

分奇偶、最值与不等式练习题

一、分奇偶

1 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $b_1 = a_1 = 1$ ， $b_3 = a_3 + 1$ ， $b_5 = a_5 - 7$ 。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 A_n 。
- (3) 设 S_n 为数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和，若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，有 $S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n}$ ，求实数 t 的值。

答案

- (1) $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，
 $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。
- (2) $A_n = (2n - 3) \cdot 2^n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。
- (3) $\frac{2}{3}$ 。

解析

- (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$ ，等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，

且 $a_1 = b_1 = 1$ ，因为 $b_3 = a_3 + 1$ ， $b_5 = a_5 - 7$ ，

则有 $\begin{cases} 1 + 2d = q^2 + 1 \\ 1 + 4d = q^4 - 7 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} d = 2 \\ q = 2 \end{cases}$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为： $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为： $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

- (2) 由(1)可知， $a_n b_n = (2n - 1) \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

则 $A_n = 1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n - 1) \cdot 2^{n-1}$ ，

$2A_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n - 1) \cdot 2^n$ ，

两式相减得：

$$\begin{aligned} A_n &= (2n - 1) \cdot 2^n - 2(2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - 1 \\ &= (2n - 1) \cdot 2^n - 2 \times \frac{2(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - 1 \\ &= (2n - 3) \cdot 2^n + 3, \end{aligned}$$

所以数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和为： $A_n = (2n - 3) \cdot 2^n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

- (3) 由(1)可知， $a_n^2 = (2^{n-1})^2 = 4^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

$$\text{则 } S_n = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n-1}{3} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{由 } S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n} \text{ 得: } \frac{4^n-1}{3} + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{2n-1},$$

$$\text{化简得: } t = \frac{4^n}{3 \times 2^{2n-1}} = \frac{2}{3},$$

则实数 t 的值为 $\frac{2}{3}$.

2 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项为 1 的等差数列，偶数项是首项为 2 的等比数列．数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_3 = a_4$ ， $a_3 + a_5 = 2 + a_4$ ．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中，是否存在连续的三项 a_m, a_{m+1}, a_{m+2} ，按原来的顺序成等差数列？若存在，求出所有满足条件的正整数 m 的值；若不存在，说明理由．

答案

(1) $a_n = \begin{cases} n, n = 2k-1 \\ 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1}, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$

(2) 存在， m 的值为 1．

解析

(1) 设等差数列的公差为 d ，等比数列的公比为 q ，

$$\text{则 } a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1 + d, a_4 = 2q, a_5 = 1 + 2d,$$

$$\because S_3 = a_4,$$

$$\therefore 1 + 2 + (1 + d) = 2q, \text{ 即 } 4 + d = 2q,$$

$$\text{又 } a_3 + a_5 = 2 + a_4,$$

$$\therefore 1 + d + 1 + 2d = 2 + 2q,$$

$$\text{即 } 3d = 2q,$$

$$\text{解得 } d = 2, q = 3,$$

$$\therefore \text{对于 } k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{有 } a_{2k-1} = 1 + (k-1) \cdot 2 = 2k-1,$$

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} n, n = 2k-1 \\ 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1}, n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$$

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中，仅存在连续的三项 a_1, a_2, a_3 ，

按原来的顺序成等差数列，此时正整数 m 的值为 1，

$$\text{若 } a_m = a_{2k},$$

$$\text{则由 } a_m + a_{m+2} = 2a_{m+1} \text{ 得 } 2 \times 3^{k-1} + 2 \times 3^k = 2(2k+1),$$

化简得 $4 \cdot 3^{k-1} = 2k + 1$ ，此式左边为偶数，右边为奇数，不可能成立，

若 $a_m = a_{2k-1}$ ，

则由 $a_m + a_{m+2} = 2a_{m+1}$ ，得 $(2k-1) + (2k+1) = 2 \times 2 \times 3^{k-1}$ ，

化简得 $k = 3^{k-1}$ ，

令 $T_k = \frac{k}{3^{k-1}} (k \in \mathbf{N}^*)$ ，

则 $T_{k+1} - T_k = \frac{k+1}{3^k} - \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1-2k}{3^k} < 0$ ，

因此， $1 = T_1 > T_2 > T_3 > \dots$ ，

故只有 $T_1 = 1$ ，此时 $K = 1$ ， $m = 2 \times 1 - 1 = 1$ ，

综上，在数列 $\{a_n\}$ 中，仅存在连续的三项 a_1, a_2, a_3 ，按原来的顺序成等差数列，此时正整数 m 的值为 1。

二、最值

3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且点 $(n, S_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在函数 $y = 2^{x+1} - 2$ 的图象上。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 0$ ， $b_{n+1} + b_n = a_n$ ，求 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (3) 在第 (2) 问的条件下，若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，不等式 $b_n < \lambda b_{n+1}$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围。

答案

(1) $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(2) 当 n 为偶数时， $b_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}$ ；
当 n 为奇数时， $b_n = \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}$ 。

(3) $(1, +\infty)$ 。

解析

(1) 由题意可知， $S_n = 2^{n+1} - 2$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) = 2^n$ ，

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 2^{1+1} - 2 = 2$ 也满足上式，

所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(2) 方法一：由 (1) 可知 $b_{n+1} + b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，即 $b_{k+1} + b_k = 2^k (k \in \mathbf{N}^*)$ 。

当 $k=1$ 时, $b_2 + b_1 = 2^1$,

当 $k=2$ 时, $b_3 + b_2 = 2^2$, 所以 $-b_3 - b_2 = -2^2$, ②

当 $k=3$ 时, $b_4 + b_3 = 2^3$, ③

当 $k=4$ 时, $b_5 + b_4 = 2^4$, 所以 $-b_5 - b_4 = -2^4$, ④

.....

当 $k=n-1$ 时(n 为偶数), $b_n + b_{n-1} = 2^{n-1}$, 所以 $-b_n - b_{n-1} = -2^{n-1} \dots \dots n-1$,

以上 $n-1$ 个式子相加, 得 $b_n + b_1 = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{n-1}$,

$$= \frac{2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} = \frac{2(1 + 2^{n-1})}{3} = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3},$$

又 $b_1 = 0$,

所以, 当 n 为偶数时, $b_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}$,

同理, 当 n 为奇数时,

$$-b_n + b_1 = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots - 2^{n-1}$$

$$= \frac{2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} = \frac{2 - 2^n}{3},$$

所以, 当 n 为奇数时, $b_n = \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}$.

方法二: 猜测: 当 n 为奇数时,

$$b_n = 2^{n-1} - 2^{n-2} + \dots + 2^2 - 2 = \frac{2^{n-1}(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1})}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3},$$

猜测: 当 n 为偶数时, $b_n = 2^{n-1} - 2^{n-2} + \dots - 2^2 + 2$

$$= \frac{2^{n-1}(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1})}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 可知 } b_n = \begin{cases} \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3} (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3} (n \text{ 为偶数}) \end{cases},$$

$$\text{① 当 } n \text{ 为偶数时, } \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{2^n + 2}{2^{n+1} - 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^{n+1} + 2},$$

所以 $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 随 n 的增大而减小,

从而, 当 n 为偶数时, $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 的最大值是 $\frac{b_2}{b_3} = 1$.

$$\text{② 当 } n \text{ 为奇数时, } \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{2^n - 2}{2^{n+1} + 2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^{n+1} + 2},$$

所以 $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 随 n 的增大而增大, 且 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^{n+1} + 2} < \frac{1}{2} < 1$.

综上, $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 的最大值是 1 .

因此, 若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $b_n < \lambda b_{n+1}$ 恒成立, 只需 $\lambda > 1$,

故实数 λ 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

4 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $2a_2 = a_4 - a_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 1 + 2\log_2 a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 令 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 若 $\lambda > 0$, 且对所有的正整数 n 都有 $2\lambda^2 - k\lambda + 2 > \frac{b_n}{a_n}$ 成立, 求 k 的取值范围 .

答案

(1) $a_n = 2^n$, $b_n = 2n + 1$.

(2) $2^{n+1}(2n - 1) + 2$.

(3) $k < 2$.

解析

(1) $a_1 = 2$, $2a_2 = a_4 - a_3$,

$$\therefore 2a_1 q = a_1 q^3 - a_1 q^2,$$

$$2q = q^3 - q^2,$$

$$q^3 - 2q - q^2 = 0,$$

$$\therefore q \neq 0,$$

$$\therefore q^2 - q - 2 = 0,$$

$$(q - 2)(q + 1) = 0,$$

$$\therefore q = 2 \text{ 或 } q = -1,$$

$\therefore$ 正项等比数列,

$$\therefore q = 2.$$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\therefore b_n = 1 + 2\log_2 a_n = 1 + 2\log_2 2^n = 1 + 2n,$$

$$\therefore b_n = 2n + 1.$$

(2) 令 $c_n = a_n b_n$,

$$\therefore c_n = 2^n \cdot (2n + 1),$$

令 c_n 的前 n 项和为 S_n ,

$$\therefore S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

$$S_n = 2^1 \cdot (2 \times 1 + 1) + 2^2 \cdot (2 \times 2 + 1) + \cdots + 2^n \cdot (2n + 1),$$

$$\textcircled{1} S_n = 2^1 \times 3 + 2^2 \times 5 + 2^3 \times 7 + \cdots + 2^{n-1} \times (2n-1) + 2^n \times (2n+1),$$

$$\textcircled{2} 2S_n = 2^2 \times 3 + 2^3 \times 5 + \cdots + 2^{n-1} \times (2n-3) + 2^n \times (2n-1) + 2^{n+1} \times (2n+1),$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{得} -S_n = 2 \times 3 + 2^2 \times 2 + 2^3 \times 2 + \cdots + 2^{n-1} \times 2 + 2^n \times 2 - 2^{n+1} (2n+1),$$

$$-S_n = 2 \times 3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} - 2^{n+1} (2n+1),$$

$$-S_n = 2 \times 3 + \frac{8 - 2^{n+1} \times 2}{1-2} - 2^{n+1} (2n+1),$$

$$-S_n = 6 + \frac{8 - 2^{n+2}}{-1} - 2^{n+1} (2n+1),$$

$$-S_n = 6 - 8 + 2^{n+2} - 2^{n+2}n - 2^{n+1}, \quad -S_n = 2^{n+2} - 2^{n+2}n - 2^{n+1} - 2,$$

$$-S_n = 2^{n+1} (2 - 2n - 1) - 2,$$

$$-S_n = 2^{n+1} (1 - 2n) - 2,$$

$$S_n = 2^{n+1} (2n - 1) + 2.$$

(3) 若 $\lambda > 0$, 且对所有的正整数 n 都有:

$$2\lambda^2 - k\lambda + 2 > \frac{b_n}{a_n} \text{ 成立,}$$

$$\text{即为 } 2\lambda^2 - k\lambda + 2 > \frac{1+2n}{2^n} \text{ 的最大值,}$$

$$\text{由 } \frac{1+2(n+1)}{2^{n+1}} - \frac{1+2n}{2^n} = \frac{1-2n}{2^{n+1}} < 0,$$

$$\text{可得 } \left\{ \frac{1+2n}{2^n} \right\} \text{ 递减, 可得 } n=1 \text{ 时, 取得最大值 } \frac{3}{2},$$

$$\text{可得 } 2\lambda^2 - k\lambda + 2 > \frac{3}{2}, \text{ 即为 } k < 2\lambda + \frac{1}{2\lambda} \text{ 的最小值,}$$

$$\text{可得 } 2\lambda + \frac{1}{2\lambda} \geq 2\sqrt{2\lambda \cdot \frac{1}{2\lambda}} = 2, \text{ 当且仅当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时取得最小值 } 2,$$

$$\text{则 } k < 2.$$

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^n a_n$.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求满足 $T_n < \frac{124}{63} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的 n 的最大值.

答案

(1) $a_n = \frac{n}{2^n}.$

(2) n 的最大值为 4.

解析

(1) 在 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ 中, 令 $n = 1$,

可得 $S_1 = -a_1 - 1 + 2$, 即 $a_1 = \frac{1}{2}$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = -a_{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2$,

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = -a_n + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$\therefore 2a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 即 $2^n a_n = 2^{n-1} a_{n-1} + 1$.

$\therefore b_n = 2^n a_n$, $\therefore b_n = b_{n-1} + 1$, 即当 $n \geq 2$ 时, $b_n - b_{n-1} = 1$.

又 $b_1 = 2a_1 = 1$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项和公差均为 1 的等差数列.

于是 $b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n = 2^n a_n$, $\therefore a_n = \frac{n}{2^n}$.

(2) $\therefore c_n = \frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})} = \frac{n(n+1)}{2^n\left(n-\frac{n}{2^n}\right)\left(n+1-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)}$

$= \frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{2}{2^n-1} - \frac{2}{2^{n+1}-1}$,

$\therefore T_n = \left(\frac{2}{2^1-1} - \frac{2}{2^2-1}\right) + \left(\frac{2}{2^2-1} - \frac{2}{2^3-1}\right) + \dots$

$+ \left(\frac{2}{2^{n-1}-1} - \frac{2}{2^n-1}\right) + \left(\frac{2}{2^n-1} - \frac{2}{2^{n+1}-1}\right)$

$= \frac{2}{2^1-1} - \frac{2}{2^{n+1}-1} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}-1}$.

由 $T_n < \frac{124}{63}$, 得 $2 - \frac{2}{2^{n+1}-1} < \frac{124}{63}$, 即 $\frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{1}{63}$,

$\therefore 2^{n+1} < 64$, 即 $n < 5$,

$\therefore n$ 的最大值为 4.

6

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 8$, 设 $b_n = a_n - 2$.

(1) 证明: $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \geq T_n$ 恒成立, 求 λ 的取值范围.

答案

(1) 证明建见解析.

(2) $\lambda \geq -\frac{2}{9}$.

解析

(1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 8$,

当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$, $S_{n-1} = a_n + 2n - 10$,

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 2,$$

即 $a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$, 即 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 (n \geq 2)$,

$$\text{又} \because \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 - 2}{a_1 - 2} = 2,$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 6$, 公比为 2 的等比数列.

(2) 由 (1) 知 $a_n - 2 = 6 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_n = 3 \cdot 2^n + 2$,

$$\text{所以 } c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)} = (-1)^n \frac{3 \cdot 2^n + 2}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$$

$$= (-1)^n \left[\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right],$$

$$T_n = - \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} \right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} \right) - \left(\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^4+1} \right) +$$

$$\cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+1}+1} \right),$$

$$\therefore T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}+1},$$

当 n 为偶数时,

$$\therefore T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}+1} \text{ 是递减的,}$$

此时当 $n = 2$ 时, T_n 取最大值 $-\frac{2}{9}$, 则 $\lambda \geq -\frac{2}{9}$,

当 n 为奇数时,

$$\therefore T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}+1} \text{ 是递增的,}$$

此时 $T_n < -\frac{1}{3}$, 则 $\lambda \geq -\frac{1}{3}$.

综上, λ 的取值范围是 $\lambda \geq -\frac{2}{9}$.

三、不等式证明

7 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $3a_2 - a_1 = 1$, 且 $\frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $b_1 = \frac{1}{2}$, $4b_n = a_{n-1}a_n$, 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n . 证明: $T_n < 1$.

答案

(1) $\frac{2}{n+1}$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $3a_2 - a_1 = 1$, 且 $\frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} (n \geq 2)$,

$$\therefore \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}},$$

$$\text{又 } a_1 = 1, 3a_2 - a_1 = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} = 1, \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2}, \therefore \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1),$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n+1}.$$

(2) 证明: $\because$ 数列 $b_1 = \frac{1}{2}$, $4b_n = a_{n-1}a_n$,

$$\therefore b_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$\therefore$

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

,

故 $T_n < 1$.

8

已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

答案

$$(1) a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶} \\ n, & n \text{ 为奇} \end{cases}.$$

(2) 证明见解析.

解析

(1) ① 当 n 为偶数时, $a_{n+2} = 3a_n$.

$$\text{即 } q^2 = 3.$$

$$q = 3^{\frac{1}{2}}.$$

$$a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 3^{\frac{n}{2}}.$$

② 当 n 为奇数时 $a_{n+2} = a_n + 2$.

$$\text{即 } 2d = 2.$$

$$d = 1.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = n.$$

综上： $a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶} \\ n, n \text{ 为奇} \end{cases}$.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, 则 $b_n = \frac{2n-1}{3^n}$,

$$\text{则 } S_n = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{5}{27} + \cdots + \frac{2n-1}{3^n} \quad ①,$$

$$\text{则有 } \frac{1}{3}S_n = \frac{1}{9} + \frac{3}{27} + \frac{5}{81} + \cdots + \frac{2n-1}{3^{n+1}} \quad ②,$$

$$①-② \text{ 可得: } \frac{2}{3}S_n = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) - \frac{2n-1}{3^{n+1}},$$

$$\text{变形可得: } S_n = 1 - \frac{n+1}{3^n},$$

$$\text{若证明 } S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}, \text{ 则需要证明 } 1 - \frac{n+1}{3^n} \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1},$$

$$\text{即证明 } 3^n \geq 2^n + 1 \quad (n \geq 1),$$

$$\text{即证明 } 3^n - 2^n \geq 1,$$

显然成立,

$$\text{故有 } S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}.$$

9 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} < \frac{4}{3}$.

答案

(1) $a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 由题, 得

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 2a_1 - 1, \text{ 得 } a_1 = 1;$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - 2a_{n-1} + 1,$$

$$\text{整理, 得 } a_n = 2a_{n-1},$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*.$$

(2) 由 (1) 知, $\frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{(2^{n-1})^2} = \frac{1}{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \text{故 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} &= \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{4}{3},
 \end{aligned}$$

故得证.

10 设 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 1$,

$$a_3 + b_2 = 7, S_5 b_2 = 50, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \log_2 b_3 + \cdots + \log_2 b_n$, $T_n = a_{c_n+1} + a_{c_n+2} + a_{c_n+3} + \cdots + a_{c_n+n}$.

① 求 T_n .

② 求证: $\sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{T_i} - i} < 2$.

答案

(1) $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$.

(2) ① $T_n = n^3$.

② 证明见解析.

解析

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{依题意, } S_5 b_2 = 5(1 + 2d)q = 50, a_3 + b_2 = (1 + 2d) + q = 7,$$

$$\text{解得 } d = 2, q = 2 \text{ 或 } d = \frac{1}{2}, q = 5,$$

由于 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等差数列, 所以 $d = 2, q = 2$.

$$\text{从而 } a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}.$$

(2) ① $\because \log_2 b_n = n - 1$,

$$\therefore c_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n(0 + n - 1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2},$$

$$\therefore a_{c_n+i} = 2\left(\frac{n^2 - n}{2} + i\right) - 1 = n^2 - n - 1 + 2i,$$

$$\therefore T_n = n^2 - n - 1 + 2 + n^2 - n - 1 + 4 + \cdots + n^2 - n - 1 + 2n$$

$$= n(n^2 - n - 1) + (2 + 4 + \cdots + 2n)$$

$$= n(n^2 - n - 1) + n(n + 1) = n^3.$$

$$\text{② } \because \frac{1}{\sqrt{T_n} - n} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \right) \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{2}, \\
 &\text{而 } \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{2} < \sqrt{\frac{n+1+n-1}{2}} = \sqrt{n}, \\
 &\therefore \frac{1}{\sqrt{T_n - n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \\
 &\therefore \sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{T_i - i}} < \frac{1}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3-1}} - \frac{1}{\sqrt{3+1}} + \frac{1}{\sqrt{4-1}} - \frac{1}{\sqrt{4+1}} \\
 &\quad + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2.
 \end{aligned}$$