a_n\}$是等比数列的公比大于0，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$．

(1) 求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$．

(3) 设$d_n=\begin{cases}b_n,n\neq 2^k\\ b_n(\log_2 b_n+1),n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，求$\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i$．

答案

(1) $a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$．

(2) $T_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n+1}$．

(3) $\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i=2^{2n-1}+(4n-3)\cdot 2^{n-1}+2$．

解析

(1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q>0$，设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

$\because a_1=1$，由$a_3=a_2+2$，得$q^2=q+2$，

$\because q>0$，解得$q=2$，则$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$．

由$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$得$\begin{cases}2b_1+6d=8\\ 3b_1+13d=16\end{cases}$，

解得$b_1=d=1$，则$b_n=b_1+(n-1)d=n$．

(2)
$$
\begin{aligned}
c_n&=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}\\
&=\frac{(2^n+1)-(2^{n-1}+1)}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}=\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1},
\end{aligned}
$$

$$
\therefore T_n=\left(\frac{1}{2^0+1}-\frac{1}{2^1+1}\right)+\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\cdots
$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}.$$

(3) 由$d_n=\begin{cases}b_n,n\neq 2^k\\ b_n(\log_2 b_n+1),n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，

可得$d_n=\begin{cases}n\text{ , }n\neq 2^k\\ n(\log_2 n+1)\text{ , }n=2^k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^*$，

$$\sum_{i=1}^{2^n}d_i=\sum_{i=1}^{2^n}i-\sum_{i=1}^{n}2^i+\sum_{i=1}^{n}(i+1)\cdot 2^i,$$

$$\sum_{i=1}^{2^n}i=\frac{2^n(1+2^n)}{2}=2^{n-1}+2^{2n-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}2^i=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2,$$

设$M_n=2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n-1}+(n+1)\cdot 2^n$，

$2M_n=2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n+(n+1)\cdot 2^{n+1}$，

两式相减可得$-M_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot 2^{n+1}$

$$=2+\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\cdot 2^{n+1},$$

化为$M_n=n\cdot 2^{n+1}$，

所以$\sum_{i=1}^{n}(i+1)\cdot 2^i=n\cdot 2^{n+1}$，

则$\sum_{i=1}^{2^n}d_i=2^{2n-1}+(4n-3)\cdot 2^{n-1}+2$．

数列的函数性质

16 2020年天津和平区高三二模第19题16分

已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$a_1=\frac{3}{2}$，数列$\{b_n\}$是等比数列，且$b_1=a_1$，$b_2=-a_3$，$b_3=a^4$，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n．

(1) 求数列$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\begin{cases}b_n,n\leqslant 5\\ 8a_n,n\geqslant 6\end{cases}$，$(n\in\mathbf{N}^*)$．求$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$．

(3) 若$A\leqslant S_n-\frac{1}{S_n}\leqslant B$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求$B-A$的最小值．

答案

(1) $b_n=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$．

(2)

$$T_n=\begin{cases}1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n,n\leqslant 5\\ -\frac{3}{2}n^2+\frac{27}{2}n-\frac{927}{32},n\geqslant 6\end{cases}.$$

(3) $\frac{17}{12}$.

解析 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

则由题意可得$\begin{cases}\frac{3}{2}+2d=-\frac{3}{2}q\\ \frac{3}{2}+3d=\frac{3}{2}q^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}q=-\frac{1}{2}\\ d=-\frac{3}{8}\end{cases}$或$\begin{cases}q=-1\\ d=0\end{cases}$.

$\because$数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，

$\therefore q=-\frac{1}{2}$，

$\therefore$数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

(2) 由（1）知$a_n=\frac{3}{2}+(n-1)\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{15-3n}{8}$，

当$n\leqslant 5$时，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

当$n\geqslant 6$时，

$T_n=T_5+c_6+c_7+\cdots+c_n=T_5+8\left(a_6+a_7+\cdots+a_n\right)$

$T_5+8\cdot\dfrac{(n-5)\left(a_6+a_n\right)}{2}$

$=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5+8\cdot\dfrac{(n-5)\left(-\frac{3}{8}+\frac{15-3n}{8}\right)}{2}$

$=-\frac{3}{2}n^2+\frac{27}{2}n-\frac{927}{32}$.

$\therefore T_n=\begin{cases}1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n,n\leqslant 5\\ -\frac{3}{2}n^2+\frac{27}{2}n-\frac{927}{32},n\geqslant 6\end{cases}$.

(3)

由（1）可知$S_n=\dfrac{\frac{3}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

令$t=S_n-\frac{1}{S_n}$，

$\because S_n>0$，

$\therefore t$随着S_n的增大而增大，

当n为奇数时，$S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$在奇数集上单调递减，

$S_n\in\left(1,\frac{3}{2}\right]$，$t\in\left(0,\frac{5}{6}\right]$，

当n为偶数时，$S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$在偶数集上单调递增，

$S_n\in\left[\frac{3}{4},1\right)$，$t\in\left[-\frac{7}{12},0\right)$，

$\therefore t_{\min}=-\frac{7}{12}$，$t_{\max}=\frac{5}{6}$，

$\because A\leqslant S_n-\dfrac{1}{S_n}\leqslant B$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

$\therefore\left[-\dfrac{7}{12},\dfrac{5}{6}\right]\subseteq[A,B]$，

$\therefore B-A$的最小值为$\dfrac{5}{6}-\left(-\dfrac{7}{12}\right)=\dfrac{17}{12}$．

17 **2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟（4月）第19题15分**

设各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=10$，$a_3+a_5=40$，$b_n=\log_2 a_n$．

(1) 求数列$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 若$c_1=1$，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{b_n}{a_n}$，求证：$c_n<3$．

(3) 是否存在正整数k，使得$\dfrac{1}{b_n+1}+\dfrac{1}{b_n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{b_n+n}>\dfrac{k}{10}$对任意正整数$n$均成立？若存在，求出$k$的最大值，若不存在，说明理由．

答案 (1) $b_n=n$．

(2) 证明见解析．

(3) 存在，$k<5$．

解析 (1) 设各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

则$a_1+a_1q^2=10$，$a_1q^2+a_1q^4=40$，

解得$a_1=2$，$q=2$，

即有$a_n=2^n$，

$b_n=\log_2 2^n=n$．

(2) $c_1=1$，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{b_n}{a_n}=c_n+\dfrac{n}{2^n}$，

则$c_n=c_1+(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+\cdots+(c_n-c_{n-1})$

$=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$，

即有$\dfrac{1}{2}c_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}$，

两式相减可得$\dfrac{1}{2}c_n=1+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{n-1}{2^n}$

$=1+\dfrac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n-1}{2^n}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n}{2^n}$，

即有$c_n=3-\dfrac{n}{2^{n-1}}<3$．

(3) 假设存在正整数k，使得$\frac{1}{b_n+1}+\frac{1}{b_n+2}+\cdots\frac{1}{b_n+n}>\frac{k}{10}$对任意正整数$n$均成立．

令$S_n=\frac{1}{b_n+1}+\frac{1}{b_n+2}+\cdots\frac{1}{b_n+n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，

$S_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$，

即有$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$，

即为$S_{n+1}>S_n$，

数列$\{S_n\}$递增，S_1最小，且为$\frac{1}{2}$，

则有$\frac{k}{10}<\frac{1}{2}$，解得$k<5$．

放缩

18 **2020年天津南开区高三二模第19题15分**

设$\{a_n\}$是各项都为整数的等差数列，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等比数列，且$a_1=b_1=1$，$a_3+b_2=7$，$S_5b_2=50$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\log_2b_1+\log_2b_2+\log_2b_3+\cdots+\log_2b_n$，$T_n=a_{c_n+1}+a_{c_n+2}+a_{c_n+3}+\cdots+a_{c_n+n}$．

① 求T_n．

② 求证：$\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{T_i-i}}<2$．

答案 (1) $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) ① $T_n=n^3$．

② 证明见解析．

解析 (1) 设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，

依题意，$S_5b_2=5(1+2d)q=50$，$a_3+b_2=(1+2d)+q=7$，

解得$d=2$，$q=2$或$d=\frac{1}{2}$，$q=5$，

由于$\{a_n\}$是各项都为整数的等差数列，所以$d=2$，$q=2$．

从而$a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) ① $\because\log_2b_n=n-1$，

$\therefore c_n=0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(0+n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$，

$\therefore a_{c_n+i}=2\left(\dfrac{n^2-n}{2}+i\right)-1=n^2-n-1+2i$，

$\therefore T_n=n^2-n-1+2+n^2-n-1+4+\cdots+n^2-n-1+2n$

$=n\left(n^2-n-1\right)+(2+4+\cdots+2n)$

$=n\left(n^2-n-1\right)+n(n+1)=n^3$.

② $\because\dfrac{1}{\sqrt{T_n-n}}=\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2}$，

而$\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2}<\sqrt{\dfrac{n+1+n-1}{2}}=\sqrt{n}$，

$\therefore\dfrac{1}{\sqrt{T_n-n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，

$\therefore\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{T_i-i}}<\dfrac{1}{\sqrt{2-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{4+1}}$

$+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<2$.

2. 基本不等式

配凑及1的代换

19 已知$a>0$，$b>0$，且$\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}=\dfrac{1}{6}$，则$a+b$的最小值为 ______ .

答案 20

解析 $a>0$，$b>0$，且$\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}=\dfrac{1}{6}$，

则$a+b=6[(a+2)+(b+2)]\left(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}\right)-4$

$=6\left(2+\dfrac{b+2}{a+2}+\dfrac{a+2}{b+2}\right)-4$

$\geqslant 6\left(2+2\sqrt{\dfrac{b+2}{a+2}\cdot\dfrac{a+2}{b+2}}\right)-4$

$=20$，

当且仅当$\dfrac{b+2}{a+2}=\dfrac{a+2}{b+2}$且$\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}=\dfrac{1}{6}$，

即$a=b=10$时取等号，

$a+b$的最小值20．

故答案为：20．

20 已知$a>0$，$b>0$，且$\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{3}{b+2}=1$，则$a+2b$的最小值为______．

答案 $3+6\sqrt{2}$

解析 $\because a>0$，$b>0$，

$a+2b=(a+2)+2(b+2)-6$，

由$\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{3}{b+2}=1$，

则$a+2b=[(a+2)+2(b+2)]\left(\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{3}{b+2}\right)-6$

$=3+\dfrac{3(a+2)}{b+2}+\dfrac{6(b+2)}{a+2}+6-6$

$=\dfrac{3(a+2)}{b+2}+\dfrac{6(b+2)}{a+2}+3$

$\because \dfrac{3(a+2)}{b+2}+\dfrac{6(b+2)}{a+2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{3(a+2)}{b+2}\cdot\dfrac{6(b+2)}{a+2}}=6\sqrt{2}$，

当$\dfrac{3(a+2)}{b+2}=\dfrac{6(b+2)}{a+2}$时，

即$b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+1$，$a=3\sqrt{2}+1$时，等号成立，

$\therefore a+2b\geqslant 3+6\sqrt{2}$，

$\therefore a+2b$的最小值为$3+6\sqrt{2}$．

故答案为：$3+6\sqrt{2}$．

换元法/配凑法

21 已知实数若x，y满足$x>y>0$，则$\dfrac{4x+2y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$的取值范围是______．

答案 $[5,+\infty)$

解析 $\because x>y\geqslant 0$，所以$x+y>x-y>0$，$4x+2y=3(x+y)+(x-y)$，

$\because \dfrac{4x+2y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3(x+y)+(x-y)}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$

$= \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} + 3 \geqslant 2\sqrt{\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x+y}{x-y}} + 3 = 5$，

当且仅当$x-y=x+y$时，即当$y=0$时，等号成立.

因此，$\frac{4x+2y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$的最小值为$5$．

故答案为：$[5,+\infty)$．

22 若正实数x，y满足$x+2y=5$，则$\frac{x^2-3}{x+1} + \frac{2y^2-1}{y}$的最大值是 ______ .

答案 $\frac{8}{3}$

解析 $\because x$，y为正实数，

$\therefore \frac{x^2-3}{x+1} + \frac{2y^2-1}{y} = \frac{(x+1)^2-2(x+1)-2}{x+1} + 2y - \frac{1}{y}$

$= x+1-2+2y-\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y}\right)$，

$= x+2y-1-\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y}\right)(x+1+2y)$

$= 4-\frac{1}{6}\left(2+2+\frac{4y}{x+1}+\frac{x+1}{y}\right) \leqslant 4-\frac{1}{6}(4\times 2\sqrt{4}) = \frac{8}{3}$．

当且仅当$\frac{4y}{x+1} = \frac{x+1}{y}$即$x=2$，$y=\frac{3}{2}$时，取等号，

则$\frac{x^2-3}{x+1} + \frac{2y^2-1}{y}$最大值是$\frac{8}{3}$．

1的代换（数化为式）

23 已知正数a，b满足$ab=1$，则$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$的最小值为 ______ ．

答案 4

解析 $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a}} = 4$，

当且仅当$a=b=1$时等号成立．

24 已知a，b均为正数，且$a+b=1$，则$\frac{a^2+1}{2ab}-1$的最小值为 ______ ．

答案 $\sqrt{2}$

解析 因为$a+b=1$，

所以$\dfrac{a^2+1}{2ab}-1$

$=\dfrac{a^2+(a+b)^2}{2ab}-1$

$=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{2a}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{2a}}$

$=\sqrt{2}$，

当且仅当$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{2a}$即$a=\sqrt{2}-1$、$b=2-\sqrt{2}$时取等号，

故答案为：$\sqrt{2}$．

25 若$x>0$，$y>0$，且$x+2y=1$，则$\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{1}{2y}$（　）．

A. 有最大值为$\dfrac{7}{3}$

B. 有最小值为$\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$

C. 有最小值为2

D. 无最小值

答案 B

解析 因为$x+2y=1$，

所以$\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{1}{2y}$

$=\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{x+2y}{2y}$

$=\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{x+y}{2y}+\dfrac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{y}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{2y}}+\dfrac{1}{2}$

$=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$，

当且仅当$\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x+y}{2y}$，

即$x=3-2\sqrt{2}$，

$y=\sqrt{2}-1$时取“$=$”．

故选$\mathbf{B}$．