

分奇偶、最值与不等式

1. 知识梳理



一、分奇偶求和

1. 真题分析

1 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列， $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_5 = 5(a_4 - a_3)$ ， $b_5 = 4(b_4 - b_3)$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求证： $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)。

(3) 对任意的正整数 n ，设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和。

2. 思路总结

分奇偶求和模型：

$$a_n = \begin{cases} f(n) \\ g(n) \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*,$$

【注意】(1)所求和为 S_n 或 S_{2n} ；

(2)奇偶项的项数问题；

(3)最后需写综上 $S_n = \begin{cases} S'_n, & n \text{ 为奇数} \\ S''_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

3. 模拟演练

2 设 $\{a_n\}$ 是等比数列， $\{b_n\}$ 是等差数列．已知 $a_4 = 8$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ， $b_1 = a_2$ ， $b_2 + b_6 = a_5$ ．

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式．

(2) 设 $c_n = \begin{cases} a_{2m-1}b_{2m-1}, & n = 2m-1 \\ b_{2m} + 1, & n = 2m \end{cases}$ ，其中 $m \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和．

3 已知非单调数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $a_1 = \frac{3}{2}$, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且满足 $S_3 + a_3$, $S_5 + a_5$, $S_4 + a_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和前 n 项和 S_n .

(2) $b_n = (-1)^n n^2 S_n + \frac{n^2 + n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

4 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，且点 $P(a_n, a_{n+1})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 在直线 $y = x + 2$ 上，数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 3$ ， $b_{n+1} = 3b_n$ 。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设数列 $\{a_n \cdot (b_n - (-1)^n)\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 。

二、最值取值范围

1. 真题分析

5 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$) . $\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为

T_n ($n \in \mathbf{N}^*$) . 已知 $b_1 = 1, b_3 = b_2 + 2, b_4 = a_3 + a_5, b_5 = a_4 + 2a_6$.

(1) 求 S_n 和 T_n .

(2) 若 $S_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = a_n + 4b_n$, 求正整数 n 的值 .

6 已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $s_3 + a_3, s_5 + a_5, s_4 + a_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $T_n = S_n - \frac{1}{S_n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{T_n\}$ 的最大项的值与最小项的值.

2. 思路总结

数列不等式最值, 一般有两种情况:

(1) 一种: 直接求出数列和的表示式, 然后求出最大值或最小值, 与要求的含参函数比较, 解不等式, 如 $T_n < \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda$, 求 λ 的取值范围, 或 λ 最小正整数;

(2) 第二种: 数列是一个特殊的函数, 在求最值时, 又表现出它的特殊性, 故常用的方法有函数、数形结合, 基本不等式, 单调性等. 用函数方法比较容易求出函数的表达式, 再利用函数的方法性质求出数列的最值;

(3) 在数列中用单调性可分为单调增函数、单调减函数、非单调函数:

①若数列非高次可用作差法, $a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 单调递增; $a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 单调递减;

若数列用作商方便, 可以作商法判断单调性;

②判断数列的单调性需要利用对应函数的单调性

③判断非单调数列尤其是转折点时需要看 $a_{n+1} - a_n$ 的正负判断增减

④通项公式中有 $(-1)^n$ 时, 分奇偶分别讨论单调性和最值

(4) 通项公式法, 也叫邻项变号法, 其实质是找数列正负转折项, 如等差数列, $a_n \geq 0$ 且 $a_{n+1} \leq 0$, 则此时 S_n 有最大值, 若 $a_n \leq 0$ 且 $a_{n+1} \geq 0$, 则此时 S_n 有最小值.

3. 模拟演练

7 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ ， $a_2 = 1$ ， a_3 ， a_7 ，恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前3项．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式．

(2) 求数列 $\left\{\frac{nb_n}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ；若对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 均满足 $T_n > \frac{m}{2020}$ ，求整数 m 的最大值．

(3) 是否存在数列 $\{c_n\}$ ，满足等式 $\sum_{i=1}^n (a_i - 1)c_{n+1-i} = 2^{n+1} - n - 2$ 成立，若存在，求出数列 $\{c_n\}$ 的通项公式；若不存在，请说明理由．

8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 2a_{n-1} - 2n + 5$ ($n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 2$) , $a_1 = 1$.

- (1) 若 $b_n = a_n - 2n + 1$, 求证 : 数列 $\{b_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 是常数列 , 并求 $\{a_n\}$ 的通项 .
- (2) 若 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 又 $c_n = (-1)^n S_n$, 且 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n > tn^2$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 时恒成立 , 求实数 t 的取值范围 .

9 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为0的等差数列 , $a_1 = \frac{3}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列 , 且 $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_3$,

$b_3 = a^4$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

- (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设 $c_n = \begin{cases} b_n, n \leq 5 \\ 8a_n, n \geq 6 \end{cases}$, ($n \in \mathbf{N}^*$) . 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (3) 若 $A \leq S_n - \frac{1}{S_n} \leq B$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立 , 求 $B - A$ 的最小值 .

10 设各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 10$, $a_3 + a_5 = 40$, $b_n = \log_2 a_n$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + \frac{b_n}{a_n}$, 求证: $c_n < 3$.

(3) 是否存在正整数 k , 使得 $\frac{1}{b_n+1} + \frac{1}{b_n+2} + \cdots + \frac{1}{b_n+n} > \frac{k}{10}$ 对任意正整数 n 均成立?

若存在, 求出 k 的最大值, 若不存在, 说明理由.

三、不等式证明

1. 真题分析

11 已知 q 和 n 均为给定的大于1的自然数，设集合 $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ ，集合

$$A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\},$$

(1) 当 $q = 2, n = 3$ 时，用列举法表示集合 A 。

(2) 设 $s, t \in A, s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}, t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$ ，其中

$$a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n,$$

证明：若 $a_n < b_n$ ，则 $s < t$ 。

12 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d ，对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ， b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项。

- (1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；
- (2) 设 $a_1 = d$ ， $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$ 。

2. 思路总结

证数列不等式，因其思维跨度大、构造性强，需要有较高的放缩技巧而充满思考性和挑战性，能全面而综合地考查学生的潜能与后继学习能力，通过多角度观察通项的结构，剖析特征，抓住其规律放缩；主要有以下几种：

(1) 裂项放缩：① $\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2 - 1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

② $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} < \frac{5}{2}$

③ $\frac{1}{2^n(2^n - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^n}$

④ $\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

⑤ $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

⑥ $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}} + \sqrt{n-\frac{1}{2}}}$

(2) 函数放缩

常见的有 $\ln x \leq x - 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$

证明 $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln 3^n}{3^n} < 3^n - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right)$

如 $\ln x < x$, $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ 也是常用的函数放缩形式。

(3) 分式放缩

常用不等式： $\frac{b}{a} > \frac{b+m}{b+m}$ ($b > a > 0, m > 0$) 和 $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$ ($a > b > 0, m > 0$)

如 $(1+1)(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5}) \cdots (1+\frac{1}{2n-1}) > \sqrt{2n-1}$

利用第一个性质得 $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} (2n+1)$

$\Rightarrow (\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}) > 2n+1$ 即不等式成立.

3. 模拟演练

13 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 ($n \in \mathbf{N}^*$) , $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列 .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 , 记 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n}$, 证明 :

$1 \leq T_n \leq 2$.

14 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{1}{3}$.

15 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{1}{3}$.

(3) 设 $R_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, T_n = a_1b_1 - a_2b_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_nb_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求

$$R_{2n} + 3T_{2n-1}.$$

16 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4, a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}, a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n ， b_n 。

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$)。

① 求 T_n 。

② 证明： $\sum_{i=1}^n \frac{(T_{i+1} - b_{i+1}) b_{i+3}}{b_{i+1} \cdot b_{i+2}} < \frac{1}{2}$ 。

17 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

18 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比大于1的等比数列 $(n \in \mathbf{N}^*)$, $a_2 = 4$, 且 $1 + a_2$ 是 a_1 与 a_3 的等差中项 .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 , 记 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n}$, 证明 :

$$1 \leq T_n < 2 .$$