

错位相减与分组并项练习题

一、错位相减

1 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $b_1 = a_1 = 1$ ， $b_3 = a_3 + 1$ ，

$$b_5 = a_5 - 7.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 A_n .

2 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ ，满足 $2S_n = 3(a_n - 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证： $\{a_n\}$ 为等比数列，并写出其通项公式.

(2) 设 $b_n = (2n - 1)a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

3 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $2a_2 = a_4 - a_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 1 + 2\log_2 a_n$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 令 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

4 已知公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$, 首项 $a_1 = 3$, 前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $S_3 + a_3$, $S_5 + a_5$, $S_4 + a_4$ 成等差数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $b_n = \frac{na_n}{6}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$).

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = a_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $a_3 + a_4 = 12$ ．数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，且 $b_1 = a_2$ ， $b_2 = S_3$ ．

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式．
- (2) 设 $c_n = (-1)^n a_n \cdot b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ．

6 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， d 为整数，前 n 项和为 S_n ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，已知 $a_1 = b_1$ ， $b_2 = 2$ ， $d = q$ ， $S_{10} = 100$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ．

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式．
- (2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ．

7 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3n^2 + 8n$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_n = b_n + b_{n+1}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ （ q 为实数，且 $q \neq 1$ ）， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $a_2 + a_3$ ，

$a_3 + a_4$ ， $a_4 + a_5$ 成等差数列。

(1) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n-1}}{a_{2n}}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

二、分组求和

9 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列．已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式．

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1) \cdot (a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 的值．

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, & n \neq 2^k \\ b_n (\log_2 b_n + 1), & n = 2^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ ，求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$)．

10 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $(n+2)a_n = (n+1)a_{n+1} - 2(n^2 + 3n + 2)$, 设 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$.

(1) 求 b_1 , b_2 , b_3 的值 .

(2) 证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列 .

(3) 设 $\frac{c_n}{b_n} = 2^n + 1$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

11 已知非单调数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $a_1 = \frac{3}{2}$, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且满足 $S_3 + a_3$, $S_5 + a_5$, $S_4 + a_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和前 n 项和 S_n .

(2) $b_n = (-1)^n n^2 S_n + \frac{n^2 + n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

12 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，且点 $P(a_n, a_{n+1})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 在直线 $y = x + 2$ 上，数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 3$ ， $b_{n+1} = 3b_n$ 。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设数列 $\{a_n \cdot (b_n - (-1)^n)\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 。