

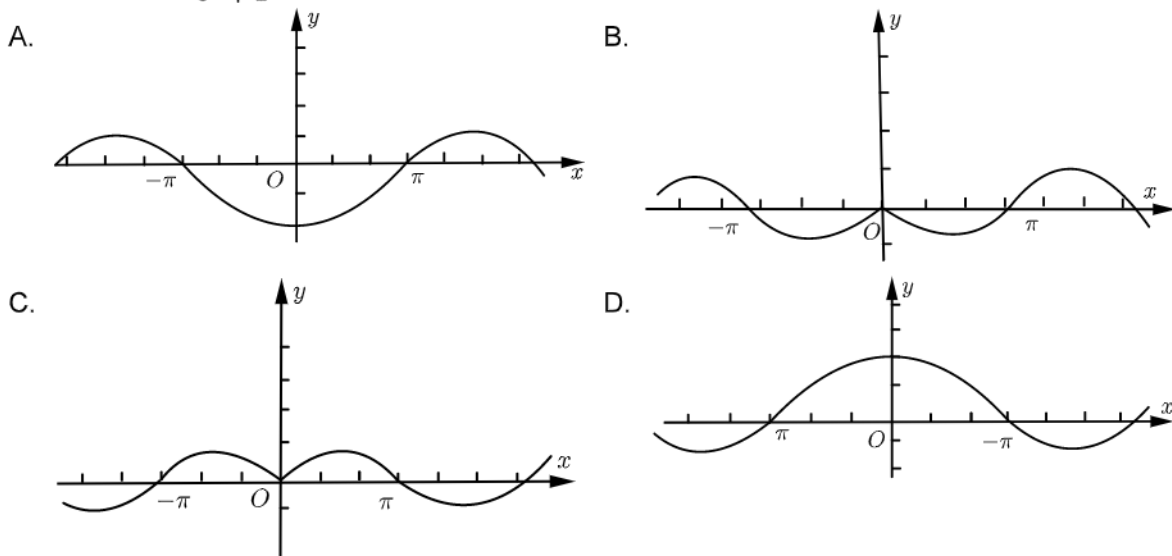
01导函数专项复习练习题

1. 导函数的应用

图像判定

1 2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考(二)第6题5分

函数 $f(x) = \frac{(e^x - 1) \sin x}{e^x + 1}$ 的部分图象大致为().



答案 C

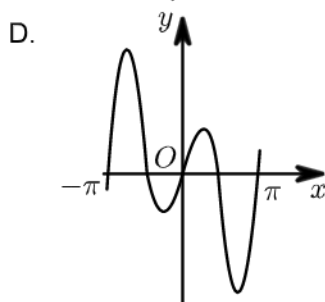
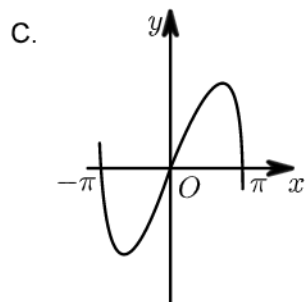
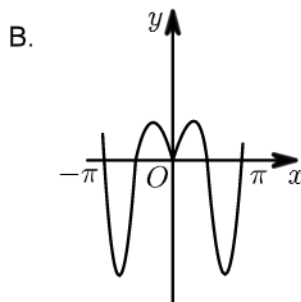
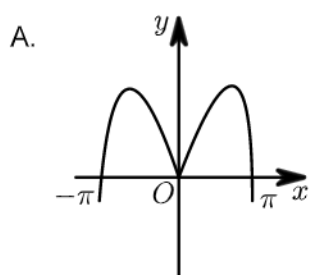
解析 当 $x=0$ 时, $f(0) = \frac{(e^0 - 1) \sin 0}{e^0 + 1} = 0$, 故排除选项A、D,

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) \sin \frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1} > 0$, 故排除选项B.

故选C.

2 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟(3月)第7题5分

函数 $y = 2^{|x|} \sin 2x$ 的图象可能是().



答案 D

解析 函数 $y = 2^{|x|} \cdot \sin 2x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,

$$\text{且 } f(-x) = 2^{|-x|} \sin(-2x) = -2^{|x|} \sin 2x = -f(x),$$

$\therefore y = 2^{|x|} \cdot \sin 2x$ 是奇函数, 排除A、B选项.

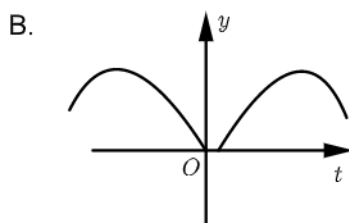
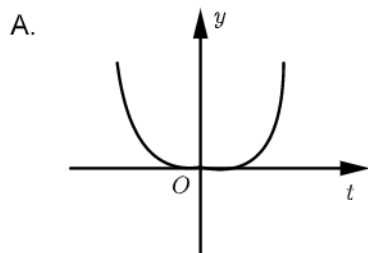
$$\text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = 2^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{\pi}{2}} \sin \pi = 0.$$

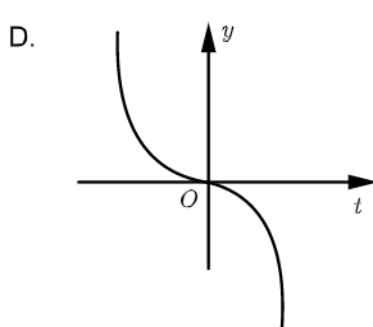
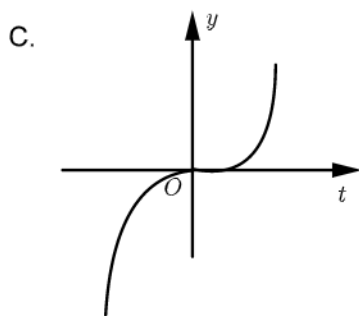
故排除C选项.

故选D.

3 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末(七校联考)第3题5分

我国著名数学家华罗庚说过:“数缺形时少直观,形少数时难入微,数形结合百般好,隔离分家万事体.”函数 $f(x) = \frac{x(e^{-x} + e^x)}{2 + \cos x}$ 的部分图象大致为().



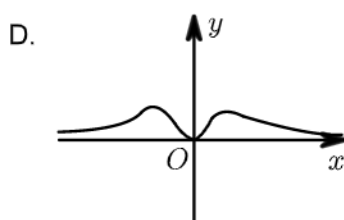
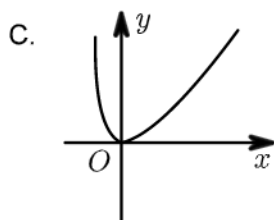
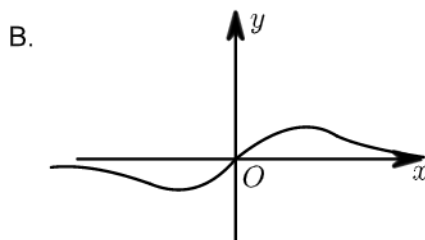
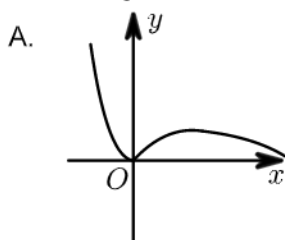


答案 C

解析 $f(-x) = \frac{-x(e^x + e^{-x})}{2 + \cos(-x)} = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称, 排除 A, B, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 排除 D. 故选 C.

4 2020年天津高三上学期高考模拟第3题5分

函数 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 的图象大致是 ().



答案 A

解析 由 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 得 $y' = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x}$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数单调减,

当 $x \in (0, 2)$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增,

只有 A 项图象符合条件.

故选 A.

比较大小

5 2018~2019学年12月天津河西区天津市实验中学高三上学期月考理科第5题5分

已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 若 $a = -f(\log_2 \frac{1}{5})$, $b = f(\log_2 4.1)$, $c = f(2^{0.8})$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

答案 C

解析 由题意: $a = f\left(-\log_2 \frac{1}{5}\right) = f(\log_2 5)$,

且: $\log_2 5 > \log_2 4.1 > 2$, $1 < 2^{0.8} < 2$,

据此: $\log_2 5 > \log_2 4.1 > 2^{0.8}$,

结合函数的单调性有: $f(\log_2 5) > f(\log_2 4.1) > f(2^{0.8})$,

即 $a > b > c$, 即 $c < b < a$.

本题选择C选项.

6 2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第3题

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则三个数 $a = f(-\log_3 13)$,

$b = f\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}\right)$, $c = f(2^{0.6})$ 的大小关系为 ().

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $b > a > c$

D. $c > a > b$

答案 C

解析 $\because 2 = \log_3 9 < \log_3 13 < \log_3 27 = 3$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$, $0 < 2^{0.6} < 2$,

即: $0 < 2^{0.6} < \log_3 13 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$,

$\because f(x)$ 为偶函数,

$\therefore a = f(\log_3 13)$,

又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}\right) > f(\log_3 13) > f(2^{0.6}),$$

即 $b > a > c$,

故选C.

7 2018~2019学年2月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考理科第6题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x-1)$ 的图像关于 $x=1$ 对称, 且当 $x>0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 若

$a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.5^{-1.3})$, $c = f(0.7^6)$, 则 a, b, c 的大小关系是().

A. $c > a > b$

B. $b > a > c$

C. $a > c > b$

D. $c > b > a$

答案 A

解析 $\because f(x-1)$ 关于 $x=1$ 对称, 则 $f(x)$ 关于 y 轴对称, 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore \log_{0.5} 3 < 0, \log_{0.5} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3,$$

$$\therefore f(-\log_2 3) = f(\log_2 3),$$

$$\therefore 1 < \log_2 3 < 2,$$

$$\text{又} \because 0.5^{-1.3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.3} = 2^{1.3} > 2,$$

$$\text{又} \because 0.7^6 < 1,$$

$$\therefore 0.7^6 < \log_2 3 < 0.5^{-1.3},$$

又 $\because$ 在 $x>0$, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore f(0.7^6) > f(\log_2 3) > f(0.5^{-1.3}),$$

$$\therefore c > a > b.$$

故选A.

8 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末(七校联考)第6题5分

已知函数 $f(x) = e^{-|x|}$, $a = f\left(\log_e \frac{1}{3}\right)$, $b = f\left(\log_3 \frac{1}{e}\right)$, $c = f\left(\log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{9}\right)$, 则下述关系式正确的是().

A. $b > a > c$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $a > b > c$

答案 A

解析

$\because$ 函数 $f(x) = e^{-|x|}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore a = f\left(\log_e \frac{1}{3}\right) = f(-\log_e 3) = f(\log_e 3), b = f\left(\log_3 \frac{1}{e}\right) = f(-\log_3 e) = f(\log_3 e),$$

$$c = f\left(\log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{9}\right) = f(\log_e 9) = f(2\log_e 3),$$

$$\therefore 1 < \log_e 3 < 2, 0 < \log_3 e < 1, 2\log_e 3 > 2,$$

$$\therefore f(2\log_e 3) < f(\log_e 3) < f(\log_3 e), \text{ 即 } c < a < b.$$

故选 A.

9 2020年天津武清区高三二模第7题5分

已知 $a = \log_3 0.3$, $b = \log_{0.3} 2$, $c = 3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > b > a$

D. $c > a > b$

答案 C

解析

$$\because \log_3 0.3 < \log_3 \frac{1}{3} = -1, \text{ 故 } a < -1,$$

$$\because \log_{0.3} \frac{10}{3} < \log_{0.3} 2 < \log_{0.3} 1,$$

$$\therefore -1 < \log_{0.3} 2 < 0, \text{ 故 } -1 < b < 0,$$

$$\because 3^{0.2} > 3^0 = 1,$$

$$\therefore c > 1,$$

$$\text{故 } c > b > a.$$

故选 C.

10 2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考(二)第7题5分

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 ().

A. $f(2^{1.1}) > f(\ln 3) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2)$

B. $f(2^{1.1}) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2) > f(\ln 3)$

C. $f(\ln 3) > f(2^{1.1}) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2)$

D. $f(\ln 3) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2) > f(2^{1.1})$

答案 A

解析

$$\because 2^1 < 2^{1.1} < 2^2,$$

$$\therefore 2 < 2^{1.1} < 4,$$

$$\therefore \ln e < \ln 3 < \ln e^2,$$

$$\therefore 1 < \ln 3 < 2.$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} 1,$$

$$\therefore -1 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < 0,$$

$$\therefore 0 < -\log_{\frac{1}{3}} 2 < 1.$$

$$\text{即 } 0 < -\log_{\frac{1}{3}} 2 < \ln 3 < 2^{1.1}.$$

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{3}} 2\right) = f\left(-\log_{\frac{1}{3}} 2\right), f(2^{1.1}) > f(\ln 3) > f\left(-\log_{\frac{1}{3}} 2\right) = f\left(\log_{\frac{1}{3}} 2\right).$$

故选 A.

11 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟(4月)第8题5分

设函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 2) - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$, $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.7^{1.4})$, $c = f(3^{0.75})$, 则 a , b , c 的大小关系是 ().

A. $a < b < c$

B. $b < c < a$

C. $b < a < c$

D. $c < b < a$

答案 B

解析

$$\begin{aligned} \text{由函数 } f(x) &= \log_2(x^2 - 2x + 2) - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} \\ &= \log_2[(x-1)^2 + 1] - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}. \end{aligned}$$

可得 $f(x)$ 图象关于 $x = 1$ 对称, 且当 $x \geq 1$ 时, $f(x)$ 是增函数;

可知自变量离对称轴越近, 函数值越小;

$$\because -2 < \log_{0.5} 3 < -1; 0 < 0.7^{1.4} < 1, 1 < 3^{0.75} = \sqrt[3]{27} < 3,$$

$$a = f(\log_{0.5} 3) > c = f(3^{0.75}) > b,$$

$$= f(0.7^{1.4}).$$

即 $b < c < a$.

故选B .



求解切线方程

12 2019~2020学年3月天津南开区天津市南开翔宇学校高三下学期月考第10题5分

曲线 $y = x(3\ln x + 1)$, 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____ .

答案

$$4x - y - 3 = 0$$

解析

$$\therefore y' = 3\ln x + 4 ,$$

$\therefore$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率为4 ,

则切线方程为 $4x - y - 3 = 0$.

13 2020年山东济南历下区山东师范大学附属中学高三三模第13题5分

曲线 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 _____ .

答案

$$2x + y - 3 = 0$$

解析

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} ,$$

$$\text{故 } f(1) = 1 , f'(1) = -2 ,$$

所以切线为 : $y - 1 = -2(x - 1)$,

$$\text{即 } 2x + y - 3 = 0 .$$

故答案为 : $2x + y - 3 = 0$.

14 2017~2018学年宁夏银川兴庆区银川市第一中学高二上学期期末理科第7题5分

曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率等于 () .

A. $2e$

B. e

C. 2

D. 1

答案

C

解析 因为 $y' = e^{x-1} + xe^{x-1}$, 所以曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率 $k = e^{1-1} + e^{1-1} = 2$, 故答案为 C.

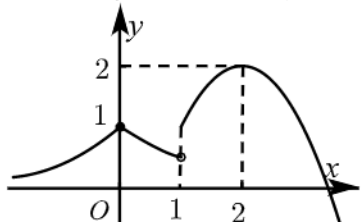
2. 函数与方程

15 2020年天津河北区高三二模第15题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

答案 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$

解析 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 图象如图所示:



若要使 $f(x) = a$ 恰有两个相异实数解, 则 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$.

故答案为: $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$.

16 2020年天津红桥区高三二模第9题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 ().

A. $(-\infty, 0)$

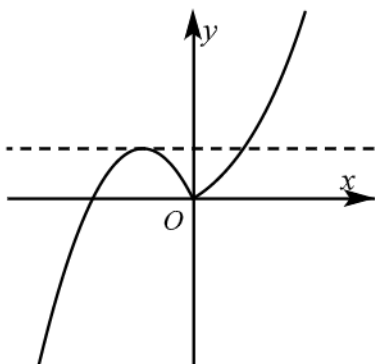
B. $(1, +\infty)$

C. $(0, 1)$

D. $[0, 1]$

答案 C

解析 画出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示要直线 $y = m$ 与 $f(x)$ 的图象交点有3个，
故 $0 < m < 1$ ，
故选C项。



17 2020年天津宝坻区高三二模第9题5分

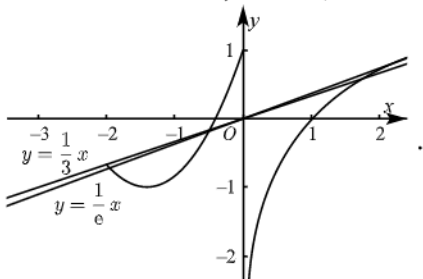
已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{17}{6}x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \end{cases}$ ，函数 $g(x) = kx$ ，若关于 x 的方程 $f(x) - g(x) = 0$ 有

3个互异的实数根，则实数 k 的取值范围是 ()。

- A. $\left(\frac{1}{e}, \frac{5}{6}\right)$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$ C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

答案 B

解析 画出 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{17}{6}x + 1, & -2 \leq x < 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \end{cases}$ 的图象如图所示，



$f(x) - g(x) = 0$ 有3个互异的实数根，即为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点，

当 $x = -2$ 时， $f(x) = (-2)^2 + \frac{17}{6} \times (-2) + 1 = -\frac{2}{3}$ ，

把 $\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$ 代入 $g(x) = kx$ 得： $k = \frac{1}{3}$ ，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点，

当 $x = e$ 时， $f(x) = \ln e = 1$ ，

把 $(e, 1)$ 代入 $g(x) = kx$ 得： $k = \frac{1}{e}$ ，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点，

结合图象分析可知： $k \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$ ，故选：B。

18 2020年天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高三二模第9题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图像上, 则实数 k 的取值范围是 ().

- A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-\frac{1}{2}, 0)$ D. $(-1, 0)$

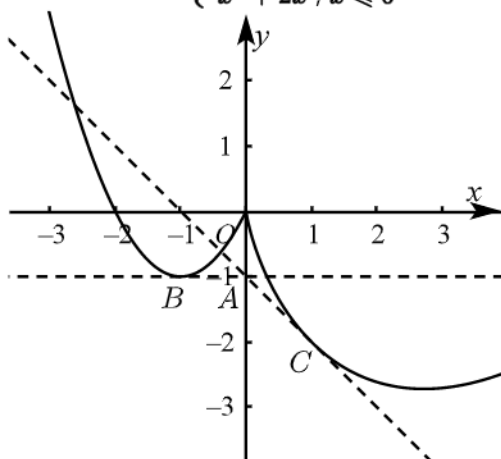
答案 B

解析 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图像上,

而函数 $y = kx - 1$ 关于直线 $y = -1$ 的对称图像为 $y = -kx - 1$,

$\therefore f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像与 $y = -kx - 1$ 的图像有且只有四个不同的交点,

作函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像与 $y = -kx - 1$ 的图像如下,



易知直线 $y = -kx - 1$ 恒过点 $A(0, -1)$,

设直线 AC 与 $y = x \ln x - 2x$ 相切于点 $C(x, x \ln x - 2x)$, $y' = \ln x - 1$,

$$\text{故 } \ln x - 1 = \frac{x \ln x - 2x + 1}{x},$$

解得, $x = 1$, 故 $k_{AC} = -1$,

易得直线 AB 与 $y = x^2 + 2x$ 相切于点 $B(-1, -1)$,

故 $k_{AB} = 0$,

故 $-1 < -k < 0$,

故 $0 < k < 1$.

故选 B.

3. 导数解答



零点存在性定理的证明

19 2020年天津红桥区高三二模第20题15分

函数 $f(x) = \ln x - ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2) 已知 $x_1 = \sqrt{e}$ 和 x_2 是函数 $f(x)$ 的两个不同的零点, 求 a 的值并证明: $x_2 > e^{\frac{3}{2}}$. (其中 e 为自然对数的底数)

答案

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的递增区间为 $(0, +\infty)$, 无极值;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 递减区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 极大值为 $-\ln a - 1$, 无极小值.

(2) $a = \frac{\sqrt{e}}{2e}$, 证明见解析.

解析

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x},$$

①若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 无极值.

②若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$,

当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数,

当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数,

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 有极大值, 极大值为 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 = -\ln a - 1$, 无极小值,

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的递增区间为 $(0, +\infty)$, 无极值;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 递减区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$,

极大值为 $-\ln a - 1$, 无极小值.

(2) $\because x_1 = \sqrt{e}$ 是函数 $f(x)$ 的零点,

$$\therefore f(\sqrt{e}) = 0, \text{ 即 } \frac{1}{2} - a\sqrt{e} = 0,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2e},$$

$$\therefore f(x) = \ln x - \frac{1}{2\sqrt{e}}x,$$

$$\therefore f(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2} - \frac{e}{2} > 0, f(e^{\frac{5}{2}}) = \frac{5}{2} - \frac{e^2}{2} < 0,$$

$$\therefore f(e^{\frac{3}{2}}) \cdot f(e^{\frac{5}{2}}) < 0,$$

由 (1) 知, 函数 $f(x)$ 在 $(2\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{5}{2}})$ 上有唯一零点,

因此 $x_2 > e^{\frac{3}{2}}$.