

裂项相消

1. 知识梳理



一、等差型

1. 真题分析

1 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项。

(1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

(2) 设 $a_1 = d$ ， $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$ 。

答案

(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

解析

(1) 由题意，得 $b_n^2 = a_n a_{n+1}$ ，又 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2 = a_{n+1} a_{n+2} - a_n a_{n+1} = 2da_{n+1}$ ，因此

$c_{n+1} - c_n = 2d(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2d^2$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 是等差数列。

(2) $T_n = (-b_1^2 + b_2^2) + (-b_3^2 + b_4^2) + \cdots + (-b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2) = 2d(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n})$

$= 2d \cdot \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} = 2d^2 n(n+1)$ 。所以 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} = \frac{1}{2d^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

$= \frac{1}{2d^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2d^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{2d^2}$ 。

2. 思路总结

如果数列的通项可分裂成“两项差”的形式,且相邻项分裂后相关联,那么常选用裂项相消法求和.把

数列的通项拆成两项之差、正负相消剩下首尾若干项,如下:

$$\textcircled{1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right];$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{a-b} (\sqrt{a} - \sqrt{b}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n});$$

3. 模拟演练

- 2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n - 2) (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为0的等差数列, 且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$, b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}}$;

(3) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

答案

(1) $a_n = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$; $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) $\frac{10}{21}$.

(3) $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 = \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + n + \frac{3}{2}$.

解析

(1) 因为 $2S_n = 3(a_n - 2) (n \in \mathbf{N}^*)$ ①,

当 $n=1$ 时, $2S_1 = 2a_1 = 3(a_1 - 2)$,

即 $2a_1 = 3a_1 - 6$,

即 $-a_1 = -6$,

解得 $a_1 = 6$;

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = 3(a_{n-1} - 2)$ ②,

由①-②可得 $2S_n - 2S_{n-1} = 3(a_n - 2) - 3(a_{n-1} - 2)$,

即 $2a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$,

即 $a_n = 3a_{n-1}$,

因为 $a_1 = 6 \neq 0$,

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 6 为首项, 3 为公比的等比数列,

所以 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

因为数列 $\{b_n\}$ 是公差为 0 的等差数列,

设公差为 d ,

则 $d \neq 0$,

又因为 $b_1 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6} \times 6 = 1$,

即 $b_1 = 1$,

又因为 b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项,

所以 $b_5^2 = b_2 \cdot b_{14}$,

即 $(b_1 + 4d)^2 = (b_1 + d)(b_1 + 13d)$,

即 $(1 + 4d)^2 = (1 + d)(1 + 13d)$,

即 $1 + 16d^2 + 8d = 1 + 14d + 13d^2$,

即 $3d^2 - 6d = 0$,

即 $d(d - 2) = 0$,

解得 $d = 0$ 或 $d = 2$,

又因为公差 d 不为 0,

所以 $d = 2$,

所以 $b_n = b_1 + (n - 1)d = 1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

综上所述: 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 因为 $b_n = 2n - 1$,

所以 $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right)$,

所以 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{20}{21}$
 $= \frac{10}{21}$,

所以 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}} = \frac{10}{21}$.

(3) 因为 $a_n = 2 \times 3^n$,

又因为 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2$

$$= \sum_{i=1}^n (a_i - 1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (2 \times 3^i - 1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (4 \times 9^i - 4 \times 3^i + 1)$$

$$= 4 \sum_{i=1}^n 9^i - 4 \sum_{i=1}^n 3^i + n$$

$$= 4 \times \frac{9(1-9^n)}{1-9} - 4 \times \frac{3(1-3^n)}{1-3} + n$$

$$= 4 \times \frac{9-9^{n+1}}{-8} - 4 \times \frac{3-3^{n+1}}{-2} + n$$

$$= \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - \frac{9}{2} - 2 \times 3^{n+1} + 6 + n$$

$$= \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + n + \frac{3}{2}$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 = \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + n + \frac{3}{2}.$$

3 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 ($n \in \mathbf{N}^*$), $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 记 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n}$, 证明:

$$1 \leq T_n \leq 2.$$

答案

(1) $a_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 ($n \in \mathbf{N}^*$), $a_1 = 2$,

可设公比为 $q, q > 0$,

又 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列,

所以 $2a_3 = 2a_1 + 3a_2$, 即 $2 \times 2q^2 = 4 + 3 \times 2q$,

解得 $q = 2$ 或 $q = -\frac{1}{2}$ (舍去),

则 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$,

故 $a_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$,

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } T_n &= \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n} \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

$$\text{因为 } 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } 1 \leq 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2,$$

$$\text{即 } 1 \leq T_n \leq 2.$$

4 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = 2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

答案

(1) $a_n = \frac{2}{2n-1};$

(2) $\frac{2n}{2n+1}$

解析

(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = 2n$.

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-3)a_{n-1} = 2(n-1).$$

$$\therefore (2n-1)a_n = 2,$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{2n-1}.$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$, 上式也成立,

$$\therefore a_n = \frac{2}{2n-1}.$$

(2) $\frac{a_n}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}.$$

二、综合型

1. 真题分析

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_n + 4n - 7$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 证明：数列 $\{a_n - 2\}$ 是等比数列。

(2) 若 $b_n = \frac{a_n - 2}{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

答案

(1) 证明见解析。

$$(2) T_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 3^n + 2}.$$

解析

(1) 当 $n = 1$ 时， $2S_1 = 3a_1 - 3$ ，

$$\therefore a_1 = 3.$$

当 $n \geq 2$ 时， $2S_n = 3a_n + 4n - 7$ ，

$$2S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4(n-1) - 7,$$

$$\therefore 2a_n = 3a_n - 3a_{n-1} + 4, \text{ 即 } a_n = 3a_{n-1} - 4.$$

$$\text{从而 } a_n - 2 = 3(a_{n-1} - 2), \text{ 即 } \frac{a_n - 2}{a_{n-1} - 2} = 3.$$

$$\text{又 } a_1 - 2 = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 2\}$ 是以1为首项，3为公比的等比数列。

(2) 由(1)知 $a_n - 2 = 3^{n-1}$ ，即 $a_n = 3^{n-1} + 2$ 。

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= \frac{a_n - 2}{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)} = \frac{3^{n-1}}{(3^n + 1)(3^{n-1} + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1} \right). \\ \therefore T_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^0 + 1} - \frac{1}{3^1 + 1} + \frac{1}{3^1 + 1} - \frac{1}{3^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 3^n + 2}. \end{aligned}$$

2. 思路总结

$$\textcircled{1} \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}, \quad \frac{3^n}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right);$$

$$\textcircled{2} \frac{\frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = 2 \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right);$$

$$\textcircled{3} (-1)^n \frac{4n}{4n^2 - 1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{2n + 1} \right);$$

$$\textcircled{4} \frac{(2n - 1) \cdot 3^n}{n(n + 1)} = \frac{3^{n+1}}{n + 1} - \frac{3^n}{n};$$

⑤若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列,则 $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$;

⑥在裂项相消时,注意消去了哪些项剩余的正项数与负项数是一样的,注意数学思想在解决数列问题时的应用;

3. 模拟演练

6 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{1}{3}$.

答案

(1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = n, n \in \mathbf{N}^*.$

(2) 证明见解析.

解析

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意可知 $2a_4 = 2a_5 + 4a_6$, 即 $a_4 = a_4q + 2a_4q^2$,

由 $a_n > 0$, 则 $2q^2 + q - 1 = 0$, 解得: $q = \frac{1}{2}$, 或 $q = -1$ (舍去),

$$a_4 = 4a_3^2 = 4a_2a_4, \text{ 则 } a_2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2},$$

等比数列 $\{a_n\}$ 通项公式 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+1)b_n}{2} - \frac{nb_{n-1}}{2},$$

$$\text{整理得: } \frac{b_n}{n} = \frac{b_{n-1}}{n-1},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{b_1}{1} = 1$ 的常数列,

$$\text{则 } \frac{b_n}{n} = 1, \text{ 则 } b_n = n, n \in \mathbf{N}^*,$$

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = n, n \in \mathbf{N}^*.$

(2) 由(1)可知: $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n = \frac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1}{2^n} \dots$ (8分)

$$\therefore c_n = \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+3) \cdot 2^n}, \dots$$
 (10分)

$$\therefore \sum_{k=1}^n c_k = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5 \cdot 2} \right) + \left(\frac{1}{5 \cdot 2} - \frac{1}{7 \cdot 2^2} \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+3) \cdot 2^n} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+3) \cdot 2^n},$$

由 $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\therefore \sum_{k=1}^n c_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+3) \cdot 2^n} < \frac{1}{3},$$

故不等式成立.

7 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于 0, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$,

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = n$.

(2) $T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1}$.

解析

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_1 = 1, \text{ 由 } a_3 = a_2 + 2, \text{ 得 } q^2 = q + 2,$$

$$\because q > 0, \text{ 解得 } q = 2, \text{ 则 } a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{由 } a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6 \text{ 得 } \begin{cases} 2b_1 + 6d = 8 \\ 3b_1 + 13d = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得 } b_1 = d = 1, \text{ 则 } b_n = b_1 + (n-1)d = n.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_n &= \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)} = \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)} \\ &= \frac{(2^n + 1) - (2^{n-1} + 1)}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)} = \frac{1}{2^{n-1} + 1} - \frac{1}{2^n + 1}, \\ \therefore T_n &= \left(\frac{1}{2^0 + 1} - \frac{1}{2^1 + 1} \right) + \left(\frac{1}{2^1 + 1} - \frac{1}{2^2 + 1} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} - \frac{1}{2^n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1}. \end{aligned}$$

8 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1 + a_4 = 9$, $a_2 a_3 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}$

(2) $T_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1}$

解析

(1) 方法一：∵ $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，且 $a_1 + a_4 = 9$ ， $a_2 a_3 = 8$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_4 = 9 \\ a_1 < a_4 \\ a_1 a_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

方法二：由题设知 $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3 = 8$ ，

又 $a_1 + a_4 = 9$ ，可解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_4 = 8 \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_4 = 1 \end{cases}$ （舍去）。

由 $a_4 = a_1 q^3$ 得公比为 $q = 2$ ，故 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$ 。

(2) 由 (I) 可知 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$

$$\therefore b_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

$$\therefore T_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1}.$$

9

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ， $a_2 - 1$ ， a_3 ， a_7 ，恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 3 项。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\left\{ \frac{nb_n}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ；若对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 均满足 $T_n > \frac{m}{2020}$ ，求整数 m 的最大值。

答案

(1) $a_n = n + 1$ ， $b_n = 2^n$ 。

(2) 673。

解析

(1) 由题，当 $n = 1$ 时， $a_2^2 = 2S_1 + 5$ ，即 $a_2^2 = 2a_1 + 5$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4 \cdots \textcircled{1}$ ， $a_n^2 = 2S_{n-1} + n + 3 \cdots \textcircled{2}$ ，

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2a_n + 1$ ，整理得 $a_{n+1}^2 = (a_n + 1)^2$ ，

又因为各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ ，

故 $a_{n+1} = a_n + 1$ ， $\{a_n\}$ 是从第二项的等差数列，公差为 1，

又 $a_2 - 1$ ， a_3 ， a_7 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 3 项，

$$\text{故 } a_3^2 = (a_2 - 1)a_7 \Rightarrow (a_2 + 1)^2 = (a_2 - 1)(a_2 + 5),$$

$$\text{解得 } a_2 = 3,$$

$$\text{又 } a_2^2 = 2a_1 + 5,$$

$$\text{故 } a_1 = 2,$$

$$\text{因为 } a_2 - a_1 = 1 \text{ 也成立,}$$

故 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 2$ 为首项, 1 为公差的等差数列,

$$\text{故 } a_n = 2 + n - 1 = n + 1,$$

即 2, 4, 8 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 3 项,

故 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = 2$ 为首项, 公比为 $\frac{4}{2} = 2$ 的等比数列,

$$\text{故 } b_n = 2^n,$$

综上, $a_n = n + 1, b_n = 2^n$.

$$(2) \quad \frac{nb_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1},$$

前 n 项和为 $T_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$, $\{T_n\}$ 单增, 所以 T_n 的最小值为 $\frac{1}{3}$,

所以 $m < \frac{2020}{3}$, 所以 m 的最大整数是 673.

10 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2, S_5 = 30$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n = 2^n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n , 求 M_n .

答案

$$(1) \quad a_n = 2n, b_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1}.$$

解析

$$(1) \quad S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 10 + 10d = 30,$$

$$\therefore d = 2,$$

$$\therefore a_n = 2n,$$

对数列 $\{b_n\}$: 当 $n = 1$ 时, $b_1 = T_1 = 2^1 - 1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = T_n - T_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$,

当 $n = 1$ 时也满足上式,

$$\therefore b_n = 2^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_n &= \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+1} + 1)} = \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)} = \\ &= \frac{(2^n + 1) - (2^{n-1} + 1)}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)} = \frac{1}{2^{n-1} + 1} - \frac{1}{2^n + 1}, \\ \therefore M_n &= \left(\frac{1}{2^0 + 1} - \frac{1}{2^1 + 1} \right) + \left(\frac{1}{2^1 + 1} - \frac{1}{2^2 + 1} \right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} - \frac{1}{2^n + 1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1}. \end{aligned}$$

11 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于 0，前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4, a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n ， b_n 。

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$)。

① 求 T_n 。

② 证明：
$$\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} < \frac{1}{2}.$$

答案

(1) $a_n = \frac{1}{2^n}$ ， $b_n = n - 1$ 。

(2) ① $T_n = n - 1 + \frac{1}{2^n}$ 。

② 证明见解析。

解析

(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$ ， $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a_1 q^2} = \frac{1}{a_1 q} + 4 \end{cases}$ ， $\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q} - 2 = 0$ ，解得 $q = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^n},$$

$$\text{设等差数列 } a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6} = \frac{1}{8}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7} = \frac{1}{16},$$

$$\therefore 2b_1 + 8d = 8, 3b_1 + 16d = 16,$$

$$\text{解得 } b_1 = 0, d = 1,$$

$$\therefore b_n = n - 1.$$

(2) ①
$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$\{S_n\}$ 的前 n 项和为

$$T_n = n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n} = n - \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = n - 1 + \frac{1}{2^n}.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{(T_{i+1} - b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} = \frac{\left(i + \frac{1}{2^{i+1}} - i\right)(i+2)}{i(i+1)} = \frac{1}{i \cdot 2^i} - \frac{1}{(i+1) \cdot 2^{i+1}},$$

$\therefore$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1})b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{i \cdot 2^i} - \frac{1}{(i+1) \cdot 2^{i+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} < \frac{1}{2}$$

.

12 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^n a_n$.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求满足 $T_n < \frac{124}{63} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的 n 的最大值.

答案

(1) $a_n = \frac{n}{2^n}$.

(2) n 的最大值为4.

解析

(1) 在 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ 中, 令 $n=1$,

可得 $S_1 = -a_1 - 1 + 2$, 即 $a_1 = \frac{1}{2}$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = -a_{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2$,

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = -a_n + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\therefore 2a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 即 } 2^n a_n = 2^{n-1} a_{n-1} + 1.$$

$$\therefore b_n = 2^n a_n, \therefore b_n = b_{n-1} + 1, \text{ 即当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n - b_{n-1} = 1.$$

$$\text{又 } b_1 = 2a_1 = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项和公差均为1的等差数列.

$$\text{于是 } b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n = 2^n a_n, \therefore a_n = \frac{n}{2^n}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \therefore c_n &= \frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})} = \frac{n(n+1)}{2^n\left(n-\frac{n}{2^n}\right)\left(n+1-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)} \\ &= \frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{2}{2^n-1} - \frac{2}{2^{n+1}-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \left(\frac{2}{2^1-1} - \frac{2}{2^2-1} \right) + \left(\frac{2}{2^2-1} - \frac{2}{2^3-1} \right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{2}{2^{n-1}-1} - \frac{2}{2^n-1} \right) + \left(\frac{2}{2^n-1} - \frac{2}{2^{n+1}-1} \right) \\ &= \frac{2}{2^1-1} - \frac{2}{2^{n+1}-1} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

$$\text{由 } T_n < \frac{124}{63}, \text{ 得 } 2 - \frac{2}{2^{n+1}-1} < \frac{124}{63}, \text{ 即 } \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{1}{63},$$

$$\therefore 2^{n+1} < 64, \text{ 即 } n < 5,$$

$\therefore n$ 的最大值为 4.

13 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 8$, 设 $b_n = a_n - 2$.

(1) 证明: $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \geq T_n$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

答案

(1) 证明建见解析.

$$(2) \lambda \geq -\frac{2}{9}.$$

解析

(1) 当 $n=1$ 时, $a_1=14$,

$$\text{当 } n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*, S_n = a_{n+1} + 2n - 8, S_{n-1} = a_n + 2n - 10,$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 2,$$

$$\text{即 } a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2), \text{ 即 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 (n \geq 2),$$

$$\text{又 } \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 - 2}{a_1 - 2} = 2,$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 6$, 公比为 2 的等比数列.

(2) 由 (1) 知 $a_n - 2 = 6 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_n = 3 \cdot 2^n + 2$,

$$\text{所以 } c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = (-1)^n \frac{3 \cdot 2^n + 2}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$

$$= (-1)^n \left[\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+1}+1} \right],$$

$$T_n = - \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} \right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} \right) - \left(\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^4+1} \right) +$$

$$\cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+1}+1} \right),$$

$$\therefore T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}+1},$$

当 n 为偶数时,

$\therefore T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ 是递减的,

此时当 $n = 2$ 时, T_n 取最大值 $-\frac{2}{9}$, 则 $\lambda \geq -\frac{2}{9}$,

当 n 为奇数时,

$\therefore T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ 是递增的,

此时 $T_n < -\frac{1}{3}$, 则 $\lambda \geq -\frac{1}{3}$.

综上, λ 的取值范围是 $\lambda \geq -\frac{2}{9}$.

14 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n (n^2 + 4n + 2) 2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) $b_n = n$.

(2) $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

(3) $-\frac{2}{3} - \frac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1) \cdot 2^{n+1}}$.

解析

(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$,

可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1$,

设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 公差为 1, 首项为 1,

$\therefore b_n = n$.

(2) 易得 $a_n = n \cdot 2^n$, 其前 n 项和: $S_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n \cdots \textcircled{1}$,

$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n+1} \cdots \textcircled{2}$,

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 可得: $S_n = -1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^n + n \cdot 2^{n+1}$,

$\therefore S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

(3) $c_n = \frac{(-1)^n (n^2 + 4n + 2) 2^n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1) 2^{n+1}} = \frac{(-1)^n (n^2 + 4n + 2)}{n \cdot (n+1) 2^{n+1}}$
 $= \frac{(-1)^n (n^2 + n + 2(n+1) + n)}{n \cdot (n+1) 2^{n+1}}$
 $= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + (-1)^n \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right),$

$$\begin{aligned}
 T_n &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] \\
 &+ \left[\left(\frac{-1}{1 \cdot 2^1} - \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2^2} \right) + \left(\frac{(-1)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(-1)^3}{3 \cdot 2^3} \right) + \cdots + \left(\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right) \right] \\
 &= -\frac{2}{3} - \frac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1) \cdot 2^{n+1}}.
 \end{aligned}$$