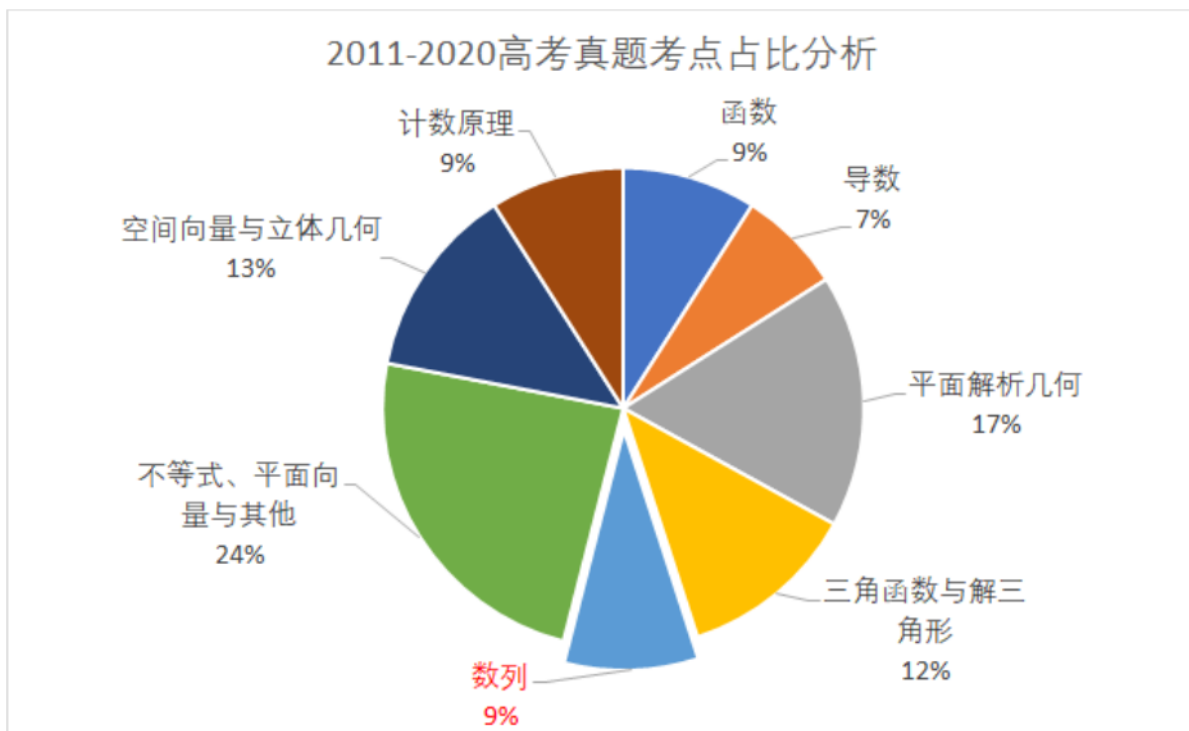


数列通项求法

1. 考情分析



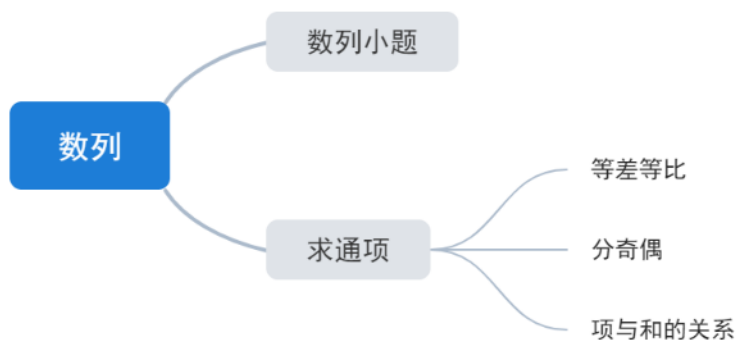
考点占比



考点分析

2011-2020 高考真题考点分析					
考点	数列小题	错位相减	裂项相消	分奇偶与分组	其他
2011	4 (理), 11 (文)				20 (理), 20 (文)
2012					18 (理), 18 (文)
2013					19 (理), 19 (文)
2014	11 (理), 5 (文)				19 (理), 20 (文)
2015		18 (理), 18 (文)			
2016	5 (理)		18 (理)	18 (文)	
2017					18 (理), 18 (文)
2018			18 (理)		18 (文)
2019				19 (理), 18 (文)	
2020				19	

2. 知识梳理



一、数列选填小题

1. 真题分析

1 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列，公比为 q ，则“ $q < 0$ ”是“对任意的正整数 n ， $a_{2n-1} + a_{2n} < 0$ ”的（ ）。

- A. 充要条件
B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 $a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-1}(1+q) = a_1 q^{2n-2}(1+q) < 0$

$$\Leftrightarrow q < -1 \Rightarrow q < 0,$$

故必要性成立；

而 $q < 0 \nRightarrow q < -1$ ，故充分性不成立。

故选C。

2 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 ，公差为 -1 的等差数列， S_n 为其前 n 项和。若 S_1, S_2, S_4 成等比数列，则 a_1 的值为_____。

答案 $-\frac{1}{2}$

解析 依题意得 $S_2^2 = S_1 S_4$ ，所以 $(2a_1 - 1)^2 = a_1(4a_1 - 6)$ ，解得 $a_1 = -\frac{1}{2}$ 。

2. 思路总结

- 1、考查等差等比数列的基础概念和基础性质
- 2、与逻辑、不等式等内容结合

3. 模拟演练

3 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 ，公差为 -1 的等差数列， S_n 为其前 n 项和，若 S_1, S_2, S_4 成等比数列，则 $a_1 =$ ()。

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

答案 D

解析 方法一： $\because S_2^2 = S_1 S_4 \therefore (a_1 + a_1 - 1)^2 = a_1(4a_1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3) \therefore a_1 = -\frac{1}{2}$ ，故选D。

方法二： $\because \{a_n\}$ 是首项为 a_1 ，公差为 -1 的等差数列， S_n 为其前 n 项和，

$$\therefore S_1 = a_1, S_2 = 2a_1 - 1, S_4 = 4a_1 - 6,$$

由 S_1, S_2, S_4 成等比数列，得： $S_2^2 = S_1 \cdot S_4$ ，

$$\text{即 } (2a_1 - 1)^2 = a_1(4a_1 - 6), \text{ 解得： } a_1 = -\frac{1}{2}.$$

故选D。

4 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为1，公差不为0。若 a_2, a_3, a_6 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 前6项的和为 ()。

- A. -24 B. -3 C. 3 D. 8

答案 A

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则由若 a_2, a_3, a_6 成等比数列得 $a_3^2 = a_2 \cdot a_6$,

即 $(1+2d)^2 = (1+d) \cdot (1+5d)$,

解得 $d = 0$ (舍去) 或 $d = -2$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的前6项和 $S_6 = 6 \times 1 + \frac{6 \times 5}{2} \times (-2) = -24$.

故选A.

5 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 3a_3$, 则公比 $q = ()$.

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1或 $-\frac{1}{2}$

D. -1或 $\frac{1}{2}$

答案 C

解析 $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_3 = 3a_3$,

则 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_3$,

即 $a_1 + a_2 = 2a_3$,

$2q^2 - q - 1 = 0$,

$(2q+1)(q-1) = 0$,

解得 $q = -\frac{1}{2}$ 或 $q = 1$,

$\therefore$ 公比 $q = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

故选C.

6 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 则“ $S_1 + S_5 < 2S_3$ ”是“ $d < 0$ ”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 C

解析 $S_1 + S_5 < 2S_3$,

$$\Leftrightarrow S_3 - a_2 - a_3 + S_3 + a_4 + a_5 < 2S_3 ,$$

$$\Leftrightarrow a_4 + a_5 - a_2 - a_3 < 0 ,$$

$$\Leftrightarrow 4d < 0 \Leftrightarrow d < 0 ,$$

故“ $S_1 + S_5 < 2S_3$ ”是“ $d < 0$ ”的充要条件 .

故选C .

7 已知 $a > 0$, $b > 0$, 并且 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}$ 成等差数列 , 则 $a + 9b$ 的最小值为 () .

A. 16

B. 9

C. 5

D. 4

答案 A

解析 $\because \frac{1}{a}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}$ 成等差数列 ,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 .$$

$$\text{又 } a > 0 , b > 0 , \text{ 则 } a + 9b = (a + 9b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 10 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geqslant 10 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 16 ,$$

当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{9b}{a}$ 时 , 等号成立 .

$\therefore a + 9b$ 的最小值为16 .

故选A .

8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, 且 $a_{n+1} = 4a_n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 () .

A. $2^{2n-1} + 1$

B. $2^{2n-1} - 1$

C. $2^{2n} + 1$

D. $2^{2n} - 1$

答案 D

解析 由 $a_{n+1} = 4a_n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$, 得 $a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$,

$$\therefore a_1 = 3 ,$$

$$\therefore a_1 + 1 = 3 + 1 = 4 \neq 0 ,$$

则数列 $\{a_n + 1\}$ 是以4为首项 , 以4为公比的等比数列 ,

$$\therefore a_n + 1 = 4 + 4^{n-1} = 4^n = 2^{2n} ,$$

$$\text{则 } a_n = 2^{2n} - 1 .$$

故选D.

二、等差等比求通项

1. 真题分析

- 9 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 2a_2 - 2$, $b_3 = 2a_3 + 4$.
求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n + 1$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \cdot 2^n$.

解析 依题意得
$$\begin{cases} 6q = 6 + 2d \\ 6q^2 = 12 + 4d \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} d = 3 \\ q = 2 \end{cases}$$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n + 1$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \cdot 2^n$.

- 10 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 已知 $a_1 = b_1 = 3$, $b_2 = a_3$, $b_3 = 4a_2 + 3$.
求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = 3n$, $b_n = 3^n$.

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 b_n 的公比为 q 依题意,

$$\text{得} \begin{cases} 3q = 3 + 2d \\ 3q^2 = 15 + 4d \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} d = 3 \\ q = 3 \end{cases}$$

$$\text{故} a_n = 3 + 3(n-1) = 3n, b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n,$$

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$.

- 11 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6 = 63$.

求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

答案 $a_n = 2^{n-1}$

解析 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，由已知有 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} = \frac{2}{a_1 q^2}$ ，
解得 $q = 2$ ， $q = -1$ ，
又由 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 63$ ，可知 $q = -1$ （舍去），
所以 $q = 2$ ，即 $\frac{a_1(1-2^6)}{1-2} = 63$ ，解得 $a_1 = 1$ ，
所以 $a_n = 2^{n-1}$ 。

- 12 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，
 $a_3 = a_2 + 2$ ， $a_4 = b_3 + b_5$ ， $a_5 = b_4 + 2b_6$ 。
求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2^{n-1}$ ， $b_n = n$ 。

解析 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q ，
由 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，可得 $q^2 - q - 2 = 0$ ，
 $\because q > 0$ ，可得 $q = 2$ ，故 $a_n = 2^{n-1}$ 。
设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，由 $a_4 = b_3 + b_5$ ，
可得 $b_1 + 3d = 4$ ，由 $a_5 = b_4 + 2b_6$ ，
可得 $3b_1 + 13d = 16$ ，从而 $b_1 = 1$ ， $d = 1$ ， $\therefore b_n = n$ 。
 $\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n$ 。

- 13 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列，且公比大于0，
 $b_2 + b_3 = 12$ ， $b_3 = a_4 - 2a_1$ ， $S_{11} = 11b_4$ 。
求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 3n - 2$ ， $b_n = 2^n$ 。

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

由已知 $b_2 + b_3 = 12$, 得 $b_1(q + q^2) = 12$, 而 $b_1 = 2$, 所以 $q + q^2 = 6$,

又 $q > 0$, 解得 $q = 2$, 所以 $b_n = 2^n$.

由 $b_3 = a_4 - 2a_1$ 可得 $3d - a_1 = 8$, ①

由 $S_{11} = 11b_4$, 可得 $S_{11} = 11a_6 = 11b_4$, 即 $a_1 + 5d = 16$, ②

联立①②解得 $a_1 = 1$, $d = 3$,

所以 $a_n = 3n - 2$.

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$.

2. 思路总结

应用等差、等比数列的基础性质求出公差与公比就能求出等差数列和等比数列.

3. 模拟演练

- 14 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2 , a_4 的等差中项 .
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

答案 $a_n = 2^n$.

解析 $\because a_3 + 2$ 是 a_2 , a_4 的等差中项 ,

$$\therefore 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4 ,$$

$$\text{又} \because a_2 + a_3 + a_4 = 28 ,$$

$$\text{解得} a_3 = 8 ,$$

$$\therefore a_2 + a_4 = 20 ,$$

设数列 $\{a_n\}$ 公比为 q ,

$$\text{则} \frac{8}{q} + 8q = 20 ,$$

$$\text{解得} q = 2 \text{ 或 } q = \frac{1}{2} \text{ (舍)} ,$$

$$\therefore a_n = 2^n .$$

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列，且公比大于0，

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

$$\text{由已知 } b_2 + b_3 = 12 \text{ 得 } b_1(q + q^2) = 12, \text{ 而 } b_1 = 2,$$

$$\text{所以 } q^2 + q - 6 = 0.$$

$$\text{又因为 } q > 0, \text{ 解得 } q = 2,$$

$$\text{所以 } b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{由 } b_3 = a_4 - 2a_1, \text{ 可得 } a_1 + 3d - 2a_1 = 3d - a_1 = 8.$$

$$\text{且 } S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \times 11 = \frac{2a_6}{2} \times 11 = 11a_6 = 11(a_1 + 5d) = 11b_4 = 11 \times 2^4,$$

$$\text{即 } a_1 + 5d = 16, \text{ 联立方程 } \begin{cases} a_1 + 5d = 16 \\ 3d - a_1 = 8 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*),$$

所以， $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

16 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， d 为整数，前 n 项和为 S_n ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，已知 $a_1 = b_1$ ，

$$b_2 = 2, d = q, S_{10} = 100, n \in \mathbf{N}^*.$$

求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}.$

解析 有题意可得 $\begin{cases} 10a_1 + 45d = 100 \\ a_1d = 2 \end{cases},$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 6 \\ d = \frac{2}{9} \end{cases} \text{ (舍去) 或 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}.$$

数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4$ ， $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}$ ， $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}$ 。
求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n ， b_n 。

答案 $a_n = \frac{1}{2^n}$ ， $b_n = n - 1$ 。

解析 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$)，

$$\text{因为 } a_1 = \frac{1}{2}, \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4, \text{ 可得 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a_1 q^2} = \frac{1}{a_1 q} + 4 \end{cases},$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q} - 2 = 0, \text{ 解得 } q = -1 \text{ (舍)} \text{ 或 } q = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 通项公式为 } a_n = \frac{1}{2^n},$$

$$\text{设数列 } \{b_n\} \text{ 的公差为 } d, \text{ 因为 } a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7},$$

$$\text{可得 } \begin{cases} \frac{1}{8} = \frac{1}{2(b_1 + 4d)} \\ \frac{1}{16} = \frac{1}{3b_1 + 16d} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} b_1 + 4d = 4 \\ 3b_1 + 16d = 16 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b_1 = 0 \\ d = 1 \end{cases},$$

$$\text{所以数列 } \{b_n\} \text{ 的通项公式为 } b_n = n - 1.$$

18 设 $\{a_n\}$ 是等比数列， $\{b_n\}$ 是等差数列。已知 $a_4 = 8$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ， $b_1 = a_2$ ， $b_2 + b_6 = a_5$ 。
求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2^{n-1}$ ， $b_n = 2n$ 。

解析 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ， $\{b_n\}$ 的公差为 d ，

$$\text{由 } a_4 = 8, a_3 = a_2 + 2 \text{ 得 } \frac{a_4}{q} = \frac{a_4}{q^2} + 2, \text{ 即 } \frac{8}{q} = \frac{8}{q^2} + 2, \text{ 解得: } q = 2,$$

$$\text{所以 } a_1 = \frac{a_4}{q^3} = 1,$$

$$\text{因此 } a_n = 2^{n-1},$$

$$\text{又 } b_1 = a_2, b_2 + b_6 = a_5,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 + b_6 = 2b_1 + 6d = 2^4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases},$$

$$\text{因此 } b_n = 2n.$$

三、分奇偶求通项

1. 真题分析

- 19 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ (q 为实数, 且 $q \neq 1$), $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $a_4 + a_5$ 成等差数列.
求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式;

答案
$$a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}$$

解析 依题意 $a_3 = q$, $a_4 = 2q$, $a_5 = q^2$.

因为 $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $a_4 + a_5$ 成等差数列, 所以 $a_3 + a_4 = a_2 + a_5$,

所以 $3q = q^2 + 2$, $q = 2$ 或者 $q = 1$ (舍)

当 $n = 2k-1$ ($k \in \mathbf{N}^*$)时, $a_n = a_{2k-1} = 2^{k-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}$;

当 $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$)时, $a_n = a_{2k} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}}$.

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}$.

2. 思路总结

- 1、递推公式中含有 $(-1)^n$, 只能分别讨论 n 为奇数和偶数的情况
- 2、递推公式给出的是间隔两项之间的关系

3. 模拟演练

- 20 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, 且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0$, $n \in \mathbf{N}^*$.
求 a_3 , a_4 , a_5 , a_6 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案

$$a_3 = 3, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = 5, a_6 = \frac{1}{8}, a_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}.$$

解析

由题意得：

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \text{ 且 } [3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0,$$

令 $n = 1$ ，得：

$$2a_3 - 2a_1 - 4 = 0, a_3 = 3,$$

令 $n = 2$ ，得：

$$4a_4 - 2a_2 = 0, a_4 = \frac{1}{4},$$

令 $n = 3$ ，得：

$$2a_5 - 2a_3 - 4 = 0, a_5 = 5,$$

令 $n = 4$ ，得：

$$4a_6 - 2a_4 = 0, a_6 = \frac{1}{8},$$

当 n 为奇数，即 $n = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，有：

$$2a_{n+2} - 2a_n = 4,$$

即 $a_{n+2} - a_n = 2$ ，即相邻两个奇数项差恒为 2，

设奇数项为 a_{2k-1} ，又因为 $a_1 = 1$ ，

$$\therefore a_{2k-1} = a_1 + (k-1) \times 2 = 2k - 1,$$

即 $a_n = n$ 。

当 n 为偶数，即 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，有：

$$4a_{n+2} = 2a_n, \text{ 即 } a_{n+2} = \frac{1}{2}a_n,$$

设偶数项为 a_{2k} ，且 $a_2 = \frac{1}{2}$ ，

$$a_{2k} = a_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

$$\text{即 } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为： } a_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}.$$

21

已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1, a_2 = 3$ ，且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1, n \in \mathbf{N}^*$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

答案

$$a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶} \\ n, & n \text{ 为奇} \end{cases}.$$

解析

①当 n 为偶数时, $a_{n+2} = 3a_n$.

$$\text{即 } q^2 = 3.$$

$$q = 3^{\frac{1}{2}}.$$

$$a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 3^{\frac{n}{2}}.$$

②当 n 为奇数时 $a_{n+2} = a_n + 2$.

$$\text{即 } 2d = 2.$$

$$d = 1.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = n.$$

$$\text{综上: } a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶} \\ n, & n \text{ 为奇} \end{cases}.$$

22 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项为1的等差数列, 偶数项是首项为2的等比数列. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和

为 S_n , 且满足 $S_3 = a_4$, $a_3 + a_5 = 2 + a_4$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案

$$a_n = \begin{cases} n, & n = 2k-1 \\ 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1}, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$$

解析

设等差数列的公差为 d , 等比数列的公比为 q ,

$$\text{则 } a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1 + d, a_4 = 2q, a_5 = 1 + 2d,$$

$$\therefore S_3 = a_4,$$

$$\therefore 1 + 2 + (1 + d) = 2q, \text{ 即 } 4 + d = 2q,$$

$$\text{又 } a_3 + a_5 = 2 + a_4,$$

$$\therefore 1 + d + 1 + 2d = 2 + 2q,$$

$$\text{即 } 3d = 2q,$$

$$\text{解得 } d = 2, q = 3,$$

$$\therefore \text{对于 } k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{有 } a_{2k-1} = 1 + (k-1) \cdot 2 = 2k-1,$$

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} n, & n = 2k-1 \\ 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1}, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$$

23 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_3 = a_1 + a_2$ ， $b_4 = b_2 \cdot b_3$ ， $a_8 = b_4$

$$b_5 = a_{16} . \text{ 数列 } \{c_n\} \text{ 满足 } c_n = \begin{cases} b_{2m-1}, n = 3m - 2 \\ b_{2m}, n = 3m - 1 \\ a_m, n = 3m \end{cases}, \text{ 其中 } m \in \mathbf{N}^* .$$

求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

答案 $a_n = n$, $b_n = 2^{n-1}$.

解析 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，数列 $\{b_n\}$ 公比为 q ，

$$a_3 = a_1 + a_1 \Rightarrow a_1 + 2d = a_1 + a_1 + d \Rightarrow a_1 = d ,$$

$$b_4 = b_2 \cdot b_3 \Rightarrow b_1 q^3 = b_1 q \cdot b_1 q^2 \Rightarrow b_1 = 1 ,$$

$$a_8 = b_4 \Rightarrow a_1 + 7d = q^3 \Rightarrow 8d = q^3 , b_5 = a_{16} \Rightarrow q^4 = a_1 + 15d \Rightarrow q^4 = 16d ,$$

$$\therefore q = 2 , d = 1 , \text{ 因此 } a_n = n , b_n = 2^{n-1} .$$

四、已知项与和

1. 真题分析

24 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 为其前 n 项和，且 $a_5 = 3a_2$ ， $S_7 = 14a_2 + 7$ ，数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n ，且满足 $3b_n = 2T_n + 3$ ， $n \in \mathbf{N}^*$.

求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

答案 $a_n = 2n - 1$; $b_n = 3^n$.

解析 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，且 $a_5 = 3a_2$ ， $S_7 = 14a_2 + 7$ ，

$$\text{可得 } a_1 + 4d = 3(a_1 + d) , 7a_1 + 21d = 14(a_1 + d) + 7 ,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1 , d = 2 ,$$

$$\text{则 } a_n = 2n - 1 ;$$

$$\text{对于数列 } \{b_n\} , \text{ 当 } n = 1 \text{ 时 } , T_1 = b_1 , 3b_1 = 2b_1 + 3 , b_1 = 3 .$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时 } , 3b_{n-1} = 2T_{n-1} + 3 \text{ ① } , \text{ 又 } 3b_n = 2T_n + 3 \text{ ② } ,$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1} \text{ 得: } 3b_n - 3b_{n-1} = 2(T_n - T_{n-1}) = 2b_n,$$

$$\therefore b_n = 3b_{n-1},$$

故 b_n 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列,

$$\therefore b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n.$$

2. 思路总结

高考中多是考查 $S_n = f(a_n)$ 的题型, 消元法令 $S_n - S_{n-1}$, 可以得到递推公式求出 a_n , 注意检验 $n=1$ 是否符合公式.

3. 模拟演练

25 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = n, n \in \mathbf{N}^*.$$

解析

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意可知 $2a_4 = 2a_5 + 4a_6$, 即 $a_4 = a_4q + 2a_4q^2$,

由 $a_n > 0$, 则 $2q^2 + q - 1 = 0$, 解得: $q = \frac{1}{2}$, 或 $q = -1$ (舍去),

$$a_4 = 4a_3^2 = 4a_2a_4, \text{ 则 } a_2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{等比数列 } \{a_n\} \text{ 通项公式 } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+1)b_n}{2} - \frac{nb_{n-1}}{2},$$

$$\text{整理得: } \frac{b_n}{n} = \frac{b_{n-1}}{n-1},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{b_1}{1} = 1$ 的常数列,

$$\text{则 } \frac{b_n}{n} = 1, \text{ 则 } b_n = n, n \in \mathbf{N}^*,$$

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = n, n \in \mathbf{N}^*.$

26 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$ 。

解析 由题，得

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$ ，得 $a_1 = 1$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - 2a_{n-1} + 1$ ，

整理，得 $a_n = 2a_{n-1}$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项，2为公比的等比数列，

$\therefore a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$ 。

27 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3(a_n - 2) (n \in \mathbf{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 是公差为0的等差数列，

且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$ ， b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项。

求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

答案 $a_n = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$ ； $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

解析 因为 $2S_n = 3(a_n - 2) (n \in \mathbf{N}^*)$ ①，

当 $n = 1$ 时， $2S_1 = 2a_1 = 3(a_1 - 2)$ ，

即 $2a_1 = 3a_1 - 6$ ，

即 $-a_1 = -6$ ，

解得 $a_1 = 6$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $2S_{n-1} = 3(a_{n-1} - 2)$ ②，

由①-②可得 $2S_n - 2S_{n-1} = 3(a_n - 2) - 3(a_{n-1} - 2)$ ，

即 $2a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$ ，

即 $a_n = 3a_{n-1}$ ，

因为 $a_1 = 6 \neq 0$ ，

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以6为首项，3为公比的等比数列，

所以 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

因为数列 $\{b_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列,

设公差为 d ,

则 $d \neq 0$,

又因为 $b_1 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6} \times 6 = 1$,

即 $b_1 = 1$,

又因为 b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项,

所以 $b_5^2 = b_2 \cdot b_{14}$,

即 $(b_1 + 4d)^2 = (b_1 + d)(b_1 + 13d)$,

即 $(1 + 4d)^2 = (1 + d)(1 + 13d)$,

即 $1 + 16d^2 + 8d = 1 + 14d + 13d^2$,

即 $3d^2 - 6d = 0$,

即 $d(d - 2) = 0$,

解得 $d = 0$ 或 $d = 2$,

又因为公差 d 不为 0,

所以 $d = 2$,

所以 $b_n = b_1 + (n - 1)d = 1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

综上所述: 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

28 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$, $a_2 = 1$, a_3 , a_7 , 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 3 项.

求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = n + 1$, $b_n = 2^n$.

解析 由题, 当 $n = 1$ 时, $a_2^2 = 2S_1 + 5$, 即 $a_2^2 = 2a_1 + 5$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4 \cdots \textcircled{1}$, $a_n^2 = 2S_{n-1} + n + 3 \cdots \textcircled{2}$,

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2a_n + 1$, 整理得 $a_{n+1}^2 = (a_n + 1)^2$,

又因为各项均为正数的数列 $\{a_n\}$,

故 $a_{n+1} = a_n + 1$, $\{a_n\}$ 是从第二项的等差数列, 公差为1,

又 $a_2 - 1$, a_3 , a_7 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项,

$$\text{故 } a_3^2 = (a_2 - 1)a_7 \Rightarrow (a_2 + 1)^2 = (a_2 - 1)(a_2 + 5),$$

解得 $a_2 = 3$,

$$\text{又 } a_2^2 = 2a_1 + 5,$$

$$\text{故 } a_1 = 2,$$

因为 $a_2 - a_1 = 1$ 也成立,

故 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 2$ 为首项, 1为公差的等差数列,

$$\text{故 } a_n = 2 + n - 1 = n + 1,$$

即2, 4, 8恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项,

故 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = 2$ 为首项, 公比为 $\frac{4}{2} = 2$ 的等比数列,

$$\text{故 } b_n = 2^n,$$

综上, $a_n = n + 1$, $b_n = 2^n$.

29 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, 满足 $2S_n = 3(a_n - 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

求证: $\{a_n\}$ 为等比数列, 并写出其通项公式.

答案

$a_n = 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 证明见解析.

解析

由 $2S_n = 3(a_n - 1)$ 可得:

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} = 3(a_{n-1} - 1),$$

$$\text{两式相减可得: } 2S_n - 2S_{n-1} = 3a_n - 3a_{n-1},$$

$$\text{即 } 2a_n = 3a_n - 3a_{n-1},$$

$$a_n = 3a_{n-1} (n \geq 2),$$

$$\text{又 } 2S_1 = 3(a_1 - 1),$$

$$2a_1 = 3a_1 - 3,$$

$$\text{所以 } a_1 = 3 \neq 0,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为首项是3, 公比是3的等比数列,

$$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n (n \in \mathbf{N}^*).$$

五、构造法

1. 真题分析

30 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项。

设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

答案 证明见解析。

解析 由题意，得 $b_n^2 = a_n a_{n+1}$ ，又 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2 = a_{n+1} a_{n+2} - a_n a_{n+1} = 2da_{n+1}$ ，因此

$c_{n+1} - c_n = 2d(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2d^2$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 是等差数列。

2. 思路总结

根据题目提示去构造数列，利用配凑法、降幂变换、倒数变换等构造成等差或者等比数列进行求解。

3. 模拟演练

31 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$ 。

设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $b_n = n$ 。

解析 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$ ，

可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1$ ，

设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ ，数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，公差为1，首项为1，

$$\therefore b_n = n .$$

32 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 2a_{n-1} - 2n + 5$ ($n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 2$) , $a_1 = 1$.

若 $b_n = a_n - 2n + 1$, 求证 : 数列 $\{b_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 是常数列 , 并求 $\{a_n\}$ 的通项 .

答案 见解析 , $a_n = 2n - 1$.

解析 由 $a_n = 2a_{n-1} - 2n + 5$ 知 : $a_n - 2n + 1 = 2[a_{n-1} - 2(n-1) + 1]$, 而 $a_1 = 1$,
于是由 $b_n = a_n - 2n + 1$, 可知 : $b_n = 2b_{n-1}$, 且 $b_1 = 0$,
从而 $b_n = 0$, 故数列 $\{b_n\}$ 是常数列 .
于是 $a_n = 2n - 1$.