# 分奇偶、最值与不等式

## 1. 知识梳理


## 一、分奇偶求和

### 1. 真题分析

1 已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，$b_5=4(b_4-b_3)$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 记$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

(3) 对任意的正整数$n$，设$c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和．

答案 (1) $a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) 证明见解析．

(3) $\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}-\dfrac{4}{9}$．

解析 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，等比数列$\{b_n\}$的公比为$q$，

由$a_1=1$，$a_5=5(a_4-a_3)$，可得$d=1$，

从而$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$，

由$b_1=1$，$b_5=4(b_4-b_3)$，

又$q\neq 0$，可得$q^2-4q+4=0$，解得$q=2$，

从而$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^{n-1}$．

故答案为：$a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) 由（1）可得$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

故$S_nS_{n+2}=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$，

$S_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$，

从而$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=-\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)<0$，

所以$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$．

(3) 当$n$为奇数时，$c_n=\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}=\dfrac{(3n-2)2^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$，

当$n$为偶数时，$c_n=\dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}=\dfrac{n-1}{2^n}$，

对任意的正整数$n$，有

$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2^{2k}}{2k+1}-\dfrac{2^{2k-2}}{2k-1}\right)=\dfrac{2^{2n}}{2n+1}-1$，

和$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{4^k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{5}{4^3}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-1}{4^n}$，①

由①得$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{3}{4^3}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-3}{4^n}+\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$，②

由①②得$\dfrac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4^2}+\cdots\cdots+\dfrac{2}{4^n}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{4}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)}{1-\dfrac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n-1}{4^{n+1}}$，

从而得$\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{5}{9}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}$，

因此，$\sum\limits_{k=1}^{2n}c_k=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k-1}+\sum\limits_{k=1}^{n}c_{2k}$

$=\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}-\dfrac{4}{9}$，

所以，数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}-\dfrac{4}{9}$．

故答案为：$\dfrac{4^n}{2n+1}-\dfrac{6n+5}{9\times 4^n}-\dfrac{4}{9}$．

## 2. 思路总结

**分奇偶求和模型：**

$a_n=\begin{cases}f(n)\\g(n)\end{cases}$，$n\in N^*$，

【注意】(1)所求和为$S_n$或$S_{2n}$；

(2)奇偶项的项数问题；

(3)最后需写综上$S_n=\begin{cases}S_n' & ，n为奇数\\ S_n'' & ，n为偶数\end{cases}$.

## 3. 模拟演练

2 设$\{a_n\}$是等比数列，$\{b_n\}$是等差数列．已知$a_4=8$，$a_3=a_2+2$，$b_1=a_2$，$b_2+b_6=a_5$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\begin{cases}a_{2m-1}b_{2m-1}, n=2m-1\\ b_{2m}+1, n=2m\end{cases}$，其中$m\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$，$b_n=2n$．

(2) $\left(\frac{2n}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot 2^{2n+1}+2n^2+2n+\frac{10}{9}$．

解析 (1) 设$\{a_n\}$的公比为$q$，$\{b_n\}$的公差为$d$，

由$a_4=8$，$a_3=a_2+2$得$\frac{a_4}{q}=\frac{a_4}{q^2}+2$，即$\frac{8}{q}=\frac{8}{q^2}+2$，解得：$q=2$，

所以$a_1=\frac{a_4}{q^3}=1$，

因此$a_n=2^{n-1}$，

又$b_1=a_2$，$b_2+b_6=a_5$，

所以$\begin{cases}b_1=2\\ b_2+b_6=2b_1+6d=2^4\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b_1=2\\ d=2\end{cases}$，

因此$b_n=2n$．

(2) 因为 $c_n=\begin{cases}a_{2m-1}b_{2m-1}, n=2m-1\\ b_{2m}+1, n=2m\end{cases}$，其中$m\in\mathbf{N}^*$，

当$n$为偶数时，$c_n=b_n+1=2n+1$，

所以$c_2+c_4+\cdots+c_{2n}=\frac{n(3+4n+1)}{2}=2n^2+2n$；

当$n$为奇数时，$c_n=a_nb_n=n\cdot 2^n$，

记$M=c_1+c_3+c_5+\cdots c_{2n-1}=1\cdot 2+3\cdot 2^3+5\cdot 2^5+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{2n-1}$①，

则$4M=1\cdot 2^3+3\cdot 2^5+5\cdot 2^7+\cdots+(2n-1)-2^{2n+1}$②，

①−②得$-3M=2+2\cdot 2^3+2\cdot 2^5+2\cdot 2^7+\cdots+2\cdot 2^{2n-1}-(2n-1)\cdot 2^{2n+1}$

$=2+2^4+2^6+2^8+\cdots 2^{2n}-(2n-1)\cdot 2^{2n-1}$

$$=2+\frac{2^4\left(1-2^{2n-2}\right)}{1-2^2}-(2n-1)\cdot 2^{2n+1}$$
$$=2+\frac{2^4\left(1-2^{2n-2}\right)}{1-2^2}-(2n-1)\cdot 2^{2n+1}=-\frac{10}{3}+\left(\frac{5}{3}-2n\right)\cdot 2^{2n+1},$$
所以$M=\frac{10}{9}+\left(\frac{2n}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot 2^{2n+1}$，

因此数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\left(\frac{2n}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot 2^{2n+1}+2n^2+2n+\frac{10}{9}$．

3 已知非单调数列$\{a_n\}$是公比为$q$的等比数列，$a_1=\frac{3}{2}$，其前$n$项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且满足$S_3+a_3$，$S_5+a_5$，$S_4+a_4$成等差数列．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式和前$n$项和$S_n$．

(2) $b_n=(-1)^n n^2 S_n+\frac{n^2+n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

答案

(1) $a_n=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$．

(2) $$T_n=\begin{cases}\frac{n^2+n+4}{2}-\frac{n+2}{2^n}, n\text{为偶数}\\ -\frac{n^2+n-4}{2}-\frac{n+2}{2^n}, n\text{为奇数}\end{cases}.$$

解析

(1) $\because S_3+a_3$，$S_5+a_5$，$S_4+a_4$成等差数列，

$\therefore 2(S_5+a_5)=(S_3+a_3)+(S_4+a_4)$，

$\therefore a_3=4a_5$，$q^2=\frac{1}{4}$，$q=-\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$．

(2) $b_n=(-1)^n n^2 S_n+\frac{n^2-n}{2^n}$

$=(-1)^n n^2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]+\frac{n^2-n}{2^n}$

$=(-1)^n n^2+\frac{n}{2^n}$，

设$(-1)^n n^2$的前$n$项和为$H_n$，$\frac{n}{2^n}$的前$n$项和为$Q_n$，

①当$n$为偶数时，

$H_n=-1^2+2^2-3^2+4^2+\cdots-(n-1)^2+n^2$

$=1+2+3+4+\cdots+n-1+n=\frac{n^2+n}{2}$，

$Q_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，①

$\frac{1}{2}Q_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，②

①−②得，$\frac{1}{2}Q_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$ .

$\therefore Q_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$ ,

$\therefore T_n=H_n+Q_n=\dfrac{n^2+n}{2}+2-\dfrac{n+2}{2^n}$

$=\dfrac{n^2+n+4}{2}-\dfrac{n+2}{2^n}$ ,

②当$n$为奇数时，

$H_n=\dfrac{(n-1)^2+(n-1)}{2}-n^2=-\dfrac{n^2+n}{2}$ ,

$\therefore Q_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$ ,

$\therefore T_n=H_n+Q_n=-\dfrac{n^2+n}{2}+2-\dfrac{n+2}{2^n}$

$=-\dfrac{n^2+n-4}{2}-\dfrac{n+2}{2^n}$ ,

综合①②，

$$\therefore T_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+n+4}{2}-\dfrac{n+2}{2^n}, n\text{为偶数}\\ -\dfrac{n^2+n-4}{2}-\dfrac{n+2}{2^n}, n\text{为奇数}\end{cases}.$$

4 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，且点$P(a_n,a_{n+1})$（$n\in\mathbf{N}^*$）在直线$y=x+2$上，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$ .

(1) 数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 设数列$\{a_n\cdot(b_n-(-1)^n)\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$ .

答案 (1) $a_n=2n$；$b_n=3^n$ .

(2) $$T_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot 3^{n+1}+n(n\text{为偶数})\\ \dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot 3^{n+1}-n-1(n\text{为奇数})\end{cases}.$$

解析 (1) $\because a_{n+1}=a_n+2$ ,

$\therefore\{a_n\}$是以$a_1=2$为首项，

2为公差的等差数列，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)2=2n$ ,

$\because b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$ ,

$\therefore\{b_n\}$是以$b_1=3$为首项，3为公比的等比数列，

$\therefore b_n=3^n$ .

(2) 由(1)知，

$\therefore a_n\cdot(b_n-(-1)^n)=2n\cdot(3^n-(-1)^n)=2n\cdot3^n-(-1)^n\cdot2n$，

设$\{2n\cdot3^n\}$的前$n$项和为$T_n'$，

$T_n'=2\cdot3^1+4\cdot3^2+6\cdot3^3+\cdots+2(n-1)\cdot3^{n-1}+2n\cdot3^n$，①

$3T_n'=2\cdot3^2+4\cdot3^3+6\cdot3^4+\cdots+2(n-1)\cdot3^n+2n\cdot3^{n+1}$，②

①-②得，$-2T_n'=2\cdot3^1+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+2\cdot3^n-2n\cdot3^{n+1}$，

$-2T_n'=\dfrac{6(1-3^n)}{1-3}-2n\cdot3^{n+1}=-3+(1-2n)\cdot3^{n+1}$，

$T_n'=\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot3^{n+1}$，

设$\{(-1)^n\cdot2n\}$的前$n$项和为$T_n''$，当$n$为偶数时，

$T_n''=-2+4-6+8-\cdots-2(n-1)+2n=2\cdot\dfrac{n}{2}=n$，

当$n$为奇数时，$n+1$为偶数，

$T_n''=T_{n+1}''-2(n+1)=n+1-2n-2=-n-1$，

$\therefore T_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot3^{n+1}+n(n\text{为偶数})\\\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot3^{n+1}-n-1(n\text{为奇数})\end{cases}$．

## 二、最值取值范围

### 1. 真题分析

5 设$\{a_n\}$是等差数列，其前$n$项和为$S_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$．$\{b_n\}$是等比数列，公比大于$0$，其前$n$项和为$T_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$．已知$b_1=1,b_3=b_2+2,b_4=a_3+a_5,b_5=a_4+2a_6$．

(1) 求$S_n$和$T_n$．

(2) 若$S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$，求正整数$n$的值．

答案 (1) $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$T_n=2^n-1$．

(2) $4$．

解析 (1) 设等比数列$\{b_n\}$的公比为$q$．

由$b_1=1,b_3=b_2+2$，

可得$q^2-q-2=0$

因为$q>0$，可得$q=2$，

故$b_n=2^{n+1}$，所以，$T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$．

设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$．

由$b_4=a_3+a_5$,可得$a_1+3d=4$，

由$b_5=a_4+2a_6$，可得$3a_1+13d=16$,

从而$a_1=1$．$d=1$，故$a_n=n$，

所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$．

(2) 由（1），有$T_1+T_2+\cdots+T_n$

$=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n$

$=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$．

由$S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$，

可得$\frac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-n-2=n+2^{n+1}$，

整理得$n^2-3n-4=0$，解得$n=-1$（舍）或$n=4$，

所以，$n$的值为4．

6 已知首项为$\frac{3}{2}$的等比数列$\{a_n\}$不是递减数列，其前$n$项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且$s_3+a_3,s_5+a_5,s_4+a_4$成等差数列.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$T_n=S_n-\frac{1}{S_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{T_n\}$的最大项的值与最小项的值.

答案 (1) 数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2^n}$．

(2) 数列$\{T_n\}$的最大项的值为$\frac{5}{6}$，最小项的值为$-\frac{7}{12}$．

解析 (1) 设等比数列的公比为$q$．

$\because S_3+a_3$，$S_5+a_5$，$S_4+a_4$成等差数列．

$\therefore S_5+a_5-(S_3+a_3)=S_4+a_4-(S_5+a_5)$．

即$4a_5=a_3$．

故$q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$．

又$\because$数列$\{a_n\}$不是递减数列，且等比数列的首项为$\dfrac{3}{2}$．

$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3}{2^n}$．

(2) 由（1）得

$$S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=\begin{cases}1+\frac{1}{2^n},n\text{为奇数}\\1-\frac{1}{2^n},n\text{为偶数}\end{cases}$$

当$n$为奇数时，$S_n$随$n$的增大而减小．

$\therefore 1<S_n\leqslant S_1=\dfrac{3}{2}$．

故$0<S_n-\dfrac{1}{S_n}\leqslant S_1-\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$．

当$n$为偶数时，$S_n$随$n$的增大而增大．

$\therefore 1>S_n\geqslant S_2=\dfrac{3}{4}$．

故$0>S_n-\dfrac{1}{S_n}\geqslant S_2-\dfrac{1}{S_2}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{7}{12}$．

综上，对于$n\in\mathbf{N}^*$，总有$-\dfrac{7}{12}\leqslant S_n-\dfrac{1}{S_n}\leqslant\dfrac{5}{6}$．

故数列$\{T_n\}$的最大项的值为$\dfrac{5}{6}$，最小项的值为$-\dfrac{7}{12}$．

## 2. 思路总结

数列不等式最值,一般有两种情况：

（1）一种：直接求出数列和的表示式,然后求出最大值或最小值,与要求的含参函数比较,解不等式,如$T_n<\lambda^2+\dfrac{2}{3}\lambda$,求$\lambda$的取值范围,或$\lambda$最小正整数;

（2）第两种：数列是一个特殊的函数,在求最值时,又表现出它的特殊性,故常用的方法有函数、数形结合,基本不等式,单调性等.用函数方法比较容易求出函数的表达式,再利用函数的方法性质求出数列的最值;

（3）在数列中用单调性可分为单调增函数、单调减函数、非单调函数：

①若数列非高次可用作差法,$a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow\{a_n\}$单调递增;$a_{n+1}-a_n<0\Rightarrow\{a_n\}$单调递减;

若数列用作商方便,可以作商法判断单调性;

②判断数列的单调性需要利用对应函数的单调性

③判断非单调数列尤其是转折点时需要看$a_{n+1}-a_n$的正负判断增减

④通项公式中有$(-1)^n$时，分奇偶分别讨论单调性和最值

（4）通项公式法,也叫邻项变号法,其实质是找数列正负转折项,如等差数列,$a_n\geqslant 0$且$a_{n+1}\leqslant 0$,则此时$S_n$有最大值,若$a_n\leqslant 0$且$a_{n+1}\geqslant 0$,则此时$S_n$有最小值.

## 3. 模拟演练

7 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，满足$a_{n+1}^2=2S_n+n+4$，$a_2-1$，$a_3$，$a_7$，恰为等比数列$\{b_n\}$的前3项．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 求数列$\left\{\dfrac{nb_n}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$；若对$\forall n\in\mathbf{N}^*$均满足$T_n>\dfrac{m}{2020}$，求整数$m$的最大值．

(3) 是否存在数列$\{c_n\}$，满足等式$\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-1)c_{n+1-i}=2^{n+1}-n-2$成立，若存在，求出数列$\{c_n\}$的通项公式；若不存在，请说明理由．

答案 (1) $a_n=n+1$，$b_n=2^n$．

(2) $673$．

(3) 存在，$c_n=2^{n-1}$．

解析 (1) 由题，当$n=1$时，$a_2^2=2S_1+5$，即$a_2^2=2a_1+5$；

当$n\geqslant 2$时，$a_{n+1}^2=2S_n+n+4\cdots$①，$a_n^2=2S_{n-1}+n+3\cdots$②，

①$\cdots$②得$a_{n+1}^2-a_n^2=2a_n+1$，整理得$a_{n+1}^2=(a_n+1)^2$，

又因为各项均为正数的数列$\{a_n\}$，

故$a_{n+1}=a_n+1$，$\{a_n\}$是从第二项的等差数列，公差为$1$，

又$a_2-1$，$a_3$，$a_7$恰为等比数列$\{b_n\}$的前3项，

故$a_3^2=(a_2-1)a_7\Rightarrow(a_2+1)^2=(a_2-1)(a_2+5)$，

解得$a_2=3$，

又$a_2^2=2a_1+5$，

故$a_1=2$，

因为$a_2-a_1=1$也成立，

故$\{a_n\}$是以$a_1=2$为首项,1为公差的等差数列，

故$a_n=2+n-1=n+1$，

即$2$，$4$，$8$恰为等比数列$\{b_n\}$的前3项，

故$\{b_n\}$是以$b_1=2$为首项，公比为$\frac{4}{2}=2$的等比数列，

故$b_n=2^n$，

综上，$a_n=n+1$，$b_n=2^n$．

(2) $\frac{nb_n}{a_na_{n+1}}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}$，

前$n$项和为$T_n=\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$，$\{T_n\}$单增，所以$T_n$的最小值为$\frac{1}{3}$，

所以$m<\frac{2020}{3}$，所以$m$的最大整数是673．

(3) 过程略$n\geqslant 3$，$c_n=2^{n-1}$，

又$c_1=1$，$c_2=2$符合，

所以$c_n=2^{n-1}$．

8 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=2a_{n-1}-2n+5$（$n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant 2$），$a_1=1$．

(1) 若$b_n=a_n-2n+1$，求证：数列$\{b_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）是常数列，并求$\{a_n\}$的通项．

(2) 若$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，又$c_n=(-1)^nS_n$，且$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n>tn^2$在$n\in\mathbf{N}^*$时恒成立，求实数$t$的取值范围．

答案 (1) 见解析，$a_n=2n-1$．

(2) $(-\infty,-1)$．

解析 (1) 由$a_n=2a_{n-1}-2n+5$知：$a_n-2n+1=2[a_{n-1}-2(n-1)+1]$，而$a_1=1$，

于是由$b_n=a_n-2n+1$，可知：$b_n=2b_{n-1}$，且$b_1=0$，

从而$b_n=0$，故数列$\{b_n\}$是常数列．

于是$a_n=2n-1$．

(2) $S_n$是$\{a_n\}$前$n$项和，则$S_n=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$，$c_n=(-1)^nn^2$，

当$n$为奇数时，即$n=2k-1$，

$T_n=T_{2k-1}=-1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots+(2k-2)^2-(2k-1)^2$，

$=-k(2k-1)=-\frac{n(n+1)}{2}$．

当$n$为偶数时，$T_n=T_{2k}=T_{2k-1}+(2k)^2=\frac{n(n+1)}{2}$．

$\therefore T_n=\frac{1}{2}n(n+1)(-1)^n$．

由$T_n>tn^2$恒成立，则需$\frac{1}{2}n(n+1)(-1)^n>tn^2$恒成立．只需$n$为奇数时恒成立．

$\therefore -\dfrac{1}{2}n(n+1) > tn^2$（$n=1$，$3$，$5$，$7$），

$\therefore t < -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}$（$n=1$，$3$，$5$，$7$）恒成立．

而$-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant -1$，

$\therefore t < -1$，故所需$t$的范围为$(-\infty,-1)$．

9 已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$a_1=\dfrac{3}{2}$，数列$\{b_n\}$是等比数列，且$b_1=a_1$，$b_2=-a_3$，$b_3=a^4$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$．

(1) 求数列$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\begin{cases} b_n, n\leqslant 5\\ 8a_n, n\geqslant 6\end{cases}$，$(n\in\mathbf{N}^*)$．求$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$．

(3) 若$A\leqslant S_n-\dfrac{1}{S_n}\leqslant B$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求$B-A$的最小值．

答案

(1) $b_n=-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$．

(2) $T_n=\begin{cases} 1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, n\leqslant 5\\ -\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{27}{2}n-\dfrac{927}{32}, n\geqslant 6\end{cases}$．

(3) $\dfrac{17}{12}$．

解析

(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，等比数列$\{b_n\}$的公比为$q$，

则由题意可得$\begin{cases}\dfrac{3}{2}+2d=-\dfrac{3}{2}q\\ \dfrac{3}{2}+3d=\dfrac{3}{2}q^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2}\\ d=-\dfrac{3}{8}\end{cases}$或$\begin{cases}q=-1\\ d=0\end{cases}$．

$\because$数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，

$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$．

(2) 由（1）知$a_n=\dfrac{3}{2}+(n-1)\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{15-3n}{8}$，

当$n\leqslant 5$时，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{\dfrac{3}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，

当$n\geqslant 6$时，

$T_n=T_5+c_6+c_7+\cdots+c_n=T_5+8(a_6+a_7+\cdots+a_n)$

$T_5+8\cdot\dfrac{(n-5)(a_6+a_n)}{2}$

$$=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5+8\cdot\frac{(n-5)\left(-\frac{3}{8}+\frac{15-3n}{8}\right)}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}n^2+\frac{27}{2}n-\frac{927}{32}.$$

$$\therefore T_n=\begin{cases}1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n, n\leqslant 5\\ -\frac{3}{2}n^2+\frac{27}{2}n-\frac{927}{32}, n\geqslant 6\end{cases}.$$

(3)

由（1）可知$S_n=\dfrac{\frac{3}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

令$t=S_n-\dfrac{1}{S_n}$，

$\because S_n>0$，

$\therefore t$随着$S_n$的增大而增大，

当$n$为奇数时，$S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$在奇数集上单调递减，

$S_n\in\left(1,\frac{3}{2}\right]$，$t\in\left(0,\frac{5}{6}\right]$，

当$n$为偶数时，$S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$在偶数集上单调递增，

$S_n\in\left[\frac{3}{4},1\right)$，$t\in\left[-\frac{7}{12},0\right)$，

$\therefore t_{\min}=-\frac{7}{12}$，$t_{\max}=\frac{5}{6}$，

$\because A\leqslant S_n-\dfrac{1}{S_n}\leqslant B$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

$\therefore\left[-\frac{7}{12},\frac{5}{6}\right]\subseteq[A,B]$，

$\therefore B-A$的最小值为$\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{12}\right)=\frac{17}{12}$．

10 设各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=10$，$a_3+a_5=40$，$b_n=\log_2 a_n$．

(1) 求数列$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 若$c_1=1$，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{b_n}{a_n}$，求证：$c_n<3$．

(3) 是否存在正整数$k$，使得$\dfrac{1}{b_n+1}+\dfrac{1}{b_n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{b_n+n}>\dfrac{k}{10}$对任意正整数$n$均成立？若存在，求出$k$的最大值，若不存在，说明理由．

答案 (1) $b_n=n$．

(2) 证明见解析．

(3) 存在，$k<5$．

解析 (1) 设各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$，

则$a_1+a_1q^2=10$，$a_1q^2+a_1q^4=40$，

解得$a_1=2$，$q=2$，

即有$a_n=2^n$，

$b_n=\log_2 2^n=n$．

(2) $c_1=1$，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{b_n}{a_n}=c_n+\dfrac{n}{2^n}$，

则$c_n=c_1+(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+\cdots+(c_n-c_{n-1})$

$=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$，

即有$\dfrac{1}{2}c_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}$，

两式相减可得$\dfrac{1}{2}c_n=1+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{n-1}{2^n}$

$=1+\dfrac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n-1}{2^n}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n}{2^n}$，

即有$c_n=3-\dfrac{n}{2^{n-1}}<3$．

(3) 假设存在正整数$k$，使得$\dfrac{1}{b_n+1}+\dfrac{1}{b_n+2}+\cdots\dfrac{1}{b_n+n}>\dfrac{k}{10}$对任意正整数$n$均成立．

令$S_n=\dfrac{1}{b_n+1}+\dfrac{1}{b_n+2}+\cdots\dfrac{1}{b_n+n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$，

$S_{n+1}=\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}$，

即有$S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{n+1}$

$=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+2}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$，

即为$S_{n+1}>S_n$，

数列$\{S_n\}$递增，$S_1$最小，且为$\dfrac{1}{2}$，

则有$\dfrac{k}{10}<\dfrac{1}{2}$，解得$k<5$．

## 三、不等式证明

### 1. 真题分析

11 已知$q$和$n$均为给定的大于1的自然数，设集合$M=\{0,1,2\cdots,q-1\}$，集合

$A=\left\{x\,\middle|\,x=x_1+x_2q+\cdots+x_nq^{n-1},x_i\in M,i=1,2,\cdots n\right\}$，

(1) 当$q=2,n=3$时，用列举法表示集合$A$．

(2) 设$s,t\in A,s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1},t=b_1+b_2q+\cdots b_nq^{n-1}$,其中

$a_i,b_i\in M,i=1,2,\cdots n,$

证明：若$a_n<b_n$，则$s<t$．

答案 (1) $A=\{0,7,1,2,4,6,3,5\}$．

(2) 证明见解析．

解析 (1) $q=2$，$n=3$，$M=\{0,1\}$，$A=\{x|x=x_1+2x_2+4x_3,x_i\in M,i=1,2,3\}$

$\therefore A=\{0,7,1,2,4,6,3,5\}$．

(2) 证明：由$s$，$t\in A$，$s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$，$t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$，$a_i$，$b_i\in M$，$i=1,2,\cdots,n$及$a_n<b_n$，可得

$$s-t=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)q+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})q^{n-2}+(a_n-b_n)q^{n-1}$$
$$\leqslant(q-1)+(q-1)q+\cdots+(q-1)q^{n-2}-q^{n-1}$$
$$=\frac{(q-1)(1-q^{n-1})}{1-q}-q^{n-1}$$
$$=-1<0.$$

所以，$s<t$．

12 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等差数列，公差为$d$，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$b_n$是$a_n$和$a_{n+1}$的等比中项．

(1) 设$c_n=b_{n+1}^2-b_n^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：数列$\{c_n\}$是等差数列；

(2) 设$a_1=d$，$T_n=\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^kb_k^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}<\frac{1}{2d^2}$．

答案 (1) 证明见解析．

(2) 证明见解析.

解析 (1) 由题意，得$b_n^2=a_na_{n+1}$，又$c_n=b_{n+1}^2-b_n^2=a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}=2da_{n+1}$，因此$c_{n+1}-c_n=2d\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)=2d^2$，所以数列$\{c_n\}$是等差数列．

(2) $T_n=\left(-b_1^2+b_2^2\right)+\left(-b_3^2+b_4^2\right)+\cdots+\left(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2\right)=2d\left(a_2+a_4+\cdots+a_{2n}\right)$
$=2d\cdot\frac{n\left(a_2+a_{2n}\right)}{2}=2d^2n\left(n+1\right)$．所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}=\frac{1}{2d^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)}$

$$=\frac{1}{2d^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2d^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2d^2}.$$

## 2. 思路总结

证数列不等式，因其思维跨度大、构造性强，需要有较高的放缩技巧而充满思考性和挑战性，能全面而综合地考查学生的潜能与后继学习能力，通过多角度观察通项的结构，剖析特征，抓住其规律放缩；主要有以下几种：

（1）裂项放缩：①$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

②$(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{3\times2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}<\frac{5}{2}$

③$\frac{1}{2^n(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^n}$

④$\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

⑤$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

⑥$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$

(2)函数放缩

常见的有$\ln x\leqslant x-1\Rightarrow\frac{\ln x}{x}\leqslant1-\frac{1}{x}$

证明$\frac{\ln2}{2}+\frac{\ln3}{3}+\frac{\ln4}{4}+\cdots+\frac{\ln3^n}{3^n}<3^n-1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n})$

如$\ln x<x,\ln x>1-\frac{1}{x}$也是常用的函数放缩形式.

（3）分式放缩

常用不等式：$\frac{b}{a}>\frac{b+m}{b+m}(b>a>0,m>0)$和$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a>b>0,m>0)$

如（1+1）（$1+\frac{1}{3}$）（$1+\frac{1}{5}$）$\cdots$（$1+\frac{1}{2n-1}$)$>\sqrt{2n-1}$

利用第一个性质得$\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}>\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}(2n+1)$

$\Rightarrow(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1})>2n+1$即不等式成立.

## 3. 模拟演练

13 已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列（$n\in\mathbf{N}^*$），$a_1=2$，且$2a_1,a_3,3a_2$成等差数列．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$b_n=\log_2 a_n$，$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，记$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{S_n}$，证明：$1\leqslant T_n\leqslant 2$．

答案 (1) $a_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) 证明见解析．

解析 (1) 因为数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列（$n\in\mathbf{N}^*$），$a_1=2$，

可设公比为$q$，$q>0$，

又$2a_1, a_3, 3a_2$成等差数列，

所以$2a_3=2a_1+3a_2$，即$2\times 2q^2=4+3\times 2q$，

解得$q=2$或$q=-\frac{1}{2}$（舍去），

则$a_n=a_1q^{n-1}=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

故$a_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) $b_n=\log_2=\log_2 2^n=n$，

$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$，$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

则$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{S_n}$

$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，

因为$0<\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$，

所以$1\leqslant 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$，

即$1\leqslant T_n\leqslant 2$．

14 等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$2a_5$，$a_4$，$4a_6$成等差数列，且满足$a_4=4a_3^2$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n=\frac{(n+1)b_n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$b_1=1$．

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}c_k<\frac{1}{3}$．

答案 (1) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) 证明见解析．

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$，由题意可知$2a_4=2a_5+4a_6$，即$a_4=a_4q+2a_4q^2$，

由$a_n>0$，则$2q^2+q-1=0$，解得：$q=\frac{1}{2}$，或$q=-1$（舍去），

$a_4=4a_3^2=4a_2a_4$，则$a_2=\frac{1}{4}$，

$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，

等比数列$\{a_n\}$通项公式$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

当$n\geqslant 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+1)b_n}{2}-\frac{nb_{n-1}}{2}$，

整理得：$\frac{b_n}{n}=\frac{b_{n-1}}{n-1}$，

$\therefore$数列$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$是首项为$\frac{b_1}{1}=1$的常数列，

则$\frac{b_n}{n}=1$，则$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$，

数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) 由（1）可知：$c_n=\frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n=\frac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1}{2^n}$．…（8分）

$\therefore c_n=\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}$，…（10分）

$\therefore\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5\cdot 2}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot 2}-\frac{1}{7\cdot 2^2}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}$，

由$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}<\frac{1}{3}$，

故不等式成立．

15 等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$2a_5$，$a_4$，$4a_6$成等差数列，且满足$a_4=4a_3^2$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n=\frac{(n+1)\,b_n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$b_1=1$．

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}c_k<\frac{1}{3}$．

(3) 设$R_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$T_n=a_1b_1-a_2b_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_nb_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求$R_{2n}+3T_{2n-1}$．

答案 (1) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 证明见解析．

(3) $R_{2n}+3T_{2n-1}=\frac{8}{3}+\frac{3n-4}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$．

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$，

依题意，有$2a_4=2a_5+4a_6$，

所以$a_4=a_4q+2a_4q^2$，

因为$a_n>0$，

所以$q>0$，

且$2q^2+q-1=0$，

解得$q=\frac{1}{2}$或$q=-1$（舍），

因为$a_4=4a_3^2=4a_2a_4$，

所以$a_2=\frac{1}{4}$，

所以$a_1=\frac{1}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

当$n\geqslant 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+1)b_n}{2}-\frac{nb_{n-1}}{2}$，

整理得$(n-1)b_n=nb_{n-1}$，即$\frac{b_n}{n}=\frac{b_{n-1}}{n-1}(n\geqslant 2)$，

所以数列$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$是首项为$\frac{b_1}{1}=1$的常数列．

所以$\frac{b_n}{n}=1$，即$b_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 由(1)得：

$$c_n=\frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n$$
$$=\frac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1}{2^n}$$
$$=\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\cdot\frac{1}{2^n}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}，$$

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=\left(\frac{1}{3\cdot 2^0}-\frac{1}{5\cdot 2^1}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot 2^1}-\frac{1}{7\cdot 2^2}\right)+\cdots$

$$+\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}<\frac{1}{3}．$$

(3) 方法一：$R_{2n}+3T_{2n-1}=R_{2n}+3T_{2n}-3(-1)^{2n-1}a_{2n}b_{2n}$，

$\therefore R_{2n}+3T_{2n}=(4a_1b_1-2a_2b_2)+(4a_3b_3-2a_4b_4)+\cdots$

$+(4a_{2n-1}b_{2n-1}-2a_{2n}b_{2n})$

$=2\left[2\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\right]+2\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 4\right]+\cdots$

$+2\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\cdot(2n-1)-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\cdot 2n\right]$.

$\because 2\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}(2n-1)-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\cdot 2n\right]$

$=2\left[4(2n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n-2n\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

$=4(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

令$A_n=R_{2n}+3T_{2n}$

$=1\left(\frac{1}{4}\right)^0+4\left(\frac{1}{4}\right)^1+\cdots+(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

$\frac{1}{4}A_n$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^1+4\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+(3n-5)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

$\therefore \frac{3}{4}A_n=1+3\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]-(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=1+3\cdot\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{4}}-(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=2-(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

$\therefore A_n=\frac{8}{3}-\frac{3n+2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

$\therefore R_{2n}+3T_{2n-1}=A_n-3(-1)^{2n-1}a_{2n}b_{2n}=\frac{8}{3}+\frac{3n-4}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

方法二：$R_n=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$\frac{1}{2}R_n=1\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

$\therefore \frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

$\therefore R_n=2-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$\therefore R_{2n}=2-(2n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

$T_n=(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)+(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(-n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

$$-\frac{1}{2}T_n=(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(-n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$+(-n)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$
$$\frac{3}{2}T_n=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\cdots-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+(n)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}+n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$=\frac{1}{3}+\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$
$$\therefore T_n=\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$
$$\therefore 3T_{2n-1}=\frac{2}{3}+2\left(2n-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n,$$
$$\therefore R_{2n}+3T_{2n-1}=\frac{8}{3}+\frac{3n-4}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

16 数列$\{a_n\}$是等比数列，公比大于$0$，前$n$项和$S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_2}+4$，$a_3=\frac{1}{b_4+b_6}$，$a_4=\frac{1}{b_5+2b_7}$．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式$a_n$，$b_n$．

(2) 设$\{S_n\}$的前$n$项和为$T_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

① 求$T_n$．

② 证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(T_{i+1}-b_{i+1})\,b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}<\frac{1}{2}$．

答案 (1) $a_n=\frac{1}{2n}$，$b_n=n-1$．

(2) ① $T_n=n-1+\frac{1}{2^n}$．

② 证明见解析．

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比$q>0$，$\begin{cases}a_1=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{a_1q^2}=\frac{1}{a_1q}+4\end{cases}$，$\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q}-2=0$，解得$q=\frac{1}{2}$，

$\therefore a_n=\frac{1}{2n}$，

设等差数列$a_3=\frac{1}{b_4+b_6}=\frac{1}{8}$，$a_4=\frac{1}{b_5+2b_7}=\frac{1}{16}$，

$\therefore 2b_1+8d=8$，$3b_1+16d=16$，

解得$b_1=0$，$d=1$，

$\therefore b_n=n-1$．

(2) ① $S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$，

$\{S_n\}$的前$n$项和为

$T_n=n-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}-\cdots\cdots-\dfrac{1}{2^n}=n-\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=n-1+\dfrac{1}{2^n}$．

② $\dfrac{(T_{i+1}-b_{i+1})\,b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}=\dfrac{\left(i+\frac{1}{2^{i+1}}-i\right)(i+2)}{i\,(i+1)}=\dfrac{1}{i\cdot 2^i}-\dfrac{1}{(i+1)\cdot 2^{i+1}}$，

$\therefore$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(T_{i+1}-b_{i+1})\,b_{i+3}}{b_{i+1}\cdot b_{i+2}}=\dfrac{1}{1\times 2}-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}-\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{i\cdot 2^i}$
$-\dfrac{1}{(i+1)\cdot 2^{i+1}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}<\dfrac{1}{2}$

．

17 设$\{a_n\}$是等比数列，公比大于0，其前$n$项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{S_n\}$的前$n$项和为$T_n(n\in\mathbf{N}^*)$．

① 求$T_n$．

② 证明$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{2^{n+2}}{n+2}-2(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$．

(2) ① $T_n=2^{n+1}-n-2$．

② 证明见解析．

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比$q$，

由$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，可得$q^2-q-2=0$，

$\because q>0$，可得$q=2$，故$a_n=2^{n-1}$．

设等差数列$\{b_n\}$的公差为$d$，由$a_4=b_3+b_5$，

可得$b_1+3d=4$，由$a_5=b_4+2b_6$，

可得$3b_1+13d=16$，从而$b_1=1$，$d=1$，$\therefore b_n=2$．

$\therefore\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n$．

(2) ① 由(1)得，$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

$\therefore T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}2^k-n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$．

② $\dfrac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{(2^{k+1}-k-2+k+2)k}{(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{k\cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{2^{k+2}}{k+2}-\dfrac{2^{k+1}}{k+1}$，

$\therefore$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\left(\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{2^2}{2}\right)+\left(\dfrac{2^4}{4}-\dfrac{2^3}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{2^{n+2}}{n+2}-\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\right)=\dfrac{2^{n+2}}{n+2}-2$

．

18 已知数列$\{a_n\}$是公比大于1的等比数列$(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_2=4$，且$1+a_2$是$a_1$与$a_3$的等差中项．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$b_n=\log_2 a_n$，$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，记$T_n=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{S_n}$，证明：

$1\leqslant T_n<2$．

答案 (1) $a_n=a_1q^{n-1}=2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 证明见解析．

解析 (1) 由题意得：$2(1+a_2)=a_1+a_3$，

设数列$\{a_n\}$公比为$q$，则$2(1+a_2)=\dfrac{a_2}{q}+a_2q$，即$2q^2-5q+2=0$，

解得：$q=\dfrac{1}{2}$（舍去）或$q=2$，

则$a_1=\dfrac{a_2}{q}=2$，

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 由（1）得：$b_n=\log_2 2^n=n$，可知$\{b_n\}$为首项为1，公差为1的等差数列，

则$S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\times\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore$

$T_n=2\times\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=2-\dfrac{2}{n+1}$

,

$\because 0 < \frac{2}{n+1} \leqslant 1$ ,

$\therefore 1 \leqslant 2 - \frac{2}{n+1} < 2$ ,

即$1 \leqslant T_n < 2$ .