

排列组合习题

一、排列基本模型

1 两家夫妇各带一个小孩一起到动物园游玩，购票后排队依次入园，为安全起见，首尾一定要排两位爸爸，另外，两个小孩一定要排在一起，则这6人的入园顺序排法种数为（ ）。

A. 48

B. 36

C. 24

D. 12

答案 C

解析 分三步：①先分派两位爸爸，必须一首一尾，有 $A_2^2 = 2$ 种排法；
②两个小孩一定要排在一起，将其看成一个元素，考虑其顺序有 $A_2^2 = 2$ 种排法；
③将两个小孩与两位妈妈进行全排列，有 $A_3^3 = 6$ 种排法。
则共有 $2 \times 2 \times 6 = 24$ 种排法。

2 将7个座位连成一排，安排4个人就座，恰有两个空位相邻的不同坐法有 _____。

答案 480

解析 分两步安排：
①将4人全排列，安排在4个位置，有 $A_4^4 = 24$ 种情况。
②4人排好后有5个空位，在其中任选2个，一个空位安排2个空座位，另一个安排一个空座位，有 $A_5^2 = 20$ 情况。
则恰有两个空位相邻的不同坐法有 $24 \times 20 = 480$ 种。

3 6名同学站成一排，甲、乙两人相邻，丙与丁不相邻，则共有 _____ 种不同的排法。（用数字作答）

答案 144

解析 先让甲、乙捆绑在一起排列有 A_2^2 种，然后让除甲、乙、丙、丁2位同学和甲、乙的整体进行排列有 A_3^3 种，再让丙、丁插空有 A_2^4 种，
故共有 $A_2^2 A_3^3 A_2^4 = 2 \times 6 \times 12 = 144$ 种。

4 某个班级组织元旦晚会，一共准备了A、B、C、D、E、F六个节目，节目演出顺序第一个节目只能排A或B，最后一个节目不能排A，且C、D要求相邻出场，则不同的节目顺序共有（ ）种。

A. 72

B. 84

C. 96

D. 120

答案 B

解析 第一类，A排在第一位，把C、D捆绑在一起作为一个“大节目”和其他3个节目全排，有 $A_2^2 \cdot A_2^4 = 48$ 种排法。
第二类，B排在第一位，把C、D捆绑在一起作为一个“大节目”，从“大节目”、E、F这3个节目中选出1个排在最后一个，A和剩下2个节目全排列，有 $A_3^1 \cdot A_3^3 \cdot A_2^2 = 36$ 种排法。
由分类加法计数原理可得不同的节目顺序有 $48 + 36 = 84$ 种。
故选B。

5 从4名男同学中选出2人，6名女同学中选出3人，并将选出的5人排成一排，选出的3名女同学必须从左至右，从高到矮排列，共有 _____ 种不同的排法。

答案 2400

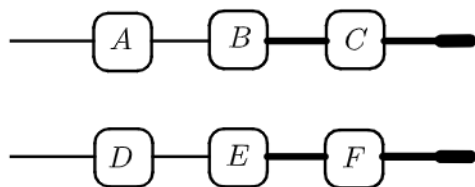
解析 从4名男同学中选出2人，有 C_4^2 种选法，
从6名女同学中先选出3人，有 C_6^3 种选法，
因为女同学要从左到右，从高到矮排列，
所以3名女同学的相对顺序固定，

所以采用除序法，有 $\frac{A_5^5}{A_3^3}$ 种排法，

$\therefore$ 共有 $C_4^2 C_6^3 \cdot \frac{A_5^5}{A_3^3} = 2400$ 种排法。

故答案为：2400。

- 6 绍兴臭豆腐闻名全国，一外地学者来绍兴旅游，买了两串臭豆腐，每串3颗（如图）。规定：每串臭豆腐只能自左向右一颗一颗地吃，且两串可以自由交替吃。请问：该学者将这两串臭豆腐吃完，不同的吃法有（ ）。



- A. 6种 B. 12种 C. 20种 D. 40种

答案 C

解析 共吃6口，选3口第一串三颗，顺序不变，剩下3口给第二串，顺序不变 $C_6^3 \cdot C_3^3 = 20$ 种，故选C。

- 7 若A、B、C、D、E五位同学站成一排照相，则A、B两位同学至少有一人站在两端的概率是（ ）。

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{10}$

答案 D

解析 A、B任选一人站两端共： $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot A_4^4 = 96$ 种，

其中A、B都在两端的有 $A_2^2 A_3^3 = 12$ 种。

$$\therefore P = \frac{96 - 12}{A_5^5} = \frac{7}{10}$$

$$(\text{或}) P = 1 - \frac{A_3^2 A_3^3}{A_5^5} = \frac{7}{10}.$$

- 8 设有编号为1, 2, 3, 4, 5的五把锁和对应的五把钥匙. 现给这5把钥匙也贴上编号为1, 2, 3, 4, 5的五个标签, 则共有 _____ 种不同的贴标签的方法; 若想使这5把钥匙中至少有2把能打开贴有相同标签的锁, 则有 _____ 种不同的贴标签的方法. (本题两个空均用数字作答)

答案 1:120

2:31

解析 根据题意, 现给这5把钥匙也贴上编号为1, 2, 3, 4, 5的五个标签, 则有 $A_5^5 = 120$ 种不同的贴标签的方法:

若这5把钥匙中至少有2把能打开贴有相同标签的锁, 分3种情况讨论:

- ①5把都可以打开贴有相同标签的锁, 即5个标签全部贴对, 有1种贴标签的方法;
- ②5把钥匙中有3把可以打开贴有相同标签的锁, 即有3个标签贴对, 有 $C_5^3 = 10$ 种贴标签的方法;
- ③5把钥匙中有2把可以打开贴有相同标签的锁, 即有2个标签贴对, 有 $2C_5^2 = 20$ 种贴标签的方法;

则一共有 $1 + 10 + 20 = 31$ 种贴标签的方法.

故答案为: 120, 31.

二、组合基本模型

- 9 把6本不同的书借给甲、乙、丙3人, 每人2本, 不同的借书方法有 ().

A. 15种 B. 90种 C. 270种 D. 540种

答案 B

解析 由题意可知, 共有 $C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2 = 90$ (种) 不同的借书方法.

故选B.

为支持武汉抗疫，捐赠给某医院5台不同的呼吸机（厂家和型号不同），现在要分给3个不同的科室，每个科室都能分到呼吸机，则有（ ）种不同的分法。

A. 300

B. 240

C. 210

D. 150

答案 D

解析

① 若5台呼吸机按1, 1, 3分配，则列式为 $\frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_2^2} A_3^3 = 60$ ；

② 若5台呼吸机按1, 2, 2分配，则列式为 $\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} A_3^3 = 90$ ；总和为150。

故选D。

11 将7位大学生志愿者（4男3女）分成两组，分配到两所薄弱校支教，若要求女大学生不能单独成组，且每组最多5人，则不同的分配方案共有（ ）。

A. 36种

B. 68种

C. 104种

D. 110种

答案 C

解析

方法一：分成一组5人，一组2人时，2人组至少有一个男生，且去往不同的学校，

则只有一个男生时，分法有： $C_4^1 C_3^1 C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ （种），

两个都是男生时，分法有： $C_4^2 C_2^1 = \frac{4 \times 3}{2} \times 2 = 12$ （种），

分成一组3人，一组4人时，3人组至少有一个男生，

则只有一个男生时，分法有： $C_4^1 C_3^2 C_2^1 = 4 \times \frac{3 \times 2}{2} \times 2 = 24$ （种），

有2个男生时，分法有： $C_4^2 C_3^1 C_2^1 = \frac{4 \times 3}{2} \times 3 \times 2 = 36$ （种），

3个都是男生时，分法有： $C_4^3 C_2^1 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} \times 2 = 8$ （种），

所以总共有： $24 + 12 + 24 + 36 + 8 = 104$ （种）。

方法二：分组的方案有3、4和2、5两类，第一类有 $(C_7^3 - 1)A_2^2 = 68$ （种）；

第二类有 $(C_7^2 - C_3^2)A_2^2 = 36$ （种），

所以共有 $68 + 36 = 104$ 种不同的方案。

故选C。

- 12 将编号为1, 2, 3, 4, 5的5个小球全部放入A, B, C, 3个盒子内, 若每个盒子不空, 且放在同一盒子内的小球编号互不相连, 则不同的放法种数共有 _____. (用数字作答)

答案 42

解析 编号为1, 2, 3, 4, 5的5个小球,
根据小球的个数可以分为(1、1、3)和(1、2、2)两组, 再分配到3个盒子中,
当为(1、1、3)时, 放在同一盒子内的小球编号互不相连,
故放3个小球的盒子只能装编号为1、3、5的球,
显然只有一种分组方法, 再分配到3个盒子中,
故有 $A_3^3 = 6$ (种) 放法;
当为(1、2、2)时, 放在同一盒子内的小球编号互不相连,
此时放2个小球的盒子可以有(1、3)和(2、4), (1、3)和(2、5),
(1、4)和(2、5), (1、4)和(3、5), (1、5)和(2、4), (2、4)和(3、5)共6种分组方法,
再分配到3个盒子中, 故有 $6 \cdot A_3^3 = 36$ (种) 放法;
故不同的放法种数共有 $6 + 36 = 42$ (种) .
综上所述, 答案: 42 .

- 13 在新冠病毒疫情爆发期间, 口罩成为了个人的必需品. 已知某药店有4种不同类型的口罩A, B, C, D, 其中D型口罩仅剩1只 (其余3种库存足够). 今甲、乙等5人先后在该药店各购买了1只口罩, 统计发现他们恰好购买了3种不同类型的口罩, 则所有可能的购买方式共有 ().

A. 330种 B. 345种 C. 360种 D. 375种

答案 C

解析 分含D与不含D两种情况:

(1) 含D: 剩余三个型号选二种, 有(2, 2, 1)和(3, 1, 1)两种,

$$\textcircled{1} (2, 2, 1) : \frac{A_5^5}{A_2^2 A_2^2} \times C_3^2 = 90 ;$$

$$\textcircled{2} (3, 1, 1) : \frac{A_5^5}{A_3^3} \times A_2^2 \times C_3^2 = 120 ,$$

①+②：90 + 120 = 210种；

(2) 不含D：剩余三个型号有(2, 2, 1)和(3, 1, 1)两种，

$$\textcircled{1}(2, 2, 1) : \frac{A_5^5}{A_2^2 A_2^2} \times C_3^2 = 90 ;$$

$$\textcircled{2}(3, 1, 1) : \frac{A_5^5}{A_3^3} \cdot C_3^2 = 60 ,$$

∴①+②：90 + 60 = 150种，

综上：150 + 210 = 360种，

∴选C。

- 14 将7个大小形状颜色完全相同的小球放入3个不同的盒子，允许盒子为空，但小球必须放完，共有 () 种放法。

A. 12

B. 24

C. 36

D. 48

答案 C

解析 若把10个小球放到3个不同的盒子中，每个盒子至少有一个小球，借助挡板法，10个相同的小球除去两端形成9个空位，从9个空位中选2个空位插上挡板，就把所有的小球分成3部分，有 $C_9^2 = 36$ (种) 方法，等放好后再从每个盒子里面拿走一个球，则相当于把7个大小颜色完全相同的小球放入3个不同的盒子，允许盒子为空的放法。
故选C。

三、数字问题

- 15 从1, 3, 5, 7中任取3个数字，从0, 2, 4, 6中任取2个数字，组成没有重复数字五位偶数，则这样的五位数一共有 _____ 个。(用数字作答)

答案 2592

解析 奇数选3个： $C_4^3 = 4$ ，

①偶数2个中不含0： $C_3^2 = 3$ ，

$\therefore$ 共 $4 \times 3 \times A_5^5 = 1440$ 个数，

②偶数中含有0： $C_3^1 = 3$ ，

$\therefore$ 共 $4 \times 3 \times 4A_4^4 = 1152$ 个数，

$\therefore$ 总计2592个。

16 若从1, 2, 3, ..., 9这9个整数中同时取4个不同的数，其和为偶数，则不同的取法共有（ ）。

A. 60种

B. 63种

C. 65种

D. 66种

答案 D

解析 先找出和为偶数的各种情况，再利用分类加法计数原理求解，满足题设的取法可分为三类：

一是四个奇数相加，其和为偶数，在5个奇数1, 3, 5, 7, 9中，任意取4个，有 $C_5^4 = 5$

(种)；

二是两个奇数加两个偶数其和为偶数，在5个奇数中任取2个，再在4个偶数2, 4, 6, 8中任取

2个，有 $C_5^2 \cdot C_4^2 = 60$ (种)；

三是四个偶数相加，其和为偶数，4个偶数的取法有1种，

所以满足条件的取法共有 $5 + 60 + 1 = 66$ (种)。

17 从0, 1, 2, 3, 4, 5中任选5个数组成没有重复数字的五位数，比40000大的奇数共有（ ）。

A. 72个

B. 90个

C. 120个

D. 144个

答案 C

解析 ①首位数字为5时，末位有两种情况，在剩余的4个数中任取3个放在位置上，有 $A_4^3 = 24$ 种情况，此时共 $24 \times 2 = 48$ 种情况。

②首位数字为4时，末位数字有3种情况，其余4个数字选3个放剩余3个位置，有 $A_4^3 \times 3 = 72$

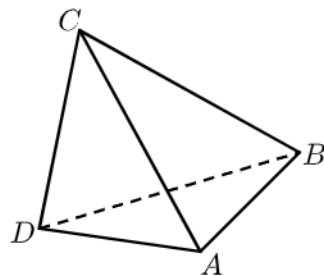
个。

共有 $72 + 48 = 120$ 个。

故选C.

四、染色问题

- 18 用六种颜色中的若干种给如图所示的四面体 $ABCD$ 的每条棱涂色,要求每条棱只涂一种颜色且共顶点的棱涂不同的颜色,则不同的涂色方案共().



A. 4080种

B. 3360种

C. 1920种

D. 720种

答案 A

解析 (1) 若恰用三种颜色涂色,则每组对棱必须涂同一颜色,而这三组间的颜色不同,故有 A_6^3 种方法.

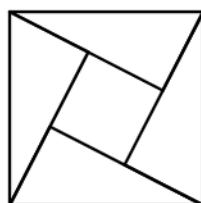
(2) 若恰用四种颜色涂色,则三组对棱中有二组对棱的组内对棱涂同色,但组与组之间不同色,故有 $C_3^2 A_6^4$ 种方法.

(3) 若恰用五种颜色涂色,则三组对棱中有一组对棱涂同一种颜色,故有 $C_3^1 A_6^5$ 种方法.

(4) 若恰用六种颜色涂色,则有 A_6^6 种不同的方法.

综上,满足题意的总的染色方法数为 $A_6^3 + C_3^2 A_6^4 + C_3^1 A_6^5 + A_6^6 = 4080$ 种.

- 19 如图为我国数学家赵爽(约3世纪初)在为《周髀算经》作注时验证勾股定理的示意图,现在提供5种颜色给其中5个小区域涂色,规定每个区域只涂一种颜色,相邻区域颜色不相同,则不同的涂色方案共有().



A. 120

B. 260

C. 340

D. 420

答案 D

解析 上下两块区域可以相同，也可以不同，
 则共有 $5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2$
 $= 180 + 240 = 420$ 种。
 故选D。

20 用红、黄、蓝三种颜色去涂图中标号为1, 2, ..., 9的9个小正方形（如图），使得任意相邻（有公共边）的小正方形所涂颜色都不相同，且标号为1, 5, 9的小正方形涂相同的颜色，则符合条件的所有涂法共有（ ）种。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A. 36

B. 72

C. 108

D. 216

答案 C

解析 标号“1, 5, 9”颜色相同有 C_3^1 种涂法，
 下面涂标号“2, 3, 6”的正方形，分为2类情况，
 一类“2, 6”颜色相同，共有 $C_2^1 C_2^1 = 4$ 种涂法，
 一类“2, 6”颜色不同，有 $A_2^2 = 2$ 种涂法，
 $\therefore$ “2, 3, 6”有6种涂法，
 同理“4, 7, 8”有6种涂法，
 $\therefore$ 共有 $3 \times 6 \times 6 = 108$ 种涂法。

五、二项式定理

21 在 $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 _____ .

答案 $\frac{5}{2}$

解析 $\because$ 二项式的通项公式为 :

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= C_5^r x^{5-r} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r \\ &= C_5^r x^{5-r} \left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{-\frac{r}{2}} \\ &= C_5^r \left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{\frac{10-3r}{2}}, \\ \therefore \text{当 } \frac{10-3r}{2} &= 2 \text{ 时, } r = 2, \\ \therefore x^2 \text{ 的系数为 } C_5^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

22 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则 $a = ()$.

A. $\sqrt{3}$

B. $-\sqrt{3}$

C. 6

D. -6

答案 D

解析 根据所给的二项式写出展开式的通项, $T_{r+1} = C_5^r (\sqrt{x})^{5-r} \left(-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^r = (-a)^r C_5^r x^{\frac{5-r}{2}} - \frac{r}{2}$,
展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 项的系数为 30, $\therefore \frac{5-2r}{2} = \frac{3}{2}$,
 $\therefore r = 1$, 并且 $(-a)^1 C_5^1 = 30$, 解得 $a = -6$.
故选 D.

23 在 $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中, 只有第 5 项的二项式系数最大, 则展开式的常数项为 () .

A. -7

B. 7

C. -28

D. 28

答案 B

解析 依题意, $\frac{n}{2} + 1 = 5$, $\therefore n = 8$. 二项式为 $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$, 其展开式的通项为

$$T_{k+1} = (-1)^k (\frac{1}{2})^{8-k} C_8^k x^{8-\frac{4k}{3}} \text{ 令 } 8 - \frac{4k}{3} = 0 \text{ 解得 } k = 6, \text{ 故常数项为 } C_8^6 (\frac{x}{2})^2 (-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6 = 7. \text{ 故选B}$$

六、综合创新

24 在某地的奥运火炬传递活动中, 有编号为1, 2, 3, ..., 18的18名火炬手. 若从中任选3人, 则选出的火炬手的编号能组成3为公差的等差数列的概率为 ().

A. $\frac{1}{51}$

B. $\frac{1}{68}$

C. $\frac{1}{306}$

D. $\frac{1}{408}$

答案 B

解析 共有 $C_{18}^3 = 17 \times 16 \times 3$ 种事件数,

选出火炬手编号为 $a_n = a_1 + 3(n-1)$,

$a_1 = 1$, 由1、4、7、10、13、16, 可得4种,

$a_1 = 2$, 由2、5、8、11、14、17, 可得4种,

$a_n = 3$, 由3、6、9、12、15、18, 可得4种,

$$p = \frac{4 \times 3}{17 \times 16 \times 3} = \frac{1}{68}.$$

选B.

25 如果小明在某一周的第一天和第七天分别吃了3个水果, 且从这周的第二天开始, 每天所吃水果的个数与前一天相比, 仅存在三种可能: 或“多一个”或“持平”或“少一个”, 那么, 小明在这一周中每天所吃水果个数的不同选择方案共有 ().

A. 50种

B. 51种

C. 140种

D. 141种

答案 D

解析 小明共有6次选择, 因为第一天和第七天均吃3个水果,

所以在这6次选择中“多一个”和“少一个”的次数应相同，“持平”次数为偶数．

当6次选择均为“持平”时，共有 $C_6^0 = 1$ 种方案；

当6次选择中有4次“持平”时，选择“多一个”和“少一个”各1次，

共有 $A_6^2 C_4^4 = 30$ 种方案；

当6次选择中有2次“持平”时，选择“多一个”和“少一个”各2次，

共有 $C_6^2 C_4^2 C_4^4 = 90$ 种方案；

当6次选择中有0次“持平”时，选择“多一个”和“少一个”各3次，

共有 $C_6^3 C_3^3 = 20$ 种方案．

综上可得小明在这一周中每天所吃水果个数的不同选择方案

共有 $1 + 30 + 90 + 20 = 141$ 种方案．

- 26 数字1, 2, 3, ..., 9这九个数字填写在如图的9个空格中，要求每一行从左到右依次增大，每列从上到下也依次增大，当数字4固定在中心位置时，则所有填写空格的方案共有 _____ 种．

	4	

答案 12

解析 由题意可知，1必须在左上，
9必须在右下，在4的左方或上方只能填2, 3，
即 $A_2^2 = 2$ 种填法，
7可以填在剩下的任意一格，
当7在右上或左下时，5, 6, 7的位置就确定了，
有 $A_2^1 = 2$ 种，当7在4的下方或右方时，
8的位置确定了，剩下两个位置5, 6，
任意填，则有 $A_2^1 A_2^2 = 4$ 种，
根据加法原理和乘法原理得，
所有填写空格的方法共 $2 \times (2 + 4) = 12$ 种．
故答案为：12．

