

裂项相消

1. 知识梳理



一、等差型

1. 真题分析

1 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项。

(1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

(2) 设 $a_1 = d$ ， $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$ 。

2. 思路总结

如果数列的通项可分裂成“两项差”的形式,且相邻项分裂后相关联,那么常选用裂项相消法求和.把

数列的通项拆成两项之差、正负相消剩下首尾若干项,如下:

$$\textcircled{1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right];$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{a-b} (\sqrt{a} - \sqrt{b}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n});$$

3. 模拟演练

- 2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n - 2) (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为0的等差数列, 且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$, b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}}$;

(3) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

3 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 ($n \in \mathbf{N}^*$) , $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列 .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 , 记 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n}$, 证明 :

$$1 \leq T_n \leq 2 .$$

4 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \dots + (2n-1)a_n = 2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和 .

二、综合型

1. 真题分析

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_n + 4n - 7$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 证明：数列 $\{a_n - 2\}$ 是等比数列。

(2) 若 $b_n = \frac{a_n - 2}{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

2. 思路总结

$$\textcircled{1} \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}, \quad \frac{3^n}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right);$$

$$\textcircled{2} \frac{\frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = 2 \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right);$$

$$\textcircled{3} (-1)^n \frac{4n}{4n^2 - 1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{2n + 1} \right);$$

$$\textcircled{4} \frac{(2n - 1) \cdot 3^n}{n(n + 1)} = \frac{3^{n+1}}{n + 1} - \frac{3^n}{n};$$

$$\textcircled{5} \text{若 } \{a_n\} \text{ 是公差为 } d \text{ 的等差数列, 则 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right);$$

⑥在裂项相消时,注意消去了哪些项剩余的正项数与负项数是一样的,注意数学思想在解决数列问题时的应用;

3. 模拟演练

6 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}} a_n, \quad n \in \mathbf{N}^*,$ 求证: $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{1}{3}.$

7 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于0，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n .

8 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，且 $a_1 + a_4 = 9$ ， $a_2 a_3 = 8$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

9 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ， $a_2 = 1$ ， a_3 ， a_7 ，恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式．

(2) 求数列 $\left\{\frac{nb_n}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ；若对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 均满足 $T_n > \frac{m}{2020}$ ，求整数 m 的最大值．

10 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 2$ ， $S_5 = 30$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n = 2^n - 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n ，求 M_n 。

11 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4, a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n ， b_n 。

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$)。

① 求 T_n 。

② 证明： $\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1}) b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} < \frac{1}{2}$ 。

12 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^n a_n$ 。

(1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求满足 $T_n < \frac{124}{63} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的 n 的最大值。

13 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_1 = 8$ ，设 $b_n = a_n - 2$ 。

(1) 证明： $\{b_n\}$ 是等比数列。

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$ ，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $\lambda \geq T_n$ 恒成立，求 λ 的取值范围。

14 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .