错位相减与分组并项练习题

一、错位相减

1 已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，数列$\{b_n\}$为等差数列，且$b_1=a_1=1$，$b_3=a_3+1$，$b_5=a_5-7$．

(1) 求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和A_n．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) $A_n=(2n-3)\cdot 2^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$．

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

且$a_1=b_1=1$，因为$b_3=a_3+1$，$b_5=a_5-7$，

则有$\begin{cases}1+2d=q^2+1\\1+4d=q^4-7\end{cases}$，解得：$\begin{cases}d=2\\q=2\end{cases}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

数列$\{b_n\}$的通项公式为：$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 由（1）可知，$a_nb_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

则$A_n=1\times1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$，

$2A_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n$，

两式相减得：

$$\begin{aligned}A_n&=(2n-1)\cdot2^n-2(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-1\\&=(2n-1)\cdot2^n-2\times\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-1\\&=(2n-3)\cdot2^n+3,\end{aligned}$$

所以数列$\{a_nb_n\}$的前n项和为：$A_n=(2n-3)\cdot2^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$．

2 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$，满足$2S_n=3(a_n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$．

(1) 求证：$\{a_n\}$为等比数列，并写出其通项公式．

(2) 设$b_n=(2n-1)a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

答案 (1) $a_n=3^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，证明见解析．

(2) $T_n=3+(n-1)\cdot 3^{n+1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

解析 (1) 由$2S_n=3(a_n-1)$可得：

当$n\geqslant 2$时，$2S_{n-1}=3(a_{n-1}-1)$，

两式相减可得：$2S_n-2S_{n-1}=3a_n-3a_{n-1}$，

即$2a_n=3a_n-3a_{n-1}$，

$a_n=3a_{n-1}\ (n\geqslant 2)$，

又$2S_1=3(a_1-1)$，

$2a_1=3a_1-3$，

所以$a_1=3\neq 0$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$为首项是3，公比是3的等比数列，

$\therefore a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 由（1）可得：$b_n=(2n-1)\cdot a_n=(2n-1)\cdot 3^n$，

$T_n=1\cdot 3+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$，

$3T_n=1\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+(2n-3)\cdot 3^n+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

两式相减可得：$-2T_n=3+2\left(3^2+3^3+\cdots+3^n\right)-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$=-3+2\left(3+3^2+3^3+\cdots+3^n\right)-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$=-3+2\times\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$=-6-2(n-1)\cdot 3^{n+1}$，

$\therefore T_n=3+(n-1)\cdot 3^{n+1}$．

3 已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$2a_2=a_4-a_3$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=1+2\log_2 a_n$．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 令$c_n=a_n\cdot b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n．

答案　(1)　$a_n=2^n$，$b_n=2n+1$．

(2)　$2^{n+1}(2n-1)+2$．

解析　(1)　$a_1=2$，$2a_2=a_4-a_3$，

$\therefore 2a_1q=a_1q^3-a_1q^2$，

$2q=q^3-q^2$，

$q^3-2q-q^2=0$，

$\because q\neq 0$，

$\therefore q^2-q-2=0$，

$(q-2)(q+1)=0$，

$\therefore q=2$或$q=-1$，

$\because$正项等比数列，

$\therefore q=2$．

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$，

$\therefore b_n=1+2\log_2 a_n=1+2\log_2 2^n=1+2n$，

$\therefore b_n=2n+1$．

(2)　令$c_n=a_nb_n$，

$\therefore c_n=2^n\cdot(2n+1)$，

令c_n的前n项和为S_n，

$\therefore S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，

$S_n=2^1\cdot(2\times1+1)+2^2\cdot(2\times2+1)+\cdots+2^n\cdot(2n+1)$，

① $S_n=2^1\times3+2^2\times5+2^3\times7+\cdots+2^{n-1}\times(2n-1)+2^n\times(2n+1)$，

② $2S_n=2^2\times3+2^3\times5+\cdots+2^{n-1}\times(2n-3)+2^n\times(2n-1)+2^{n+1}\times(2n+1)$，

①−②得$-S_n=2\times3+2^2\times2+2^3\times2+\cdots+2^{n-1}\times2+2^n\times2-2^{n+1}(2n+1)$，

$-S_n=2\times3+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^n+2^{n+1}-2^{n+1}(2n+1)$，

$-S_n=2\times3+\dfrac{8-2^{n+1}\times2}{1-2}-2^{n+1}(2n+1)$，

$-S_n=6+\dfrac{8-2^{n+2}}{-1}-2^{n+1}(2n+1)$，

$-S_n=6-8+2^{n+2}-2^{n+2}n-2^{n+1}$，$-S_n=2^{n+2}-2^{n+2}n-2^{n+1}-2$，

$-S_n=2^{n+1}(2-2n-1)-2$，

$-S_n=2^{n+1}(1-2n)-2$，

$S_n=2^{n+1}(2n-1)+2$.

4 已知公比为正数的等比数列$\{a_n\}$，首项$a_1=3$，前n项和为$S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，且S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$b_n=\dfrac{na_n}{6}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 (1) $a_n=\dfrac{6}{2^n}$.

(2) $T_n=2-\dfrac{2+n}{2^n}$.

解析 (1) 由题意知，设$a_n=3q^{n-1}$，

$\because S_3+a_3$，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列，

$\therefore 2(S_5+a_5)=(S_3+a_3)+(S_4+a_4)$，

即$2(a_1+a_2+a_3+a_4+2a_5)$

$=(a_1+a_2+2a_3)+(a_1+a_2+a_3+2a_4)$，

化简得$4a_5=a_3$，

$\therefore 4q^2=1$.

得$q=\pm\dfrac{1}{2}$，

$\because\{a_n\}$的公比为正数，

$\therefore q=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore a_n=\dfrac{6}{2^n}$.

(2) $a_n=\dfrac{6}{2^n}$.

$b_n=\dfrac{na_n}{6}=\dfrac{n}{6}\times\dfrac{6}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，

$T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$，①

$2T_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，②

②−①得

$$T_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}$$

$=2-\dfrac{2+n}{2^n}$.

5 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_{n+1}=a_n+2\,(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_3+a_4=12$．数列$\{b_n\}$为等比数列，且$b_1=a_2$，$b_2=S_3$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=(-1)^n a_n\cdot b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

答案 (1) $a_n=2n-1$，$b_n=3^n$．

(2) $T_n=\dfrac{3}{8}-\dfrac{9\times(4n-1)}{8}\times(-3)^{n-1}$．

解析 (1) 根据题意，数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2$，

则数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列，

又由$a_3+a_4=12$，则$a_3+a_3+d=12$，解可得$a_3=5$，

则$a_n=a_3+(n-3)\,d=2n-1$，

又由数列$\{b_n\}$为等比数列，且$b_1=3$，$b_2=1+3+5=9$，

则数列$\{b_n\}$的公比为3，则$b_n=3^n$．

(2) 根据题意，由第一问的结论，$a_n=2n-1$，$b_n=3^n$，

则$c_n=(-1)^n a_n\cdot b_n=(-1)^n\times(2n-1)\times3^n=(2n-1)\,(-3)^n$，

则$T_n=1\times(-3)+3\times(-3)^2+\cdots+(2n-1)\,(-3)^n$，①

$-3T_n=1\times(-3)^2+3\times(-3)^3+\cdots+(2n-1)\,(-3)^{n+1}$，②

①−②可得：

$4T_n=-3+2\left[(-3)^2+(-3)^3+\cdots+(-3)^n\right]-(2n-1)\times(-3)^{n+1}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{9\times(4n-1)}{2}\times(-3)^{n-1}$，

变形可得：$T_n=\dfrac{3}{8}-\dfrac{9\times(4n-1)}{8}\times(-3)^{n-1}$．

6 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d, d为整数，前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，已知$a_1=b_1$，$b_2=2$，$d=q$，$S_{10}=100$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(1) 求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n．

答案 (1) $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) $T_n=6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$．

解析 (1) 有题意可得$\begin{cases}10a_1+45d=100\\a_1d=2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a_1=6\\d=\dfrac{2}{9}\end{cases}$（舍去）或$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，

$\therefore a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) $\because c_n=\dfrac{a_n}{b_n}=(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore T_n=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}=\dfrac{7}{2^3}+\dfrac{9}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$①，

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}$②，

①−②得：$\dfrac{1}{2}T_n=2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$，

$=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$．

$\therefore T_n=6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$．

7 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_n=b_n+b_{n+1}$．

(1) 求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 令$c_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$．

答案 (1) $a_n=6n+5$，$b_n=3n+1$．

(2) $T_n=3n\cdot2^{n+2}$．

解析 (1) $n=1$时，$a_1=S_1=11$，

$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=6n+5$，

a_1也满足，

$\therefore a_n=6n+5$，

$\begin{cases}a_1=b_1+b_2\\a_2=b_2+b_3\end{cases}$，$\begin{cases}11=2b_1+d\\17=2b_1+3d\end{cases}$，

$b_1=4$，$d=3$，

$\therefore b_n=3n+1$．

(2) $c_n=\dfrac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=3(n+1)\cdot 2^{n+1}$,

$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$,

$=3[2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)\cdot 2^{n+1}]$,

$2T_n=3[2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n+1)\cdot 2^{n+2}]$,

$-T_n=3[2\cdot 2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^{n+2}]$,

$=3\times\left[4+\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\times 2^{n+2}\right]$,

$=-3n\cdot 2^{n+2}$,

$\therefore T_n=3n\cdot 2^{n+2}$.

8 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=qa_n$（q为实数，且$q\neq 1$），$n\in\mathbf{N}^*$，$a_1=1$，$a_2=2$，且a_2+a_3，a_3+a_4，a_4+a_5成等差数列．

(1) 求q的值和$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$b_n=\dfrac{\log_2 a_{2n-1}}{a_{2n}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和．

答案 (1) $q=2$,

$a_n=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}},n\text{为偶数}\\2^{\frac{n-1}{2}},n\text{为奇数}\end{cases}$.

(2) $S_n=1-\dfrac{n+1}{2^n}$.

解析 (1) $a_{n+2}=qa_n$,

$a_3=qa_1=q$,

$a_4=qa_2=2q$,

$a_5=qa_3=q^2$,

又$2(a_3+a_4)=a_4+a_5+a_2+a_3$,

$2(q+2q)=2q+q^2+2+q$,

$(q-2)(q-1)=0$,

故$q=2$或$q=1$（舍），

设当$n=2k$时，$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=q=2$,

则a_{2k}是以2为公比的等比数列，

$a_n=a_{2k}=2\cdot 2^{k-1}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$,

当$n=2k-1$时，

$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=2$，

$a_n=a_{2k-1}=2^{k-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$，

故$a_n=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}},n为偶数\\2^{\frac{n-1}{2}},n为奇数\end{cases}$.

(2) $b_n=\frac{\log_2 a_{2n-1}}{a_{2n}}=\frac{n-1}{2^n}$，

设b_n前n项和为S_n，

则$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，

$=\frac{0}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}$①，

$\frac{S_n}{2}=\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{n-2}{2^n}+\frac{n-1}{2^{n+1}}$②，

①−②得，

$\frac{S_n}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{n-1}{2^{n+1}}$，

$=\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^{n+1}}$，

$=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^{n+1}}-\frac{n-1}{2^{n+1}}$，

$=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$，

$\therefore S_n=1-\frac{n+1}{2^n}$.

二、分组求和

9 设$\{a_n\}$是等比数列，公比大于0，其前n项和为$S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是等差数列．已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\frac{a_n}{(a_n+1)\cdot(a_{n+1}+1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$的值．

(3) 设$d_n=\begin{cases}b_n,n\neq 2^k\\b_n(\log_2 b_n+1),n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，求$\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$．

(2) $T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$．

(3) $\sum_{i=1}^{2^n} d_i = 2^{2n-1} + (4n-3)\cdot 2^{n-1} + 2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

解析

(1) 令$\{a_n\}$公比为$q\,(q>0)$，$\{b_n\}$公差为d，

则有$\begin{cases} a_1q^2 = a_1q + 2 \\ a_1q^3 = 2b_1 + 6d \\ a_1q^4 = 3b_1 + 13d \end{cases}$，解得$\begin{cases} q = 2 \\ b_1 = d = 1 \end{cases}$，

即$\begin{cases} a_n = 2^{n-1} \\ b_n = n \end{cases}$.

(2) $c_n = \dfrac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}+1\right)\left(2^n+1\right)} = \dfrac{1}{2^{n-1}+1} - \dfrac{1}{2^n+1}$，

$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$

$= \left(\dfrac{1}{2^0+1} - \dfrac{1}{2^1+1}\right) + \left(\dfrac{1}{2^1+1} - \dfrac{1}{2^2+1}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2^{n-1}+1} - \dfrac{1}{2^n+1}\right)$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n+1}$.

(3) $\sum_{i=1}^{2^n} d_i = \sum_{i=1}^{2^n} b_i - \sum_{i=1}^{n} 2^i + \sum_{i=1}^{n} 2^i\,(i+1) = \sum_{i=1}^{2^n} b_i + \sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot i$，

$T_1 = \sum_{i=1}^{2^n} b_i = \dfrac{\left(1+2^n\right)2^n}{2} = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$，

$T_2 = \sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^i = 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n$，

$2T_2 = 1\cdot 2^2 + \ldots + (n-1)\cdot 2^n + n\cdot 2^{n+1}$，

$-T_2 = 2 + \dfrac{4 - 2^n\cdot 2}{1-2} - n\cdot 2^{n+1}$

$= 2 - 4 + 2^{n+1} - n\cdot 2^{n+1}$

$= -2 + (1-n)\cdot 2^{n+1}$，

$\therefore T_2 = 2 + (n-1)\cdot 2^{n+1}$，

$\therefore \sum_{i=1}^{2^n} d_i = T_1 + T_2 = 2^{2n-1} + (4n-3)\cdot 2^{n-1} + 2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

10 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 2$，$(n+2)a_n = (n+1)a_{n+1} - 2(n^2+3n+2)$，设$b_n = \dfrac{a_n}{n+1}$.

(1) 求b_1，b_2，b_3的值 .

(2) 证明数列$\{b_n\}$是等差数列 .

(3) 设$\dfrac{c_n}{b_n} = 2^n + 1$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

答案

(1) $b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_3 = 5$.

(2) 证明见解析 .

(3) $T_n = 6 + (2n-3)\cdot 2^{n+1} + n^2$.

解析 (1) 由$(n+2)a_n=(n+1)a_{n+1}-2(n^2+3n+2)$

得$(n+2)a_n=(n+1)a_{n+1}-2(n+2)(n+1)$，

$\dfrac{a_n}{n+1}-\dfrac{a_{n+1}}{n+2}=-2$，

$\dfrac{a_{n+1}}{n+2}-\dfrac{a_n}{n+1}=2$，

$\because b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=2$，

$\therefore b_1=\dfrac{a_1}{1+1}=\dfrac{2}{2}=1$，

$b_2=b_1+2=3$，

$b_3=b_2+2=5$．

(2) 由（1）知$b_{n+1}-b_n=2$，$b_1=1$，

$\therefore$数列$\{b_n\}$是以1为首项，2为公差的等差数列．

(3) 由（2）可得$b_n=1+2(n-1)=2n-1$

$\because\dfrac{c_n}{b_n}=2^n+1$，

$\therefore c_n=(2^n+1)b_n=(2n-1)\cdot 2^n+2n-1$

设$P_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$，

$2P_n=1\times 2^2+3\times 2^2+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$，

两式相减得：

$-P_n=2+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)\cdot 2^{n+1}=2+2\times\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)$
$\cdot 2^{n+1}=-6-(2n-3)\cdot 2^{n+1}$

，

化简得$P_n=6+(2n-3)\cdot 2^{n+1}$，

设$S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$

$\therefore T_n=P_n+S_n=6+(2n-3)\cdot 2^{n+1}+n^2$．

11 已知非单调数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，$a_1=\dfrac{3}{2}$，其前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且满足S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式和前n项和S_n．

(2) $b_n=(-1)^n n^2 S_n+\dfrac{n^2+n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

答案 (1) $a_n=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$．

(2) $T_n=\begin{cases}\frac{n^2+n+4}{2}-\frac{n+2}{2^n}, n\text{为偶数}\\ -\frac{n^2+n-4}{2}-\frac{n+2}{2^n}, n\text{为奇数}\end{cases}$．

解析 (1) $\because S_3+a_3$，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列，

$\therefore 2(S_5+a_5)=(S_3+a_3)+(S_4+a_4)$，

$\therefore a_3=4a_5$，$q^2=\frac{1}{4}$，$q=-\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$．

(2) $b_n=(-1)^n n^2 S_n+\frac{n^2-n}{2^n}$

$=(-1)^n n^2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]+\frac{n^2-n}{2^n}$

$=(-1)^n n^2+\frac{n}{2^n}$，

设$(-1)^n n^2$的前n项和为H_n，$\frac{n}{2^n}$的前n项和为Q_n，

①当n为偶数时，

$H_n=-1^2+2^2-3^2+4^2+\cdots-(n-1)^2+n^2$

$=1+2+3+4+\cdots+n-1+n=\frac{n^2+n}{2}$，

$Q_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，①

$\frac{1}{2}Q_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，②

①−②得，$\frac{1}{2}Q_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$．

$\therefore Q_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，

$\therefore T_n=H_n+Q_n=\frac{n^2+n}{2}+2-\frac{n+2}{2^n}$

$=\frac{n^2+n+4}{2}-\frac{n+2}{2^n}$，

②当n为奇数时，

$H_n=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}-n^2=-\frac{n^2+n}{2}$，

$\therefore Q_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，

$\therefore T_n=H_n+Q_n=-\frac{n^2+n}{2}+2-\frac{n+2}{2^n}$

$=-\frac{n^2+n-4}{2}-\frac{n+2}{2^n}$，

综合①②，

$$\therefore T_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+n+4}{2}-\dfrac{n+2}{2^n},n\text{为偶数}\\-\dfrac{n^2+n-4}{2}-\dfrac{n+2}{2^n},n\text{为奇数}\end{cases}.$$

12 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，且点$P(a_n,a_{n+1})$（$n\in\mathbf{N}^*$）在直线$y=x+2$上，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$．

(1) 数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{a_n\cdot(b_n-(-1)^n)\}$的前n项和为T_n，求T_n．

答案 (1) $a_n=2n$；$b_n=3^n$．

(2) $$T_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot 3^{n+1}+n(n\text{为偶数})\\\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot 3^{n+1}-n-1(n\text{为奇数})\end{cases}.$$

解析 (1) $\because a_{n+1}=a_n+2$，

$\therefore\{a_n\}$是以$a_1=2$为首项，

2为公差的等差数列，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)2=2n$，

$\because b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$，

$\therefore\{b_n\}$是以$b_1=3$为首项，3为公比的等比数列，

$\therefore b_n=3^n$．

(2) 由(1)知，

$\therefore a_n\cdot(b_n-(-1)^n)=2n\cdot(3^n-(-1)^n)=2n\cdot 3^n-(-1)^n\cdot 2n$，

设$\{2n\cdot 3^n\}$的前n项和为T_n'，

$T_n'=2\cdot 3^1+4\cdot 3^2+6\cdot 3^3+\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$，①

$3T_n'=2\cdot 3^2+4\cdot 3^3+6\cdot 3^4+\cdots+2(n-1)\cdot 3^n+2n\cdot 3^{n+1}$，②

①-②得，$-2T_n'=2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^n-2n\cdot 3^{n+1}$，

$-2T_n'=\dfrac{6(1-3^n)}{1-3}-2n\cdot 3^{n+1}=-3+(1-2n)\cdot 3^{n+1}$，

$T_n'=\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot 3^{n+1}$，

设$\{(-1)^n\cdot 2n\}$的前n项和为T_n''，当n为偶数时，

$T_n''=-2+4-6+8-\cdots-2(n-1)+2n=2\cdot\dfrac{n}{2}=n$，

当n为奇数时，$n+1$为偶数，

$T_n'' = T_{n+1}'' - 2(n+1) = n+1-2n-2 = -n-1$,

$$\therefore T_n = \begin{cases} \dfrac{3}{2} + (n-\dfrac{1}{2}) \cdot 3^{n+1} + n(n\text{为偶数}) \\ \dfrac{3}{2} + (n-\dfrac{1}{2}) \cdot 3^{n+1} - n - 1(n\text{为奇数}) \end{cases} .$$