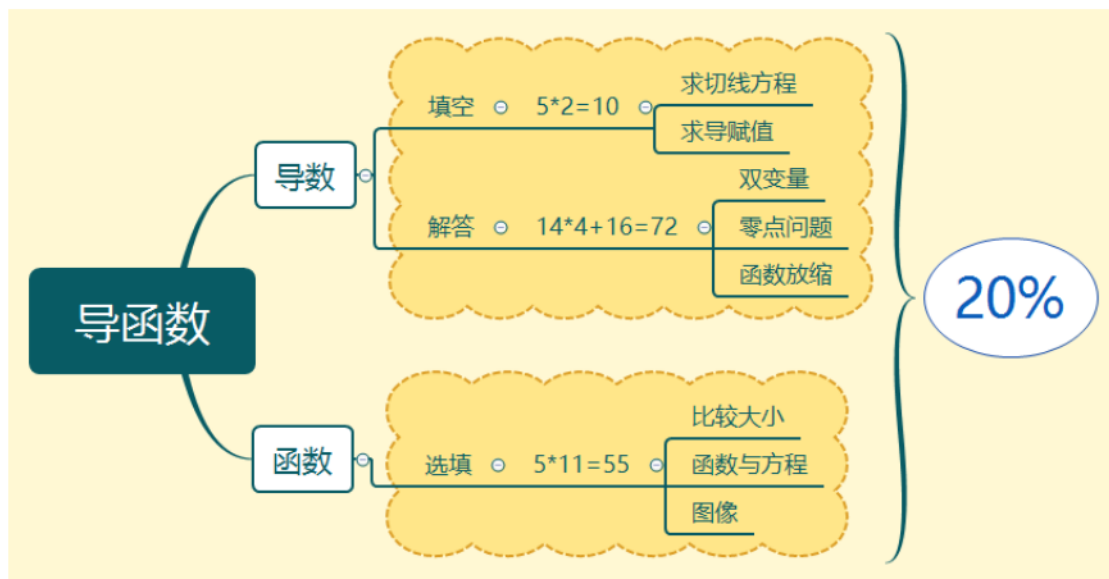


01导函数专项复习



1. 导函数的基础应用

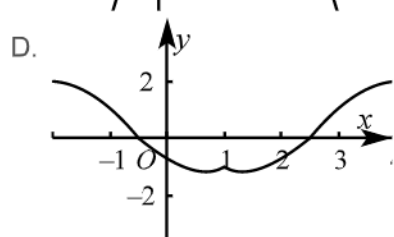
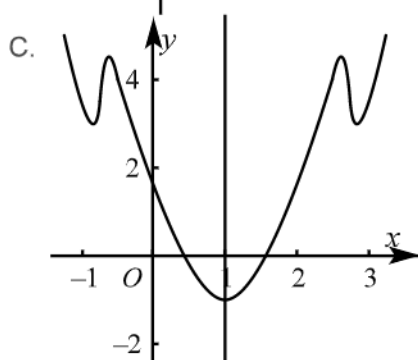
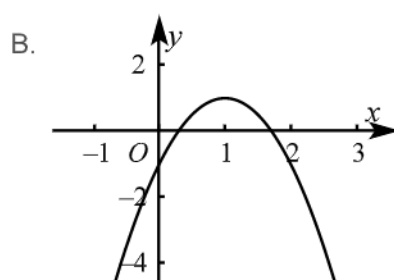
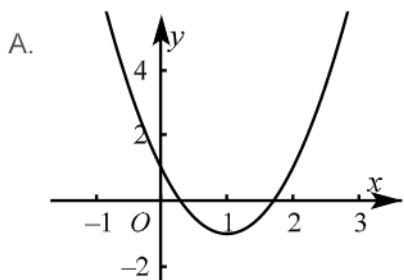


图像判定

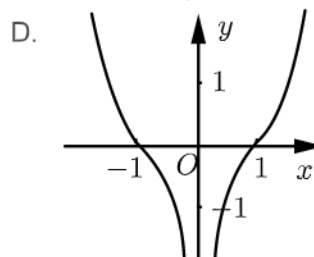
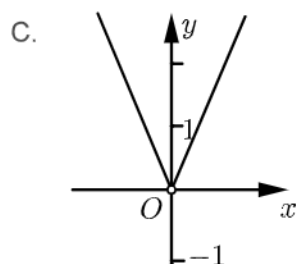
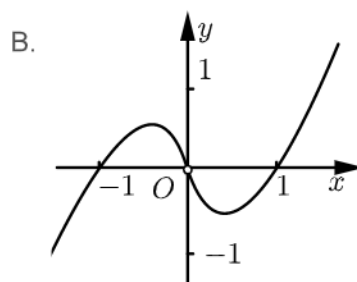
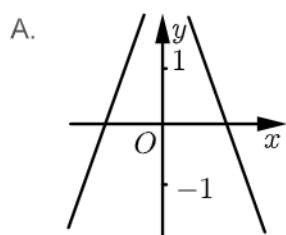
此类题目多出现于选择题部分，题号靠前，难度较低

主要解题办法及思路：**赋值、判断奇偶、判断单调性、判断正负**

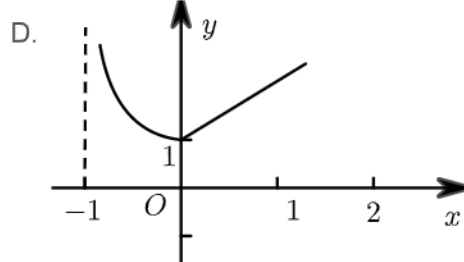
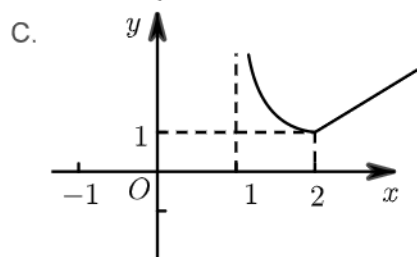
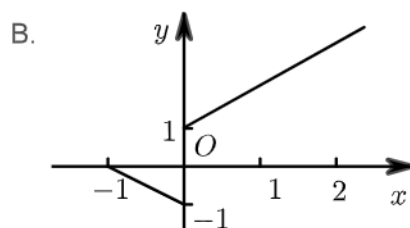
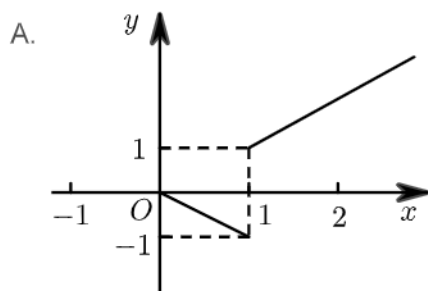
1 函数 $f(x) = e^{|x-1|} - 2 \cos(x-1)$ 的部分图象可能是 () .



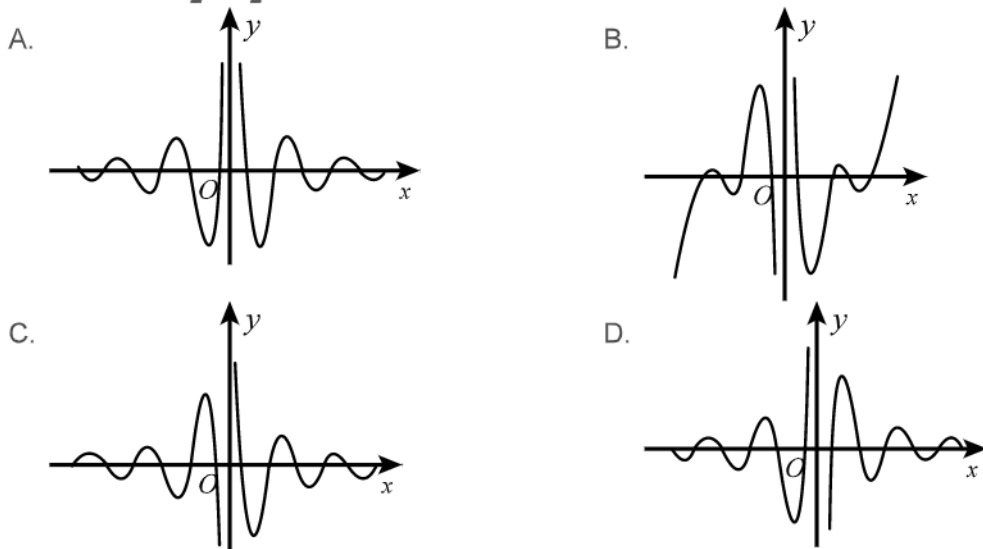
2 函数 $f(x) = (3^x + 3^{-x}) \lg|x|$ 的图象大致为 () .



3 已知函数 $f(x) = e^{|\ln x|}$, 则函数 $y = f(x+1)$ 的图象大致为 () .



4 若函数 $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$ 的图象大致为 () .



比较大小

5 已知函数 $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$, 且 $a = f(0.2^{0.2})$, $b = f(\log_3 4)$, $c = f(\log_{\frac{1}{3}} 3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

6 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数 , 令 $a = \ln 2$,

$b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 2$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系为 () .

- A. $f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$ C. $f(c) < f(b) < f(a)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$
 $< f(a)$

7 设 a, b, c 均为正数 , 且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_{\frac{1}{2}} b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^c = \log_2 c$, 则 () .

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

8 设 $a = \log_3 \pi$, $b = \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 \sqrt{2}$, 则 () .

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

求解切线方程

9 已知函数 $f(x) = 4\sin x + \frac{1}{3}x^3$ 在 $x = 0$ 处的切线与直线 $nx - y - 6 = 0$ 平行, 则 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中常数项为 _____.

10 曲线 $y = e^x - \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 _____ 在该点处的切线方程为 _____.

2. 导函数模考常见基础题型

分段函数单调性

11 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 若函数 $y = f(x+2)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 对任意数 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 若 $f(a) \leq f(3a+1)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ B. $[-2, -1]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

12 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^{-x}, & x < -1 \\ (1-2a)x + 3a, & x \geq -1 \end{cases}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ($x_1 \neq x_2$), 总有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

利用函数性质求解参数值或求解不等式

13 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + x + a$ (a 为常数), 则 $f(a) =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. -2

- 14 若函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数，则使不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) + \log_2 6 < 0$ 成立的 m 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 1)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ D. $(1, +\infty)$



利用函数周期性进行赋值运算

- 15 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(1-x)$ ，且当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = 2^x - m$ ，则 $f(2019) = ()$.

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

3. 函数与方程

此类题目多出现于选择题、填空题最后一题，题号靠前，难度较高

主要题型及解题思路：

①分参型函数交点问题：分离参数后，画出不含参函数图像，平移 $y = a$ (参数)，确定解个数；

②不分参型函数交点问题：画出不含参函数图像，之后判断等号另一侧含参直线的方程是斜率确定还是过定点型——

斜率确定——平移；

过定点——绕定点旋转

③复合函数型 $y = f(g(x))$ ——将 $g(x)$ 看作一个整体 t 分析 $f(t)$ ，再分析 $t = g(x)$ 的解个数



分参型

- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = |f(x)| - x + m$ 恰有三个零点，则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{4}, 0\right]$ B. $\left[0, \frac{1}{4}\right) \cup (2, +\infty)$ C. $\left(-2, -\frac{1}{4}\right] \cup [0, +\infty)$ D. $\left(\frac{1}{4}, 2\right) \cup [0, +\infty)$

过定点型

- 17 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f(x) - |kx-1|$ 有且只有3个零点, 则实数 k 的取值范围 () .

A. $(0, \frac{9}{16})$ B. $(\frac{9}{16}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(-\frac{1}{16}, 0) \cup (0, \frac{9}{16})$

- 18 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 且 $f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. 若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有6个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

斜率确定型

- 19 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_a(x+2), & x \geq -1 \\ (x+1)^2 + 4a, & x < -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调函数, 若函数 $g(x) = |f(x)| - |x-2|$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ B. $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ C. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{13}{16}\}$ D. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \cup \{\frac{13}{16}\}$

复合函数型

- 20 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 () .

A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

- 21 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -1$. 若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 _____; 设函数 $g(x) = \begin{cases} (\sqrt{x}+1)^2 - a - 1, & x > 0 \\ 2^x + x - a + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 _____ .



换元法求解型

22

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4x^2 + 8x}, & -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有 6 个零点, 则实

数 a 的取值范围是 _____ .

4. 导数解答



恒能成立典型问题

23

已知函数 $f(x) = e^x (\sin x - \cos x + 4)$, 函数 $g(x) = 2x - \cos x$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数 .

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程 .
- (2) 设函数 $h(x) = f(x) - ag(x)$ ($a \in \mathbf{R}$) , 讨论 $h(x)$ 的单调性 .
- (3) 若对任意 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$, 恒有关于 x 的不等式 $\cos x - \frac{x+m}{e^x} \leq 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围 .



零点存在性定理的应用

24 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 - (a+2)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率为 1 , 求 a 的值 .
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .
- (3) 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点 , 证明 : 当 $x \in (1, e)$ 时 , $f(x) > -e^2$.

 已知零点信息求参数取值范围

25 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax - a + 1 - \frac{\ln x}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $f(x)$ 为单调递减函数 , 求 a 的取值范围 .
- (2) 若 $f(x)$ 有两个不同的零点 , 求 a 的取值范围 .

 隐零点——无需对隐零点范围进行估计

26 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值.

(3) 若函数 $F(x) = \frac{1}{x^2} f(x)$, 当 $a = 2$ 时, $F(x)$ 的最大值为 M , 求证: $M < \frac{3}{2}$.



隐零点——需要对隐零点所在区间进行估计

27

已知函数 $f(x) = e^x - e^x \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (e 为自然对数的底数) .

- (1) 求函数 $f(x)$ 的值域 .
- (2) 若不等式 $f(x) \geq k(x-1)(1-\sin x)$ 对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围 .
- (3) 证明: $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$.

 双变量——韦达定理

28 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明 : $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.



函数的放缩

29 已知 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时 , 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的极值 .

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增 , 求 a 的取值范围 .

(3) 证明 : $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(2+k)^2} < \ln 3 - \ln 2$.