

综合问题

1. 知识梳理



一、点坐标可求问题

1. 真题分析

- 1 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 下顶点为 A , 椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\sqrt{3}$.
- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
 - (2) 直线 l 与椭圆 C 交于 B, D 两点 (异于 A 点), 若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为 1, 证明: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
- (2) 证明见解析, 定点为 $(2, -1)$.

解析

- (1) 由题意知: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = \sqrt{3}$, $a^2 = b^2 + c^2$,
解得: $a^2 = 4$, $b^2 = 1$,
所以椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
- (2) 由(1)得, $A(0, -1)$,

当直线的斜率不存在时，设直线为： $x = m$ ，代入椭圆中： $y^2 = 1 - \frac{m^2}{4}$ ，

$$\text{设 } B\left(m, \sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right), D\left(m, -\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right),$$

由题意得： $\frac{2}{m} = 1$ ，所以 $m = 2$ ；

$$\therefore k_{AB} + k_{AD} = \frac{\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}} + 1}{m} + \frac{-\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}} + 1}{m} = \frac{2}{m},$$

当直线 BD 的斜率存在时，设直线为： $y = kx + t$ ，

$$\text{设 } B(x, y), D(x', y'),$$

联立与椭圆的方程整理得：

$$(1 + 4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = 64k^2t^2 - 4(1 + 4k^2)(4t^2 - 4) > 0,$$

$$t^2 < 1 + 4k^2, \therefore t^2 < 1,$$

$$x + x' = \frac{-8kt}{1 + 4k^2}, xx' = \frac{4t^2 - 4}{1 + 4k^2}, y + y' = k(x + x') + 2t = \frac{2t}{1 + 4k^2},$$

$$\begin{aligned} \therefore k_{AB} + k_{AD} &= \frac{y + 1}{x} + \frac{y' + 1}{x'} \\ &= \frac{kx + 1 + t}{x} + \frac{kx' + 1 + t}{x'} \\ &= 2k + \frac{(1 + t)(x + x')}{xx'} \\ &= 2k + \frac{(1 + t)(-8kt)}{4t^2 - 4} \\ &= 2k + 2 \frac{-kt}{t - 1} \\ &= \frac{-2k}{t - 1}, \end{aligned}$$

$$\text{由题意知：} -2k = t + 1, \therefore t = -2k - 1,$$

$$\text{所以直线为 } y = kx - 2k - 1 = k(x - 2) - 1,$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = -1, \text{ 即过 } (2, -1),$$

综上所述，直线恒过点 $(2, -1)$ 。

2. 思路总结

- ① 设直线 $y = kx + m$ ，设点坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ；
- ② 将直线与圆锥曲线联立，得到 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 \cdot x_2$ ， $(y_1 + y_2$ 与 $y_1 \cdot y_2)$ ；
- ③ 将题目条件代数化，即可得到一个关于 x_1, x_2, y_1, y_2 的方程；
- ④ 利用直线方程，将 y 用 x 替换。（将 x 用 y 替换）；
- ⑤ 化简合并，将根与系数代入，即可得到一个 k 和 m 的方程，即 k, m 的关系；

⑥将 k 、 m 的关系代入直线方程，求出定点．

3. 模拟演练

2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$ ．

(1) 求椭圆 C 的标准方程．

(2) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M 、 N 两点，在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$ ，使得 $|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$ ．若存在，求出实数 m 的取值范围；若不存在，说明理由．

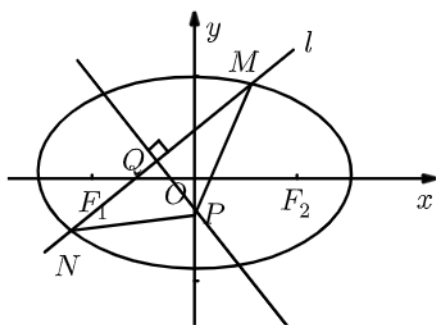
答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ．

(2) 存在， $m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ．

解析

(1)



由题意得： $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

又： $a^2 = b^2 + c^2$ ，

得： $a = \sqrt{2}b = \sqrt{2}c$ ，即 $b = c$ ，

椭圆上的点到左焦点 F_1 最大值为 $a + c = \sqrt{2} + 1$

解得： $a = \sqrt{2}$ ， $c = 1$ ， $b = 1$ ，

∴椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ．

(2) 由题意得： P 点为 MN 垂直平分线与 y 轴交点，

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

将直线 l 的方程与椭圆 C 方程联立
$$\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

得： $(2k^2 + 1)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$ ，

$\Delta = (4kt)^2 - 4(2k^2 + 1)(2t^2 - 2) = 8(2k^2 + 1 - t^2) > 0$ ，

$$\text{得 } t^2 < 2k^2 + 1,$$

$$\text{由韦达定理得: } x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2t^2-2}{1+2k^2}.$$

设 MN 中点为 Q ,

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2kt}{1+2k^2}, \quad \frac{y_1+y_2}{2} = k \cdot \frac{x_1+x_2}{2} + t = \frac{t}{2k^2+1},$$

$$\therefore Q\left(\frac{-2kt}{1+2k^2}, \frac{t}{1+2k^2}\right).$$

$$\text{则直线 } PQ: y - \frac{t}{1+2k^2} = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{2kt}{1+2k^2}\right),$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } y = -\frac{t}{1+2k^2} = m,$$

$$|MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|1+2k^2|}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{8(2k^2+1-t^2)}}{1+2k^2}$$

$$= 2,$$

$$\text{得: } t^2 = \frac{2k^2+1}{2(k^2+1)}.$$

$$\text{又 } m = -\frac{t}{1+2k^2},$$

$$\therefore m^2 = \frac{t^2}{(1+2k^2)^2} = \frac{1}{(2k^2+2)(2k^2+1)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3 已知点 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 过点 F 的直线 l 交椭圆于 M, N 两点, 当直线 l 过 C 的下顶点时, l 的斜率为 $\sqrt{3}$. 当直线 l 垂直于 C 的长轴时, $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{3}{2}$,

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 当 $|MF| = 2|FN|$ 时, 求直线 l 的方程.

(3) 若直线 l 上存在点 P 满足 $|PM|, |PF|, |PN|$ 成等比数列, 且点 P 在椭圆外, 证明: 点 P 在定直线上.

答案

(1) 椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 直线方程为 $\sqrt{5}x \pm 2y - \sqrt{5} = 0$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 椭圆 C 的下顶点坐标为 $(0, -b)$, 右焦点 F 坐标为 $(c, 0)$,

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{b}{c}, \text{ 即 } b = \sqrt{3}c,$$

$$l \text{ 垂直于 } C \text{ 的长轴时, } |MN| = \sqrt{3}b,$$

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{3}b = \frac{3}{2},$$

$$\therefore bc = \sqrt{3},$$

$$\therefore c = 1, b = \sqrt{3},$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 = 4,$$

$$\therefore \text{椭圆标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 当直线 l 与 x 轴重合时, $M(2, 0), N(-2, 0)$,

此时 $|MF| = 3|NF|$, 不合题意,

当直线 l 与 x 轴不重合时, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得}$$

$$(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

$$\Delta = 36m^2 + 36(m^2 + 4) > 0,$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \text{ ①}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4} \text{ ②}.$$

$$\text{由 } |MF| = 2|FN|, \text{ 得 } y_1 = -2y_2 \text{ ③},$$

$$\text{联立 ①③ 得, } -\frac{72m^2}{(3m^2 + 4)^2} = -\frac{9}{3m^2 + 4},$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \text{直线方程为 } \sqrt{5}x \pm 2y - \sqrt{5} = 0.$$

(3) 当直线 l 的斜率为 0 时, 则 $M(2, 0), N(-2, 0)$, 设 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } |PM| \cdot |PN| = |(x_0 - 2)(x_0 + 2)| + y_0^2,$$

$\therefore$ 点 P 在椭圆外,

$$\therefore x_0 - 2, x_0 + 2 \text{ 同号},$$

$$\text{又 } |PF|^2 = (x_0 - 1)^2 + y_0^2,$$

$$\therefore (x_0 - 2)(x_0 + 2) = (x_0 - 1)^2, \text{ 解得 } x_0 = \frac{5}{2},$$

当直线 l 的斜率不为 0 时, 由 (2) 知,

$$y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4},$$

$$|PM| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_0|,$$

$$|PN| = \sqrt{1 + m^2} |y_2 - y_0|,$$

$$|PF| = \sqrt{1 + m^2} |y_0|,$$

$\therefore$ 点 P 在椭圆外 ,
 $\therefore y_1 - y_0, y_2 - y_0$ 同号 ,
 $\therefore |PM| \cdot |PN| = (1 + m^2)(y_1 - y_0)(y_2 - y_0)$
 $= (1 + m^2)[y_1 y_2 - y_0(y_1 + y_2) + y_0^2]$
 $= (1 + m^2)\left(y_0^2 + \frac{6my_0}{3m^2 + 4} - \frac{9}{3m^2 + 4}\right)$
 $= (1 + m^2)y_0^2 ,$
 整理得 $y_0 = \frac{3}{2m}$, 代入直线方程得 $x_0 = \frac{5}{2}$,
 $\therefore$ 点 P 在定直线 $x = \frac{5}{2}$ 上 .

二、角度转化问题

1. 真题分析

- 4 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 B , 左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,
- (1) 求直线 BF 的斜率 ;
- (2) (Ⅱ) 设直线 BF 与椭圆交于点 P (P 异于点 B) , 故点 B 且垂直于 BF 的直线与椭圆交于点 Q (Q 异于点 B) 直线 PQ 与 y 轴交于点 M , $|PM| = \lambda|MQ|$. (i) 求 λ 的值 ;
- (ii) 若 $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$, 求椭圆的方程 .

答案

- (1) 2
- (2) (i) $\lambda = \frac{7}{8}$ (ii) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

解析

- (1) 设 $F(-c, 0)$, 由已知离心率 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 与 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $a = \sqrt{5}c$, $b = 2c$,
 $\therefore B(0, b)$, $F(-c, 0)$.
 故直线 BF 的斜率为 $k = \frac{b - 0}{0 - (-c)} = \frac{2c}{c} = 2$.
- (2) 设点 $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$, $M(x_M, y_M)$.
 (i) 由 (Ⅰ) 可得椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5c^2} + \frac{y^2}{4c^2} = 1$, 直线 BF 的方程为 $y = 2x + 2c$,
 将直线方程与椭圆方程联立 , 消去 y , 整理得 $3x^2 + 5cx = 0$, 解得 $x_P = -\frac{5c}{3}$,
 $\therefore BQ \perp BP$, $\therefore BQ$ 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 2c$, 与椭圆方程联立 , 消去 y ,

整理得 $21x^2 - 40cx = 0$, 解得 $x_Q = \frac{40c}{21}$.

又因为 $\lambda = \frac{|PM|}{|MQ|}$, $x_M = 0 \therefore \lambda = \frac{|x_M - x_P|}{|x_Q - x_M|} = \frac{|x_P|}{|x_Q|} = \frac{7}{8}$.

(ii) 由 $\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{7}{8}$, $\therefore \frac{|PM|}{|MQ| + |PM|} = \frac{7}{8+7} = \frac{7}{15}$, $\therefore |PQ| = \frac{15}{7}|PM|$,

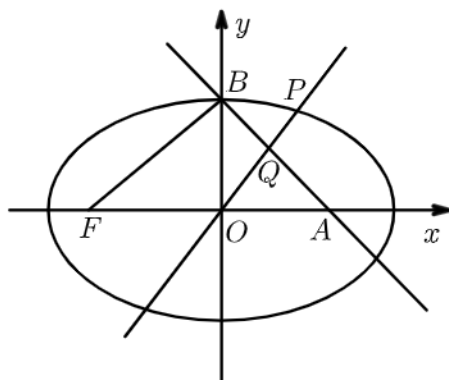
又 $\therefore y_P = 2x_P + 2x = -\frac{4}{3}c$,

$\therefore |BP| = \sqrt{(0 + \frac{5c}{3})^2 + (2c + \frac{4c}{3})^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}c$,

$\therefore \frac{5\sqrt{5}}{3}c = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $\therefore c = 1$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- 5 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 B , 已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 点 A 的坐标为 $(b, 0)$, 且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$.



- (1) 求椭圆的方程 .
- (2) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P , 且 l 与直线 AB 交于点 Q , 若 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ (O 为原点) , 求 k 的值 .

答案

- (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- (2) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$.

解析

- (1) 设椭圆焦距为 $2c$, 由题意可得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$,

又由于 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $2a = 3b$,

由已知可得 $|FB| = a$, $|AB| = \sqrt{2}b$,

由 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 可得 $ab = 6$,

得 $a = 3$, $b = 2$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 P, Q 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 由已知可得 $y_1 > y_2 > 0$,

故 $|PQ| \sin \angle AOQ = y_1 - y_2$, 又因为 $|AQ| = \frac{y_2}{\sin \angle OAB}$,

而 $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$, 故 $|AQ| = \sqrt{2}y_2$,

由 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ 可得 $5y_1 = 9y_2$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 消去 x 可得 $y_1 = \frac{6k}{\sqrt{9k^2 + 4}}$,

易知直线 AB 的方程为 $x + y - 2 = 0$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$, 消去 x 可得 $y_2 = \frac{2k}{k+1}$,

由 $5y_1 = 9y_2$ 可得 $5(k+1) = 3\sqrt{9k^2 + 4}$,

两边平方, 整理可得 $56k^2 - 50k + 11 = 0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{11}{28}$,

故 k 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$.

2. 思路总结

常见角度转化多转化为向量或者斜率问题进行求解, 例如:

原点 O 在以 AB 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为锐角 $\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 < 0$,

易得 $\frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} < 0$;

原点 O 在以 AB 为直径的圆外 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为钝角 $\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 > 0$,

易得 $\frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} > 0$.

3. 模拟演练

6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点) , 求

$|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值 .

答案

(1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 2 .

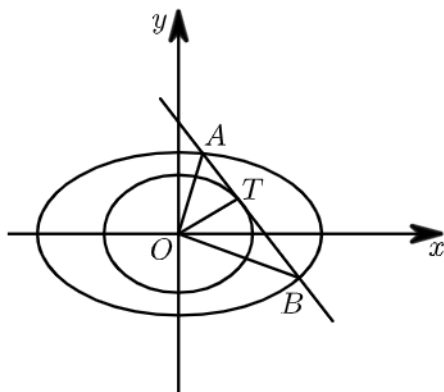
解析

(1) 由题意可得, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $a^2 - b^2 = c^2$, $bc = \sqrt{2}$,

解得 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$,

即有椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2)



由题意可知, k 存在,

设直线为 $y = kx + m$ ($k \neq 0$), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA} \\ = |AT| + \frac{|OT|}{\tan \angle OBA} = |AT| + |BT| = |AB|.$$

将直线 $y = kx + m$ 代入椭圆方程可得 $(1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$,

$$x_1 + x_2 = -\frac{6km}{1 + 3k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 3}{1 + 3k^2},$$

由直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切,

$$\text{可得 } \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即有 } 4m^2 = 3(1 + k^2),$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{6km}{1 + 3k^2}\right)^2 - \frac{12(m^2 - 1)}{1 + 3k^2}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1 + 10k^2 + 9k^4}{1 + 6k^2 + 9k^4}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{4k^2}{1 + 6k^2 + 9k^4}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6}} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{2\sqrt{9} + 6}} = 2, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2},$$

$$\text{即 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立,}$$

$$\therefore |OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA} \text{ 的最大值为 } 2.$$

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F_1, F_2 是其左右焦点, A_1, A_2 为其左右顶点, B_1, B_2 为其上下顶点, 若 $\angle B_1 F_2 O = \frac{\pi}{6}$, $|F_1 A_1| = 2 - \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过 A_1, A_2 分别作 x 轴的垂线 l_1, l_2 , 椭圆 C 的一条切线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$, l 与 l_1, l_2 交于 M, N 二点, 求证: $\angle M F_1 N = \angle M F_2 N$.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 由题设可知:
$$\begin{cases} c = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ a - c = 2 - \sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

解得: $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 椭圆方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由题设知: $l_1: x = -2, l_2: x = 2$,

l 与 C 的方程联立消去 y 可得: $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0, (*)$,

$\therefore l$ 与 C 相切,

$\therefore (*)$ 中 $\Delta = 64k^2m^2 - 16(1 + 4k^2)(m^2 - 1) = 0$,

$\therefore m^2 - 4k^2 = 1$,

l 与 l_1, l_2 联立得: $M(-2, -2k + m), N(2, 2k + m)$,

又 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore k_{MF_1} \cdot k_{NF_1} = \frac{-2k + m}{-2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2k + m}{2 + \sqrt{3}} = -\frac{m^2 - 4k^2}{-1} = -1$,

$\therefore MF_1 \perp NF_1$, 即 $\angle M F_1 N = \frac{\pi}{2}$,

同理 $\angle M F_2 N = \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \angle M F_1 N = \angle M F_2 N$.

8

已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点, 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2)

过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M 、 N ，且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$ (O 为坐标原点)，求直线 m 的方程。

答案

(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ 或 $x = -2$.

解析

(1) $\because$ 过点 $(0, -2\sqrt{3})$ ，斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ ，令 $y = 0$ ，得椭圆焦点坐标为 $(2, 0)$ ，

$\therefore$ 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上，

设椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点为 (m, n) ，

$$\text{则} \begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m - 2\sqrt{3} \\ \frac{n}{m} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = \frac{a^2}{2} \end{cases}, \text{解得 } n = -\sqrt{3}, m = 3, a^2 = 2m = 6,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 6 - 4 = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) ①当直线 m 的斜率不存在时，满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$ ，此时直线 m 的方程为

$$x = -2.$$

②当直线 m 的斜率存在时，由题设知直线 m 的斜率不为零，

$\therefore$ 直线 m 的方程可设为 $y = k(x+2)$ 。

$$\text{代入椭圆方程得: } (3k^2 + 1)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 6}{3k^2 + 1},$$

$$\text{由 } \tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}, \text{ 得: } |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{又 } |MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1}, \text{ 原点 } O \text{ 到 } m \text{ 的距离 } d = \frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{则 } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |MN| d = \frac{\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1} \cdot \frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore m \text{ 的方程是 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \text{ 或 } x = -2.$$

三、斜率问题

1. 真题分析

9 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B 。已知椭圆的短轴长为 4，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上。若 $|ON| = |OF|$ (O 为原点)，且 $OP \perp MN$ ，求直线 PB 的斜率。

答案

- (1) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
- (2) $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $-\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 。

解析

- (1) 设椭圆的半焦距为 c ，依题意， $2b = 4$ ， $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，又 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得 $a = \sqrt{5}$ ， $b = 2$ ， $c = 1$ 。

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。

- (2) 方法一：由题意，设 $P(x_p, y_p)$ ($x_p \neq 0$)， $M(x_M, 0)$ 。

设直线 PB 的斜率为 k ($k \neq 0$)，又 $B(0, 2)$ ，

则直线 PB 的方程为 $y = kx + 2$ ，

与椭圆方程联立 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ 整理得 $(4 + 5k^2)x^2 + 20kx = 0$ ，

可得 $x_p = -\frac{20k}{4 + 5k^2}$ ，代入 $y = kx + 2$ 得 $y_p = \frac{8 - 10k^2}{4 + 5k^2}$ ，

进而直线 OP 的斜率 $\frac{y_p}{x_p} = \frac{4 - 5k^2}{-10k}$ 。

在 $y = kx + 2$ 中，令 $y = 0$ ，得 $x_M = -\frac{2}{k}$ 。

由题意得 $N(0, -1)$ ，所以直线 MN 的斜率为 $-\frac{k}{2}$ 。

由 $OP \perp MN$ ，得 $\frac{4 - 5k^2}{-10k} \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) = -1$ ，化简得 $k^2 = \frac{24}{5}$ ，

从而 $k = \pm \frac{2\sqrt{30}}{5}$ 。

所以，直线 PB 的斜率为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $-\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 。

方法二： $\because F(-1, 0)$ 且 $|OF| = |ON|$ ，

$$\therefore N(0, -1),$$

$$\therefore B(0, 2),$$

$$\text{设 } PB: y = kx + 2, k \neq 0,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x_m = -\frac{2}{k},$$

$$\therefore M\left(-\frac{2}{k}, 0\right),$$

$$\text{联立: } \begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases},$$

$$\text{消 } y \text{ 得: } (4 + 5k^2)x^2 + 20kx = 0,$$

$$\text{由韦达定理: } x_P + 0 = \frac{-20k}{4 + 5k^2}, \text{ 即 } x_P = \frac{-20k}{4 + 5k^2},$$

$$\text{代入 } y = kx + 2 \text{ 得, } y_P = \frac{8 - 10k^2}{4 + 5k^2},$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \left(\frac{-20k}{4 + 5k^2}, \frac{8 - 10k^2}{4 + 5k^2}\right),$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{k}, -1\right),$$

$$\therefore OP \perp MN,$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MN} = 0,$$

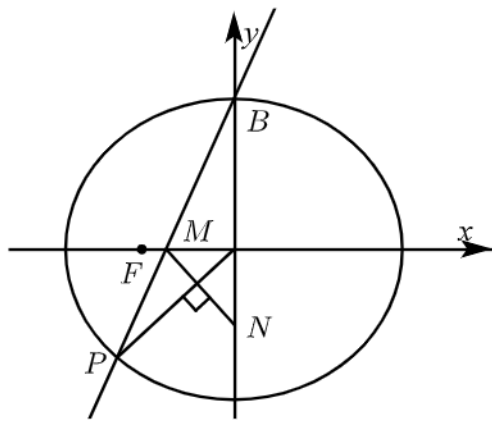
$$\therefore \left(\frac{-20k}{4 + 5k^2}, \frac{8 - 10k^2}{4 + 5k^2}\right) \cdot \left(\frac{2}{k}, -1\right) = 0,$$

$$\frac{-20k}{4 + 5k^2} \cdot \frac{2}{k} - \frac{8 - 10k^2}{4 + 5k^2} = 0,$$

$$\text{即 } -40 - (8 - 10k^2) = 0,$$

$$\text{解得: } k = \pm \frac{2\sqrt{30}}{5},$$

$$\text{所以直线 } PB \text{ 斜率为 } \frac{2\sqrt{30}}{5} \text{ 或 } -\frac{2\sqrt{30}}{5}.$$



10

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 M 在椭圆上且位于第一象限, 直线 FM 被圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c , $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求直线 FM 的斜率.

(2) 求椭圆的方程.

(3) 设动点 P 在椭圆上, 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围.

答案

(1) 见解析.

(2) 见解析.

(3) 见解析

解析

- (1) 由已知有 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, 又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $a^2 = 3c^2, b^2 = 2c^2$, 设直线 FM 的斜率为 $k(k > 0)$, 则直线 FM 的方程为 $y = k(x + c)$, 由已知有 $\left(\frac{kc}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, 解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (2) 由(1)得椭圆方程为 $\frac{x^2}{3c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$, 直线 FM 的方程为 $y = k(x + c)$, 两个方程联立, 消去 y , 整理得 $3x^2 + 2cx - 5c^2 = 0$, 解得 $x = -\frac{5}{3}c$ 或 $x = c$, 因为点 M 在第一象限, 可得 M 的坐标为 $(c, \frac{2\sqrt{3}}{3}c)$, 由 $|FM| = \sqrt{(c+c)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}c - 0\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 解得 $c = 1$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.
- (3) 设点 P 的坐标为 (x, y) , 直线 FP 的斜率为 t , 得 $t = \frac{y}{x+1}$, 即 $y = t(x+1)(x \neq -1)$, 与椭圆方程联立 $\begin{cases} y = t(x+1) \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 消去 y , 整理得 $2x^2 + 3t^2(x+1)^2 = 6$, 又由已知, 得 $t = \sqrt{\frac{6-2x^2}{3(x+1)^2}} > \sqrt{2}$, 解得 $-\frac{3}{2} < x < -1$ 或 $-1 < x < 0$, 设直线 OP 的斜率为 m , 得 $m = \frac{y}{x}$, 即 $y = mx(x \neq 0)$, 与椭圆方程联立, 整理可得 $m^2 = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}$. ①当 $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ 时, 有 $y = t(x+1) < 0$, 因此 $m > 0$, 于是 $m = \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}}$, 得 $m \in \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, ②当 $x \in (-1, 0)$ 时, 有 $y = t(x+1) > 0$, 因此 $m < 0$, 于是 $m = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{2}{3}}$, 得 $m \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 综上, 直线 OP 的斜率的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

11 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F , 右顶点为 A . 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H . 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 求直线 l 的斜率的取值范围.

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
- (2) $k \geq \frac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $k \leq -\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析

$$(1) \frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2-3}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{a^2-3}}{a}}{a - \sqrt{a^2-3}},$$

解之得 $a = 2$,

$$\therefore \text{椭圆方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由已知, 设斜率为 $k(k \neq 0)$, 方程为 $y = k(x - 2)$

设 $B(x_B, y_B)$, $M(x_0, k(x_0 - 2))$, $H(0, y_H)$

因为 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 所以 $x_0 \geq 1$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x - 2) \end{cases} \Rightarrow (3 + 4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0, \Delta > 0 \text{ 成立}$$

$$\text{由韦达定理 } 2 \cdot x_B = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \therefore x_B = \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}, y_B = k(x_B - 2) = \frac{-12k}{3 + 4k^2}$$

$$l_{HM}: y - k(x_0 - 2) = -\frac{1}{k}(x - x_0)$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y_H = \left(k + \frac{1}{k}\right)x_0 - 2k$$

$$\because HF \perp FB, \therefore \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{FB} = (-1, y_H) \cdot (x_B - 1, y_B) = 0$$

$$\text{即 } 1 - x_B + y_H y_B = 1 - \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2} - \frac{12k}{3 + 4k^2} \left[\left(k + \frac{1}{k}\right)x_0 - 2k \right] = 0$$

$$\therefore x_0 = \frac{9 + 20k^2}{12(k^2 + 1)} \geq 1, \therefore 8k^2 \geq 3$$

$$\therefore k \geq \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 或 } k \leq -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

2. 思路总结

这类题可由联立方程+韦达定理+ $\Delta > 0$ 限制条件这种步骤来解.

①联立方程可得一关于参数的一元二次方程;

②利用韦达定理可得韦达定理: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \Delta = b^2 - 4ac > 0$, 得出相应关系式;

③利用 $\Delta > 0$ 得出关于参数的取值范围;

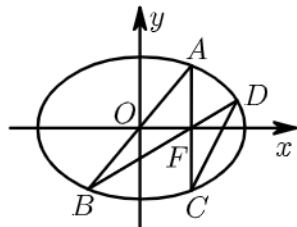
④列出目标参数的关系式, 利用相关参数取值范围, 将多个参数换算成一个有取值范围的参数, 求其值域或取值范围;

⑤角度问题: 若与直线倾斜角有关, 则可以考虑转化为斜率 k ;

若需要判断角是锐角、直角或钝角, 则可将此角作为向量的夹角, 从而利用向量数量积的符号判定.

3. 模拟演练

- 12 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $(1, \frac{3}{2})$ 。
 F 为椭圆的右焦点， A, B 为椭圆关于原点对称的两点，连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点。



- (1) 求椭圆的标准方程；
- (2) 若 $AF = FC$ ，求 $\frac{BF}{FD}$ 的值；
- (3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 ，是否存在实数 m ，使得 $k_2 = mk_1$ ，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
- (2) $\frac{BF}{FD} = \frac{7}{3}$.
- (3) 存在 $m = \frac{5}{3}$ ，使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

解析

- (1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，由题意知： $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$ ，
 解之得： $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ ，所以椭圆方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- (2) 若 $AF = FC$ ，由椭圆对称性，知 $A(1, \frac{3}{2})$ ，所以 $B(-1, -\frac{3}{2})$ ，

此时直线 BF 方程为 $3x - 4y - 3 = 0$ ，

由 $\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，得 $7x^2 - 6x - 13 = 0$ ，解得 $x = \frac{13}{7} (x = -1 \text{ 舍去})$ ，

故 $\frac{BF}{FD} = \frac{1 - (-1)}{\frac{13}{7} - 1} = \frac{7}{3}$.

- (3) 设 $A(x_0, y_0)$ ，则 $B(-x_0, -y_0)$ ，

直线 AF 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$ ，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，得

$$(15 - 6x_0)x^2 - 8y_0^2 - 15x_0^2 + 24x_0 = 0,$$

因为 $x = x_0$ 是该方程的一个解，所以 C 点的横坐标 $x_c = \frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}$ ，

又 $C(x_c, y_c)$ 在直线 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$ 上，所以 $y_c = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x_c - 1) = \frac{-3y_0}{5 - 2x_0}$ ，

同理, D 点坐标为 $\left(\frac{8+5x_0}{5+2x_0}, \frac{3y_0}{5+2x_0}\right)$,

所以 $k_2 = \frac{\frac{3y_0}{5+2x_0} - \frac{-3y_0}{5-2x_0}}{\frac{8+5x_0}{5+2x_0} - \frac{8-5x_0}{5-2x_0}} = \frac{5y_0}{3x_0} = \frac{5}{3}k_1$,

即存在 $m = \frac{5}{3}$, 使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

- 13 设椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左顶点为 A , 左焦点到左顶点的距离为 1, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求椭圆 M 的方程.
- (2) 过点 A 作斜率为 k 的直线与椭圆 M 交于另一点 B , 连接 BF_2 并延长交椭圆 M 于点 C , 若 $F_1C \perp AB$, 求 k 的值.

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
- (2) $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$.

解析

- (1) 设椭圆的左焦点 F_1 的坐标为 $(-c, 0)$,
- 依题意, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $a - c = 1$,
- 解得 $c = 1$, $a = 2$,
- $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3$,
- $\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
- (2) 由 (1) 得, $A(-2, 0)$, 直线 AB 的方程为 $y = k(x + 2)$,

$$\begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

设点 $B(x_B, y_B)$,

$$\therefore -2x_B = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \text{ 即 } x_B = \frac{-8k^2 + 6}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore y_B = k(x_B + 2) = \frac{12k}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore B\left(\frac{-8k^2 + 6}{3 + 4k^2}, \frac{12k}{3 + 4k^2}\right).$$

$\therefore F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$,

$$k_{BF_2} = \frac{4k}{1 - 4k^2}, k_{CF_1} = -\frac{1}{k},$$

$\therefore$ 直线 BF_2 方程为 $y = \frac{4k}{1-4k^2}(x-1)$, 直线 CF_1 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x+1)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{4k}{1-4k^2}(x-1) \\ y = -\frac{1}{k}(x+1) \end{cases} \text{得 } C(8k^2-1, -8k),$$

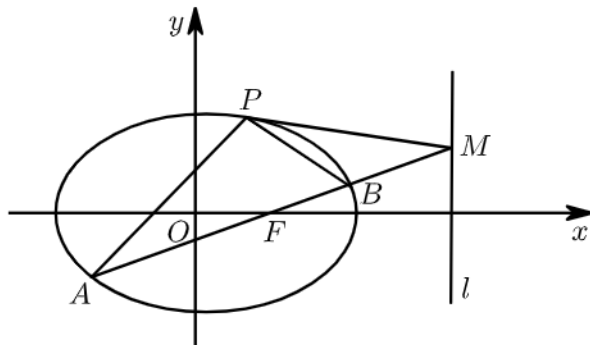
代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 得 $192k^4 + 208k^2 - 9 = 0$,

即 $(24k^2-1)(8k^2+9) = 0$,

$$\text{得 } k^2 = \frac{1}{24},$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

14 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记

PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意, 证明见解析.

解析

(1) 由 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上得, $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$ ①

依题设知 $a = 2c$, 则 $b^2 = 3c^2$ ②,

②代入①解得 $c^2 = 1, a^2 = 4, b^2 = 3$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 方法一: 由题意可设 AB 的斜率为 k ,

则直线 AB 的方程为 $y = k(x-1)$ ③

代入椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 并整理, 得 $(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4(k^2 - 3) = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则有 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4(k^2 - 3)}{4k^2 + 3} \quad ④$$

在方程③中令 $x = 4$ 得, M 的坐标为 $(4, 3k)$.

$$\text{从而 } k_1 = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1}, k_2 = \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1}, k_3 = \frac{3k - \frac{3}{2}}{4 - 1} = k - \frac{1}{2}.$$

注意到 A, F, B 共线, 则有 $k = k_{AF} = k_{BF}$, 即有 $\frac{y_1}{x_1 - 1} = \frac{y_2}{x_2 - 1} = k$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} = \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} \right) \\ &= 2k - \frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} \quad ⑤ \end{aligned}$$

$$\text{④代入⑤得 } k_1 + k_2 = 2k - \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{8k^2}{4k^2 + 3} - 2}{\frac{4(k^2 - 3)}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2}{4k^2 + 3} + 1} = 2k - 1,$$

又 $k_3 = k - \frac{1}{2}$, 所以 $k_1 + k_2 = 2k_3$. 故存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意.

方法二: 设 $B(x_0, y_0) (x_0 \neq 1)$, 则直线 FB 的方程为: $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$,

令 $x = 4$, 求得 $M\left(4, \frac{3y_0}{x_0 - 1}\right)$,

从而直线 PM 的斜率为 $k_3 = \frac{2y_0 - x_0 + 1}{2(x_0 - 1)}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } A\left(\frac{5x_0 - 8}{2x_0 - 5}, \frac{3y_0}{2x_0 - 5}\right),$$

则直线 PA 的斜率为 $k_1 = \frac{2y_0 - 2x_0 + 5}{2(x_0 - 1)}$, 直线 PB 的斜率为: $k_2 = \frac{2y_0 - 3}{2(x_0 - 1)}$,

$$\text{所以 } k_1 + k_2 = \frac{2y_0 - 2x_0 + 5}{2(x_0 - 1)} + \frac{2y_0 - 3}{2(x_0 - 1)} = \frac{2y_0 - x_0 + 1}{x_0 - 1} = 2k_3,$$

故存在常数 $\lambda = 2$ 符合题意.