

随机变量及其分布列习题

一、随机变量的数字特征

- 1 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p ，各成员的支付方式相互独立，设 X 为该群体的10位成员中使用移动支付的人数， $D(X) = 2.4$ ， $P(X = 4) < P(X = 6)$ ，则 $p = (\quad)$.

A. 0.7

B. 0.6

C. 0.4

D. 0.3

答案 B

解析 由二项分布可得： $D(X) = np(1-p)$ ，

$$\text{则 } 10 \times p \times (1-p) = 2.4 ,$$

$$\text{解得：} p = 0.4 \text{ 或 } 0.6 .$$

$$\text{又：} P(x=4) < P(x=6) ,$$

$$\therefore C_{10}^4 p^4 (1-p)^6 < C_{10}^6 p^6 (1-p)^4 .$$

$$\text{解得：} p > \frac{1}{2} .$$

$$\text{综上：} p = 0.6 .$$

- 2 有10件产品，其中3件是次品，从中任取两件，若 X 表示取得次品的个数，则 $P(X < 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；随机变量 X 的数学期望 $EX = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 1: $\frac{14}{15}$
2: $\frac{3}{5}$

解析 由题意知 X 取值为0, 1, 2，

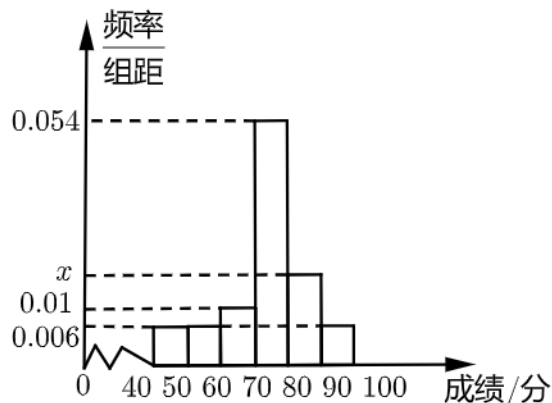
$$\text{即 } P(X=0) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15} , P(X=1) = \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15} ,$$

$$\text{于是 } P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15} ,$$

$$EX = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

- 3 某班50名学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是：[40, 50)，[50, 60)，[60, 70)，[70, 80)，[80, 90)，[90, 100]。从样本成绩不低于80分的学生中随机选取2人，记这2人成绩在90分以上（含90分）的人数为 ξ ，则 ξ 的数学期望为（ ）。



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

答案 B

解析 由图知 $x = 0.018$ ，

则[80, 90)频率为0.18，人数为9人，

[90, 100)频率为0.06，人数为3人，

共 $(0.18 + 0.06) \times 50 = 12$ 人，

则抽取2人分数在90分以上人数的分布列为：

$\xi = 0, 1, 2$ ，

$$P(\xi = 0) = \frac{C_9^2}{C_{12}^2} = \frac{36}{66} = \frac{6}{11},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_9^1 C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{27}{66} = \frac{9}{22},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22},$$

ξ	0	1	2
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{6}{11} + 1 \times \frac{9}{22} + 2 \times \frac{1}{22} \\ &= \frac{9}{22} + \frac{2}{22} \end{aligned}$$

$$= \frac{11}{22}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

- 4 为了贯彻落实党中央对新冠肺炎疫情防控工作的部署和要求，坚决防范疫情向校园蔓延、切实保障广大师生身体健康和生命的安全，教育主管部门决定通过电视频道、网络平台等多种方式实施线上教育教学工作。为了了解学生和家长对网课授课方式的满意度，从经济不发达的A城市和发达的B城市分别随机调查了20个用户，得到了一个用户满意度评分的样本，并绘制出茎叶图如下：

A城市						B城市				
	8	6			4					
6	4	3	1		5	3				
5	5	4	2		6	2	4	6		
9	6	4	3	3	7	3	4	6	6	8
	3	2	1		8	1	2	5	6	8
	3	1			9	2	5	5	7	

若评分不低于80分，则认为该用户对此授课方式“认可”，否则认为该用户对此授课方式“不认可”。以该样本中A、B城市的用户对此授课方式“认可”的频率分别作为A、B城市用户对此授课方式“认可”的概率。

现从A城市和B城市的所有用户中分别随机抽取2个用户，用X表示这4个用户中对此授课方式“认可”的用户个数，则 $P(X=3)=$ _____；用Y表示这从A城市随机抽取2个用户中对此授课方式“认可”的用户个数，则Y的数学期望为_____。

答案 1: $\frac{1}{8}$
2: $\frac{1}{2}$

解析 从城市A中随机抽取1个用户，则该用户对网络授课认可的概率为 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ，
从城市B中随机抽取1个用户，则该用户对网络授课认可的概率为 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ，

设选出A城市的2个用户中对授课方式满意的人数为a，选出B城市的2个用户中对授课方式满意的人数为b，

$$\text{则 } a \sim B\left(2, \frac{1}{4}\right), b \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore P(X=3) = P(a=1) \cdot P(b=2) + P(a=2) P(b=1)$$

$$= C_2^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$E(Y) = E(a) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}$.

- 5 天津市某学校组织教师进行“学习强国”知识竞赛，规则为：每位参赛教师都要回答3个问题，且对这三个问题回答正确与否相互之间互不影响，若每答对1个问题，得1分；答错，得0分，最后按照得分多少排出名次，并分一、二、三等奖分别给予奖励. 已知对给出的3个问题，教师甲答对的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, p$. 若教师甲恰好答对3个问题的概率是 $\frac{1}{4}$ ，则 $p =$ _____；在前述条件下，设随机变量 X 表示教师甲答对题目的个数，则 X 的数学期望为 _____.

答案

1: $\frac{2}{3}$
2: $\frac{23}{12}$

解析 因为教师甲恰好答对3个问题的概率是 $\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times p = \frac{1}{4}$ ，解得: $p = \frac{2}{3}$ ；
由题意，随机变量 X 的可能取值分别为: 0, 1, 2, 3；
所以 $P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{24}$ ，
 $P(X=1) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ ，
 $P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{24}$ ，
 $P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ ，
因此， $E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{11}{24} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{23}{12}$.
故答案为: $\frac{2}{3}; \frac{23}{12}$.

二、二项分布

- 6 在某班参加物理考试的学生中随机抽取8名，他们的考试分数依次为: 86, 92, 77, 98, 95, 82, 75, 97，规定分数不低于95的为“优秀”.
- (1) 求从这8人中随机选取3人，至多有1人为“优秀”的概率.

- (2) 以这8人的样本数据来估算整个班的总体数据，若从该班任选3人，设 X 表示被选出物理考试为“优秀”的人数，求 X 的分布列和数学期望。

答案

(1) $P = \frac{5}{7}$.

(2)

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{27}{512}$

$$E_{(x)} = \frac{9}{8} .$$

解析

- (1) 设 A ：表示所取3人中有1个人为“优秀”，

至多有1人为“优秀”记为事件 A ，

按照规定，被抽取的8人中有3人为“优秀”，

$$\text{依题意, } P(A) = P(A_0) + P(A_1) = \frac{C_5^3}{C_8^3} + \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{10}{56} + \frac{3 \times 10}{56} = \frac{5}{7} .$$

- (2) 由已知，得 X 的所有可能取值为0, 1, 2, 3，

$$P_{(x=0)} = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512} ,$$

$$P_{(x=1)} = C_3^1 \cdot \frac{3}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{8} \times \frac{25}{64} = \frac{225}{512} ,$$

$$P_{(x=2)} = C_3^2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \frac{5}{8} = 3 \times \frac{9}{64} \times \frac{5}{8} = \frac{135}{512} ,$$

$$P_{(x=3)} = \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512} ,$$

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{27}{512}$

$$\text{数学期望 } E_{(x)} = 0 \times \frac{125}{512} + 1 \times \frac{225}{512} + 2 \times \frac{135}{512} + 3 \times \frac{27}{512} = \frac{9}{8} .$$

7

某商场五一期间搞促销活动，顾客购物满一定数额可自愿进行以下游戏，花费10元从1, 2, 3, 4, 5, 6中挑选一个点数，然后掷骰子3次，若所选的点数出现，则先退还顾客10元，然后根据所选的点数出现的次数，每次再额外给顾客10元奖励；若所选的点数不出现，则10元不再退还。

- (1) 某顾客参加游戏，求该顾客获奖的概率。
- (2) 计算顾客在此游戏中的净收益 X 的分布列与数学期望。

答案

(1) $\frac{91}{216}$.

(2) X 的分布列为 :

X	-10	10	20	30
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$\therefore E(X) = -\frac{85}{108} .$$

解析

(1) 设“顾客所选点数出现”为事件 A , “顾客所选点数不出现”为事件 B ,

$\therefore$ 事件 A 与事件 B 为对立事件 ,

$$\therefore \text{该顾客获奖概率为 } P(A) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} .$$

(2) 依题意 , 随机变量 X 的所有可能取值为 -10 , 10 , 20 , 30 ,

$$P(X = -10) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} ,$$

$$P(X = 10) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72} ,$$

$$P(X = 20) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72} ,$$

$$P(X = 30) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} ,$$

$\therefore X$ 的分布列为 :

X	-10	10	20	30
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$\therefore E(X) = (-10) \times \frac{125}{216} + 10 \times \frac{25}{72} + 20 \times \frac{5}{72} + 30 \times \frac{1}{216} = -\frac{85}{108} .$$

三、超几何分布

8 某家电商场开展购物抽奖促销活动 , 顾客购物满 500 元即可获得一次抽奖机会 , 若每 10 张券中有一等奖券 1 张 , 可获价值 100 元的奖品 , 有二等奖券 3 张 , 每张可获价值 50 元的奖品 ; 其余 6 张没有奖 , 某顾客从这 10 张券中任抽 2 张 , 求 :

(1) 该顾客中奖的概率 .

(2) 该顾客获得的奖品总价值 ξ (元) 的概率分布列和期望 $E(\xi)$.

答案

(1) $\frac{2}{3}$.

(2) $E(\xi) = 50$ ，分布列见解析。

解析

(1) $\because$ 每10张券中有一等奖券1张，可获价值100元的奖品；

有二等奖券3张，每张可获价值50元的奖品；其余6张没有奖，

某顾客从这10张券中任抽2张，

$\therefore$ 该顾客中奖的概率 $P = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = 1 - \frac{15}{45} = \frac{2}{3}$ ，即该顾客中奖的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

(2) ξ 的所有可能值为：0, 50, 100, 150 (元)。

$$P(\xi = 0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3},$$

$$P(\xi = 50) = \frac{C_6^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5},$$

$$P(\xi = 100) = \frac{C_6^1 C_1^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5},$$

$$P(\xi = 150) = \frac{C_1^1 C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15},$$

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	50	100	150
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

$$\xi \text{ 的数学期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{3} + 50 \times \frac{2}{5} + 100 \times \frac{1}{5} + 150 \times \frac{1}{15} = 50.$$

9

为了进一步激发同学们的学习热情，某班级建立了理科、文科两个学习兴趣小组，两组的人数如下表所示。先采用分层抽样的方法（层内采用简单随机抽样）从两组中共抽取3名同学进行测试。

组别	理科	文科
性别		
男	5	1
女	3	3

(1) 求从理科组抽取的同学中至少有1名女同学的概率。

(2) 记 ξ 为抽取的3名同学中男同学的人数，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望。

答案

(1) $\frac{9}{14}$ 。

(2) 答案见解析 .

解析

(1) 两小组的总人数之比为 $8:4=2:1$, 共抽取3人 . 所以从理科组抽取2人 , 从文科组抽取1人 , 从理科组抽取的同学中至少有1名女同学的情况由一男一女、两女 , 所以所求

$$\text{的概率为 } P = \frac{C_3^1 C_5^1 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{9}{14} .$$

(2) 由题意可知 ξ 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

相应的概率分别是

$$P(\xi=0) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_8^2 C_4^1} = \frac{9}{112} , P(\xi=1) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_3^1}{C_8^2 C_4^1} + \frac{C_3^2}{C_8^2 C_4^1} = \frac{48}{112} = \frac{3}{7} ,$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2 C_4^1} + \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^2 C_4^1} = \frac{45}{112} , P(\xi=3) = \frac{C_5^2}{C_8^2 C_4^1} = \frac{10}{112} = \frac{5}{56} ,$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{9}{112}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{45}{112}$	$\frac{5}{56}$

$$E(\xi) = 0 \times \frac{9}{112} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{45}{112} + 3 \times \frac{5}{56} = \frac{3}{2} .$$

10 某市甲、乙、丙、丁四所中学报名参加某高校今年自主招生的学生人数如下表所示 :

中学	甲	乙	丙	丁
人数	30	40	20	10

为了了解参加考试的学生的学习情况 , 该高校采用分层抽样的方法从报名参加考试的四所中学的学生当中随机抽取50名参加问卷调查 .

- (1) 问甲、乙、丙、丁四所中学各抽取多少名学生 ?
- (2) 从参加问卷调查的50名学生中随机抽取两名学生 , 求两名学生来自同一中学的概率 .
- (3) 在参加问卷调查的50名学生中 , 从来自甲、丙两所中学的学生当中随机抽取两名学生 , 用 X 表示抽得甲中学的学生人数 , 求 X 的分布列和数学期望 .

答案

(1) 15 , 20 , 10 , 5 .

(2) $\frac{2}{7}$.

(3)

X	0	1	2
P	$\frac{9}{60}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{20}$

$$EX = 1.2 .$$

解析

(1) 解：由题意知，四所中学报名参加该高校今年自主招生的学生总人数为100名，抽取的样本容量与总体个数的比值为 $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 应从甲、乙、丙、丁四所中学抽取的学生人数分别为15, 20, 10, 5 .

(2) 解：设“从参加问卷调查的50名学生中随机抽取两名学生，这两名学生来自同一所中学”为事件 M ，从参加问卷调查的50名学生中随机抽取两名学生的取法共有 $C_{50}^2 = 1225$ 种，

这两名学生来自同一所中学的取法共有 $C_{15}^2 + C_{20}^2 + C_{10}^2 + C_5^2 = 350$.

$$\therefore P(M) = \frac{350}{1225} = \frac{2}{7} .$$

答：从参加问卷调查的50名学生中随机抽取两名学生，求两名学生来自同一中学的概率为 $\frac{2}{7}$.

(3) 解：由(1)知，在参加问卷调查的50名学生中，来自甲、丙两所中学的学生人数分别为15, 10 .

依题意得， X 的可能取值为0, 1, 2 ,

$$P(X=0) = \frac{C_{10}^2}{C_{25}^2} = \frac{9}{60}, P(X=1) = \frac{C_{15}^1 C_{10}^1}{C_{25}^2} = \frac{1}{2}, P(X=2) = \frac{C_{15}^2}{C_{25}^2} = \frac{7}{20} .$$

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{9}{60}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{20}$

$$EX = 0 \times \frac{9}{60} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{7}{20} = 1.2 .$$

四、相互独立事件

11 一个箱中原来装有大小相同的5个球，其中3个红球，2个白球．规定：进行一次操作是指“从箱中随机取出一个球，如果取出的是红球，则把它放回箱中；如果取出的是白球，则该球不放回，并另补一个红球放到箱中．”

(1) 求进行第二次操作后，箱中红球个数为4的概率．

(2) 求进行第二次操作后，箱中红球个数的分布列和数学期望．

答案

(1) $\frac{14}{25}$.

(2) 分布列为 :

X	3	4	5
$P(X)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{2}{25}$

$$EX = \frac{93}{25} .$$

解析

(1) 设 A_1 表示事件“第一次操作从箱中取出的是红球” ,

B_1 表示事件“第一次操作从箱中取出的是白球” ,

A_2 表示事件“第二次操作从箱中取出的是红球” ,

B_2 表示事件“第二次操作从箱中取出的是白球” .

则 $A_1 B_2$ 表示事件“第一次操作从箱中取出的是红球 , 第二次操作从箱中取出的是白球” .

由条件概率计算公式得 $P(A_1 B_2) = P(A_1) P(B_2|A_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$.

$B_1 A_2$ 表示事件“第一次操作从箱中取出的是白球 , 第二次操作从箱中取出的是红球” .

由条件概率计算公式得 $P(B_1 A_2) = P(B_1) P(A_2|B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$.

$A_1 B_2 + B_1 A_2$ 表示“进行第二次操作后 , 箱中红球个数为 4” , 又 $A_1 B_2$ 与 $B_1 A_2$ 是互斥事件 .

$$\therefore P(A_1 B_2 + B_1 A_2) = P(A_1 B_2) + P(B_1 A_2) = \frac{6}{25} + \frac{8}{25} = \frac{14}{25} .$$

(2) 设进行第二次操作后 , 箱中红球个数为 X , 则 $X = 3, 4, 5$.

$$P(X=3) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} ,$$

$$P(X=4) = \frac{14}{25} ,$$

$$P(X=5) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25} .$$

进行第二次操作后 , 箱中红球个数 X 的分布列为 :

X	3	4	5
$P(X)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{2}{25}$

进行第二次操作后 , 箱中红球个数 X 的数学期望 .

$$EX = 3 \times \frac{9}{25} + 4 \times \frac{14}{25} + 5 \times \frac{2}{25} = \frac{93}{25} .$$

- (1) 现从中任取出一球确定颜色后放回盒子里，再取下一个球．重复以上操作，最多取3次，过程中如果取出蓝色球则不再取球．求：
- ① 最多取两次就结束的概率．
 - ② 整个过程中恰好取到2个白球的概率．
- (2) 若改为从中任取出一球确定颜色后不放回盒子里，再取下一个球．重复以上操作，最多取3次，过程中如果取出蓝色球则不再取球．则设取球的次数为随机变量 ζ ，求 ζ 的分布列和数学期望．

答案

- (1) ① $\frac{51}{100}$.
 ② $\frac{27}{200}$.

(2) 随机 ζ 的分布列为：

ζ	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{90}$	$\frac{42}{90}$

$$E(\zeta) = \frac{13}{6} .$$

解析

(1) ① 设取球的次数为 X ，

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{3}{10} ,$$

$$P(X=2) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100} ,$$

$\therefore$ 最多取两次就结束的概率

$$P = \frac{3}{10} + \frac{21}{100} = \frac{51}{100} .$$

② 由题意可知，可以如下取球：

红白白，白红白，白白红，白白蓝．

$$\text{所以恰好取到2个白球的概率 } P = \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times 3 + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{27}{200} .$$

(2) 随机变量 ζ 的取值为1, 2, 3，

$$P(\zeta=1) = \frac{3}{10} ,$$

$$P(\zeta=2) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90} ,$$

$$\begin{aligned} P(\zeta=3) &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \\ &= \frac{42}{90} , \end{aligned}$$

$\therefore$ 随机 ζ 的分布列为：

ζ	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{90}$	$\frac{42}{90}$

$$\therefore \zeta \text{ 的数学期望是: } E(\zeta) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{21}{90} + 3 \times \frac{42}{90} = \frac{13}{6}.$$

- 13 某校为了普及环保知识, 增强学生的环保意识, 在全校组织了一次有关环保知识的竞赛. 经过初赛、复赛, 甲、乙两个代表队 (每队3人) 进入了决赛, 规定每人回答一个问题, 答对为本队赢得10分, 答错得0分. 假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{3}{4}$, 乙队中3人答对的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$, 且各人回答正确与否相互之间没有影响, 用 X 表示乙队的总得分.

- (1) 求 X 的分布列及数学期望.
- (2) 求甲、乙两队总得分之和等于30分且甲队获胜的概率.

答案

- (1) X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{2}{5}$

$$E(X) = \frac{133}{6}.$$

- (2) $\frac{9}{128}.$

解析

- (1) 由题知, X 的所有可能取值为0, 10, 20, 30.

$$P(X=0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{60},$$

$$P(X=10) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{20},$$

$$P(X=20) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{30},$$

$$P(X=30) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{2}{5}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{60} + 10 \times \frac{3}{20} + 20 \times \frac{13}{30} + 30 \times \frac{2}{5} = \frac{133}{6}.$$

- (2) 记“甲队得30分, 乙队得0分”为事件 A ,

“甲队得20分, 乙队得10分”为事件 B ,

则 A, B 互斥,

$$\text{又} \because P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{60} = \frac{9}{1280},$$

$$P(B) = C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{20} = \frac{81}{1280},$$

故甲乙两队总得分之和为30分，且甲队获胜的概率为

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{90}{1280} = \frac{9}{128}.$$

五、正态分布

- 14 在某项测量中，测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$ ，若 ξ 在 $(0, 2)$ 内取值的概率为0.6，则 ξ 在 $(2, +\infty)$ 内取值的概率为（ ）.

A. 0.8

B. 0.4

C. 0.3

D. 0.2

答案 D

解析 $P(\xi > 2) = \frac{1 - 0.6}{2} = 0.2.$

故选D.

- 15 (5分) 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \delta^2) (\delta > 0)$ ，若 $P(\xi < 0) + P(\xi < 1) = 1$ ，则 μ 的值为（ ）.

A. -1

B. 1

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

答案 D

解析 $\because$ 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \delta^2) (\delta > 0)$,

正态曲线关于 $x = \mu$ 对称,

$$\therefore P(\xi < 0) + P(\xi < 1) = 1,$$

$$\text{又} P(\xi > 1) + P(\xi < 1) = 1,$$

$$\therefore P(\xi < 0) = P(\xi > 1),$$

$\therefore 0$ 和1关于对称轴对称,

$$\therefore \mu = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2},$$

故选D.

- 16 已知随机变量 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim N(2, \sigma^2)$, 若 $P(X \geq 1) = 0.64$, $P(0 < Y < 2) = p$, 则 $P(Y > 4) =$ _____.

答案 0.1

解析 $\because$ 随机变量 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim N(2, \sigma^2)$, $P(X \geq 1) = 0.64$,

$$\therefore P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= C_2^1 p(1-p) + C_2^2 p^2 = 0.64,$$

解得 $p = 0.4$, 或 $p = 1.6$ (舍),

$$\therefore P(0 < Y < 2) = p = 0.4,$$

$$\therefore P(Y > 4) = \frac{1}{2}(1 - 0.4 \times 2) = 0.1.$$

故答案为: 0.1.

- 17 某校在模块考试中约有1000人参加考试, 其数学考试成绩 $\xi \sim N(90, a^2)$, ($a > 0$, 试卷满分150), 统计结果显示数学考试成绩在70分到110分之间的人数约为总人数的 $\frac{3}{5}$, 则此次数学考试成绩不低于110分的学生人数约为 ().

A. 200

B. 300

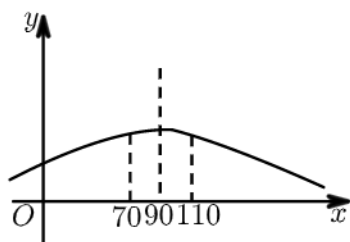
C. 400

D. 600

答案 A

解析 $\because$ 成绩 $\xi \sim N(90, a^2)$,

$\therefore$ 其正态曲线关于直线 $x = 90$ 对称,



又：成绩在70分到110分之间的人数约为总人数的 $\frac{3}{5}$ ，

由对称性知：

成绩在110分以上的人数约为总人数的 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$ ，

∴此次数学考试成绩不低分110分的学生约有：

$$\frac{1}{5} \times 1000 = 200 .$$

故选：A .

六、综合创新

18 甲口袋中装有2个黑球和1个白球，乙口袋中装有3个白球．现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复 n 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n ，恰有2个黑球的概率为 p_n ，恰有1个黑球的概率为 q_n .

(1) 求 p_1 ， q_1 和 p_2 ， q_2 .

(2) 求 $2p_n + q_n$ 与 $2p_{n-1} + q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ （用 n 表示） .

答案

(1) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{27}$; $\frac{16}{27}$.

(2) $2p_n + q_n - 1 = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1} - 1)$,
 $E(X_n) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

解析

$$\begin{aligned} (1) \quad p_1 &= \frac{C_1^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_3^1} = \frac{1}{3}, \quad q_1 = \frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_3^1} = \frac{2}{3}, \\ p_2 &= \frac{C_1^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_3^1} \cdot p_1 + \frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_1^1}{C_3^1} \cdot q_1 + 0 \cdot (1 - p_1 - q_1) \\ &= \frac{1}{3}p_1 + \frac{2}{9}q_1 = \frac{7}{27}, \\ q_2 &= \frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_3^1} \cdot p_1 + \left(\frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^1} + \frac{C_1^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_1^1}{C_3^1}\right) \cdot q_1 \\ &\quad + \frac{C_3^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot (1 - p_1 - q_1) \\ &= -\frac{1}{9}q_1 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{16}{27}. \end{aligned}$$

(2) 当 $n \geq 2$ 时，

$$p_n = \frac{C_1^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_3^1} \cdot p_{n-1} + \frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_1^1}{C_3^1} \cdot q_{n-1} + 0 \cdot (1 - p_{n-1} - q_{n-1})$$

$$= \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}q_{n-1}, \quad ①$$

$$q_n = \frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_3^1} \cdot p_{n-1} + \left(\frac{C_2^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^1} + \frac{C_1^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_1^1}{C_3^1} \right) \cdot q_{n-1} + \frac{C_3^1}{C_3^1} \cdot \frac{C_2^1}{C_3^1}$$

$$\cdot (1 - p_{n-1} - q_{n-1})$$

$$= -\frac{1}{9}q_{n-1} + \frac{2}{3}, \quad ②$$

$$2 \times ① + ②, \text{ 得 } 2p_n + q_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{4}{9}q_{n-1} - \frac{1}{9}q_{n-1} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{2}{3},$$

$$\text{从而 } 2p_n + q_n - 1 = \frac{1}{3}(2p_{n-1} + q_{n-1} - 1),$$

$$\text{又 } 2p_1 + q_1 - 1 = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } 2p_n + q_n = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}^*. \quad ③$$

$$\text{由 } ②, \text{ 有 } q_n - \frac{3}{5} = -\frac{1}{9}\left(q_{n-1} - \frac{3}{5}\right), \text{ 又 } q_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{15},$$

$$\text{所以 } q_n = \frac{1}{15}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\text{由 } ③, \text{ 有 } p_n = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - q_n\right]$$

$$= \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{5}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{故 } 1 - p_n - q_n = \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{9}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{5}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

X_n 的概率分布

X_n	0	1	2
P	$1 - p_n - q_n$	q_n	p_n

$$\text{则 } E(X_n) = 0 \times (1 - p_n - q_n) + 1 \times q_n + 2 \times p_n$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

- 19 为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β ，一轮试验中甲药的得分记为 X

- (1) 求 X 的分布列 .
- (2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分, $p_i (i = 0, 1, \dots, 8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0 = 0, p_8 = 1, p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} (i = 1, 2, \dots, 7)$, 其中 $a = P(X = -1), b = P(X = 0), c = P(X = 1)$. 假设 $\alpha = 0.5, \beta = 0.8$.
- ① 证明: $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$ 为等比数列 .
- ② 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性 .

答案

(1)	X	1	-1	0
	P	$\alpha(1 - \beta)$	$(1 - \alpha)\beta$	$\alpha\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta)$

(2) ① 证明见解析 .

② $p_4 = \frac{1}{257} \approx 0.0039$; 解释见证明 .

解析

(1) 一轮试验中:

记事件 A : 施以甲药的白鼠治愈,

记事件 B : 施以乙药的白鼠治愈,

则 $P(A) = \alpha, P(\bar{A}) = 1 - \alpha, P(B) = \beta, P(\bar{B}) = 1 - \beta$,

一轮试验中甲药的得分 X 的所有可能取值为1, -1, 0, 则

$P(X = 1) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - \alpha)(1 - \beta)$,

$P(X = -1) = P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = (1 - \alpha)\beta$,

$P(X = 0) = P(AB + \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(A)P(B) + P(\bar{A})P(\bar{B}) = \alpha\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta)$

,

故 X 的分布列如下:

X	1	-1	0
P	$\alpha(1 - \beta)$	$(1 - \alpha)\beta$	$\alpha\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta)$

(2) ① 由(1)得 $a = 0.4, b = 0.5, c = 0.1$.

因此 $p_i = 0.4p_{i-1} + 0.5p_i + 0.1p_{i+1}$, 故 $0.1(p_{i+1} - p_i) = 0.4(p_i - p_{i-1})$, 即

$p_{i+1} - p_i = 4(p_i - p_{i-1})$,

又因为 $p_1 - p_0 = p_1 \neq 0$ ，所以 $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$ 为公比为4，首项为 p_1 的等比数列。

② 由(1)可得

$$\begin{aligned} p_8 &= p_8 - p_7 + p_7 - p_6 + \dots + p_1 - p_0 + p_0 \\ &= (p_8 - p_7) + (p_7 - p_6) + \dots + (p_1 - p_0) \\ &= \frac{4^8 - 1}{3} p_1. \end{aligned}$$

由于 $p_8 = 1$ ，故 $p_1 = \frac{3}{4^8 - 1}$ ，所以

$$\begin{aligned} p_4 &= (p_4 - p_3) + (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) + (p_1 - p_0) \\ &= \frac{4^4 - 1}{3} p_1 \\ &= \frac{1}{257}. \end{aligned}$$

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率。由计算结果可以看出，在甲药治愈率为0.5，乙药治愈率为0.8时，认为甲药更有效的概率为 $p_4 = \frac{1}{257} \approx 0.0039$ ，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理。