

错位相减与分组并项

1. 知识梳理



一、错位相减

1. 真题分析

1 设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于0，已知 $a_1 = b_1 = 3$ ， $b_2 = a_3$ ， $b_3 = 4a_2 + 3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

2 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列，且公比大于0，

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和($n \in \mathbf{N}^*$).

3 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ (q 为实数，且 $q \neq 1$)， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，且 $a_2 + a_3$ ，

$$a_3 + a_4, a_4 + a_5 \text{ 成等差数列.}$$

- (1) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

4 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = b_1 = 1$ ， $b_2 + b_3 = 2a_3$ ，
 $a_5 - 3b_2 = 7$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设 $c_n = a_n b_n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 .

2. 思路总结

如果数列的通项是一个等差数列的通项与一个等比数列通项相乘或相除构成,常选用错位相减法
(也就是等比数列前 n 项和公式的推导方法);

- ①如果是等差与等比相乘,可以求和公式左右同乘以等比数列的公比,再错位相减得结论;
- ②如果是等差除以等比数列类型,可以在求和等式左右同乘以公比的倒数,两式再错位相减得结论;
- ③在消项时一定注意错位相消,明白消去了哪些部分,留下的部分是什么数列,怎么利用等差数列与等比数列求和公式分组求和;
- ④求和时注意正负号不要丢了,也不要弄错.

3. 模拟演练

5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_2 = \frac{1}{2}$ ，且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

- (1) 求 a_3 ， a_4 ， a_5 ， a_6 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设 $b_n = a_{2n-1} \cdot a_{2n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

6 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 为其前 n 项和，且 $a_5 = 3a_2$ ， $S_7 = 14a_2 + 7$ ，数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n ，且满足 $3b_n = 2T_n + 3$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 R_n ，求 R_n 。

7 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比 $q > 1$ ，且 $a_2 + 1$ 为 a_1 ， a_3 的等差中项， $S_3 = 14$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $b_n = a_n \cdot \log_2 a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

8 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 2$ 且 $4S_n = a_n \cdot a_{n+1}$, ($n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = \frac{1}{4}$, 且

$$b_{n+1} = \frac{nb_n}{(n+1) - b_n} (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n + 1}{3^{\frac{1}{3b_n} + \frac{2}{3}}}$. 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

9 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n + \frac{a_n + 1}{2^n} = \lambda$ (λ 为常数). 令 $c_n = b_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n .

二、分组求和

1. 真题分析

10 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6 = 63$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和.

2. 思路总结

一类数列,既不是等差数列,也不是等比数列,若将这类数列适当拆开,可分为几个等差、等比或常见的数列,然后分别求和,再将其合并即可;若一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成,则求和时可用分组转化法,分别求和而后相加减.

常见类型与方法:

- ① $a_n = kn + b$, 利用等差数列前 n 项和公式直接求解;
- ② $a_n = a \cdot q^n - n$, 利用等比数列前 n 项和公式与等差数列前 n 项和公式直接求解;
- ③ $a_n = b_n + c_n$, 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是等比数列或等差数列;

在做题时要注意观察通项公式,若无通项公式要先求出通项公式,然后再进行分组求和.

3. 模拟练习

11 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n - 2)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 是公差为0的等差数列, 且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$, b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}}$;

(3) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}^*)$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$.

12 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于0，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n .

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), n = 2^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ ，求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$.

13 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 2$ ， $S_5 = 30$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n = 2^n - 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n ，求 M_n 。

(3) 设 $d_n = (-1)^n (a_n b_n + \ln S_n)$ ，求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和。

14 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 2a_2 - 2$, $b_3 = 2a_3 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1} \\ b_k, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式.

② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

15 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，且点 $P(a_n, a_{n+1})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 在直线 $y = x + 2$ 上，数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 3$ ， $b_{n+1} = 3b_n$ 。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设数列 $\{a_n \cdot (b_n - (-1)^n)\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 。