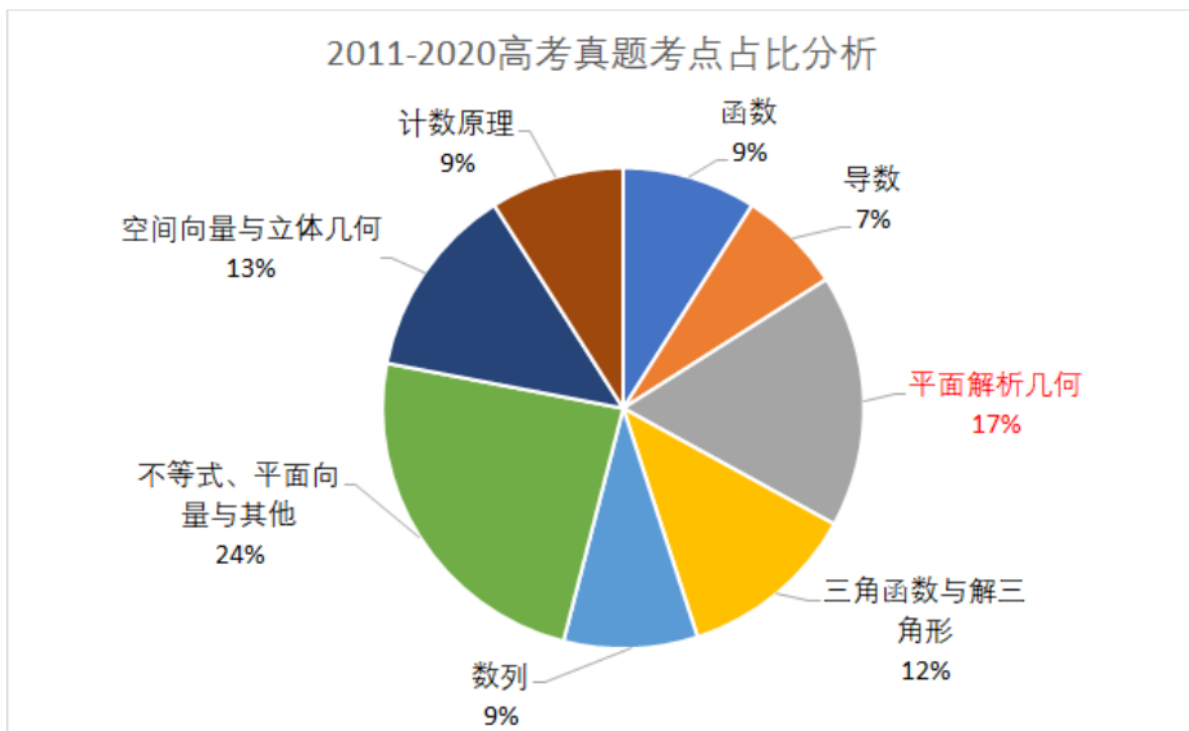


曲线的方程与性质

1. 考情分析



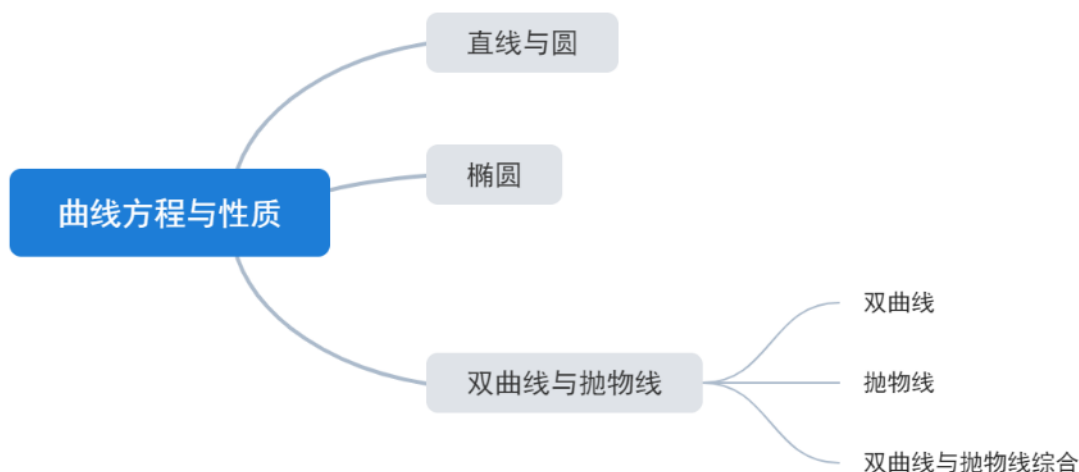
考点占比



考点分析

2011-2020 高考真题考点分析				
考点	直线与圆	椭圆小题	双曲线与抛物线小题	椭圆大题
2011			6 (文)	18 (理), 18 (文)
2012	8 (理), 12 (文)		11 (文)	19 (理), 19 (文)
2013	5 (文)		5 (理), 11 (文)	18 (理), 18 (文)
2014			5 (理), 6 (文)	18 (理), 18 (文)
2015			6 (理), 5 (文)	19 (理), 19 (文)
2016			6 (理), 4 (文)	19 (理), 19 (文)
2017			5 (理), 5 (文)	19 (理), 20 (文)
2018			7 (理), 7 (文)	19 (理), 19 (文)
2019			5 (理), 6 (文)	18 (理), 19 (文)
2020	12		7	18

2. 知识梳理



一、直线与圆

1. 真题分析

不含参

- 1 已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上，点 $M(0, \sqrt{5})$ 在圆 C 上，且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，则圆 C 的方程为 _____ .

答案 $(x - 2)^2 + y^2 = 9$

解析 设 $C(a, 0)$ ， $(a > 0)$ ，则 $\frac{|2a|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow a = 2$ ， $r = \sqrt{2^2 + 5} = 3$ ，
故圆 C 的方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.

含参

- 2 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$)相交于 A ， B 两点，若 $|AB| = 6$ ，则 r 的值为 _____ .

答案 5

解析 $\because$ 直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A 、 B 两点, O 为坐标原点, 若 $|AB| = 6$

$$\therefore \text{圆心 } O(0, 0) \text{ 到直线 } x - \sqrt{3}y + 8 = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|8|}{\sqrt{1+3}} = 4,$$

$$\therefore r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

故答案为: 5.

3 已知过点 $P(2, 2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 5$ 相切, 且与直线 $ax - y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$ ().

A. $-\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

答案 C

解析 因为点 $P(2, 2)$ 满足圆 $(x-1)^2 + y^2 = 5$ 的方程,

所以 P 在圆上,

又过点 $P(2, 2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 5$ 相切, 且与直线 $ax - y + 1 = 0$ 垂直,

所以切点与圆心连线与直线 $ax - y + 1 = 0$ 平行,

$$\text{所以直线 } ax - y + 1 = 0 \text{ 的斜率为: } a = \frac{2-0}{2-1} = 2.$$

故选 C.

2. 思路总结

利用直线与圆的几何性质计算求解, 注意多运用点到直线距离公式进行直线和圆的位置关系判断。

3. 模拟演练

不含参

- 4 已知圆 C 的圆心在直线 $x - 2y - 3 = 0$ 上，且过点 $A(2, -3)$ ， $B(-2, -5)$ ，则圆 C 的标准方程为_____。

答案 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$

解析 由已知，线段 AB 的中垂线所在直线与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 的交点即为圆 C 的圆心，

$$\text{线段} AB \text{的斜率为: } K_{AB} = \frac{-3 + 5}{2 - (-2)} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{线段} AB \text{的中垂线所在直线的斜率为} -\frac{1}{K_{AB}} = -2,$$

又：线段 AB 的中点为 $(0, -4)$ ，

$$\therefore \text{线段} AB \text{的中垂线所在直线方程为: } y + 4 = -2x,$$

$$\text{即 } 2x + y + 4 = 0,$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases},$$

$$\text{求得 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 圆 C 的圆心坐标为 $(-1, -2)$ ，

$$\therefore \text{圆} C \text{的半径} r \text{满足: } r^2 = (2 + 1)^2 + (-3 + 2)^2 = 10,$$

$$\therefore \text{圆} C \text{的标准方程为 } (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10.$$

- 5 已知直线 $l: x - y = 1$ 与圆 $: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ 相交于 A, C 两点，点 B, D 分别在圆上运动，且位于直线 l 的两侧，则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为（ ）。

- A. $\sqrt{30}$ B. $2\sqrt{30}$ C. $\sqrt{51}$ D. $2\sqrt{51}$

答案 A

解析 把圆 $: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ 化为标准方程 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 3$ ，

圆心 $(1, -1)$ ，半径 $r = \sqrt{3}$ ，

直线与圆相交，由点到直线的距离公式，

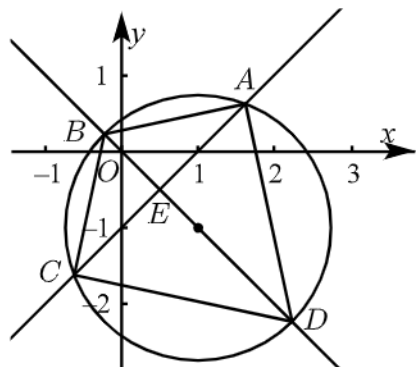
$$\text{弦心距} d = \frac{|1 \times 1 - 1 \times (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{由勾股定理得: 半弦长为: } \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

弦长为 $|AC| = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$.

又 $\because B, D$ 两点在圆上, 并且位于直线 AC 的两侧, 四边形 $ABCD$ 的面积可以看出是两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的面积之和 .

如图所示,



当 B, D 为如图所示的位置, AC 交 BD 于 E ,

即 BD 为弦 AC 的垂直平分线时 (即为直径时), 两三角形的面积之和最大, 即四边形 $ABCD$ 的面积最大,

最大面积为:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times |AC| \times |BE| + \frac{1}{2} \times |AC| \times |DE| \\ &= \frac{1}{2} |AC| \times |BD| = \sqrt{30} . \end{aligned}$$

故选 A .

6 过点 $(1, 0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 交圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 于 A, B 两点, 则弦 AB 的长为 _____ .

答案 $2\sqrt{2}$

解析 直线 l 过点 $(1, 0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 则直线 $l: x - y - 1 = 0$,

由: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$, 可得:

$$(x-1)^2 + (x-3)^2 = 4, \text{ 得 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

则有: $x_1 = 3, x_2 = 1$,

$$\therefore |AB| = |x_1 - x_2| \times \sqrt{1^2 + 1} = 2\sqrt{2} .$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

7 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 与 x 轴相切, 且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程为 _____ .

答案 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 或 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$

解析 设圆心横坐标为 b ,

又: 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 与 x 轴相切,

$\therefore$ 圆心为 $(b, 3b)$, 半径 $r = |3b|$,

设圆心到直线 $x - y = 0$ 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|3b - b|}{\sqrt{2}} = |\sqrt{2}b|,$$

又: 圆被直线 $x - y = 0$ 截得弦长为 $2\sqrt{7}$,

$\therefore$ 有 $(\sqrt{7})^2 = r^2 - d^2$, 即 $9b^2 - 2b^2 = 7$,

解得 $b = \pm 1$,

$\therefore$ 圆方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 或 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$.

8 过点 $A(-3, 2)$, $B(-5, -2)$, 且圆心在直线 $3x - 2y + 4 = 0$ 上的圆的半径为 _____ .

答案 $\sqrt{10}$

解析 $\because A(-3, 2), B(-5, -2)$,

$$\therefore k_{AB} = \frac{-2-2}{-5-(-3)} = 2, \text{ } AB \text{ 的中点坐标为 } (-4, 0),$$

$\therefore AB$ 的垂直平分线方程为 $y = -\frac{1}{2}(x+4)$, 即 $x + 2y + 4 = 0$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases},$$

$\therefore$ 所求圆的圆心坐标为 $(-2, -1)$,

$$\text{故半径 } r = \sqrt{(-3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}.$$

含参

已知 m 为实数，直线 $l_1 : mx + y - 1 = 0$ ， $l_2 : (3m - 2)x + my - 2 = 0$ ，则“ $m = 1$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的 () .

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析

$$l_1 : mx + y - 1 = 0 .$$

$$l_2 : (3m - 2)x + my - 2 = 0 .$$

$$\text{若 } l_1 // l_2, \text{ 则 } \frac{1}{m} = \frac{m}{3m - 2} .$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0 .$$

$$(m - 1)(m - 2) = 0 .$$

$$m = 1 \text{ 或 } 2 .$$

$$m = 1 \text{ 时, } x + y - 1 = 0, x + y - 2 = 0 .$$

$$m = 2 \text{ 时, } 2x + y - 1 = 0, 4x + 2y - 2 = 0, \text{ 重合, 故排除.}$$

$$\text{故 } m = 1 .$$

即“ $m = 1$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的充要条件 .

故选 A .

10 若直线 $y = x - 2$ 被圆 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 所截的弦长为 $2\sqrt{2}$ ，则实数 a 的值为 () .

A. 0 或 4

B. -1 或 $\sqrt{3}$

C. 1 或 3

D. -2 或 6

答案 A

解析

$$\because \text{直线 } y = x - 2 \text{ 被圆 } (x - a)^2 + y^2 = 4 \text{ 所截得的弦长为 } 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{圆心 } (a, 0) \text{ 到直线 } y = x - 2 \text{ 的距离为 } d = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{|a - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|a - 2|}{\sqrt{2}}, \text{ 则 } |a - 2| = 2, \text{ 解得 } a = 4 \text{ 或 } a = 0 .$$

故选：A .

- 11 已知直线 $ax + y - 2 = 0$ 与圆心为 C 的圆 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则实数 $a =$ _____ .

答案 $4 \pm \sqrt{15}$

解析 由题意, 圆心为 $C(1, a)$, 半径是 2,
 C 到直线 $ax + y - 2 = 0$ 的距离等于 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$,
 于是有 $\frac{|1 \times a + a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{3}$,
 即 $a^2 - 8a + 1 = 0$, 解得 $a = 4 \pm \sqrt{15}$.

- 12 若直线 $3x + 4y = m$ 与圆 $x^2 + y^2 = m$ 相切, 则实数 $m =$ _____ .

答案 25

解析 相切时, 圆心到直线距离等于半径, 即 $d = r$,
 圆心为 $(0, 0)$, 半径为 $\sqrt{m}$,
 可得 $\frac{|-m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{m}$,
 解得 $m = 25$.

- 13 已知直线 $ax + y - 1 = 0$ 与圆 $C: (x - 1)^2 + (y + a)^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 则实数 a 的值为 _____ .

答案 -1或1

解析 $\because$ 由题意得到 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore$ 圆心 $C(1, -a)$ 到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离 $d = r \sin 45^\circ$,
 即 $\frac{|a - a - 1|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 整理得: $1 + a^2 = 2$, 即 $a^2 = 1$.

解得： $a = -1$ 或 1 .

14 已知直线 $l: x + ay = 2$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 相交于 M, N 两点, 若 $|MN| = 2\sqrt{3}$, 则直线 l 的斜率为

() .

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

答案 B

解析 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径为 2 ,

$$\text{圆心到直线 } l: x + ay = 2 \text{ 的距离 } d = \frac{|-2|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\text{由题意, } 2\sqrt{3} = 2\sqrt{4 - \frac{4}{1+a^2}}, \text{ 得 } a = \pm\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的斜率为 } k = -\frac{1}{a} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选B .

15 设直线 $y = x + 2a$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____ .

答案 $\pm\sqrt{2}$

解析 $x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 可化为 $x^2 + (y - a)^2 = 2 + a^2$,

$$\text{由题意可知, 圆心 } (0, a) \text{ 到直线 } x - y + 2a = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|a|}{\sqrt{2}},$$

$$\text{由直线与圆相交的性质可知, } AB = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{a^2 + 2 - \frac{1}{2}a^2} = 2\sqrt{3},$$

解可得 $a = \pm\sqrt{2}$.

故答案为： $\pm\sqrt{2}$.

二、椭圆

1. 例题讲解

16 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点 $F(2, 0)$ 点 $A(-2, 1)$ 为椭圆 E 内一点, 若椭圆 E 上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 8$, 则椭圆 E 的离心率的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right]$
C. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$

B. $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right)$
D. $\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right]$

答案 A

解析

椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点 $F(2, 0)$,

另一个焦点为 $F'(-2, 0)$,

由椭圆的定义可得 $2a = |PF| + |PF'|$,

即 $|PF'| = 2a - |PF|$,

可得 $|PA| - |PF'| = 8 - 2a$,

由 $||PA| - |PF'|| \leq |AF'| = 1$,

可得 $-1 \leq 8 - 2a \leq 1$,

解得 $\frac{7}{2} \leq a \leq \frac{9}{2}$,

又 $c = 2$, 可得

$$e = \frac{c}{a} \in \left[\frac{4}{9}, \frac{4}{7}\right].$$

故选 A.

2. 思路总结

利用椭圆的几何性质计算求解, 椭圆定义是隐含条件, 不要遗忘.

3. 模拟演练

17 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 C 上的点, $PF_2 \perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 则 C 的离心率为 ().

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
C. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

答案 D

解析

方法一：由题意可设 $|PF_2| = m$ ，

结合条件可知 $|PF_1| = 2m$ ， $|F_1F_2| = \sqrt{3}m$ ，

$$\text{故离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{|F_1F_2|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{\sqrt{3}m}{2m + m} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选D.

方法二：由 $PF_2 \perp F_1F_2$ 可知 P 点的横坐标为 c ，

$$\text{将 } x = c \text{ 代入椭圆方程可得 } y = \pm \frac{b^2}{a},$$

$$\therefore |PF_2| = \frac{b^2}{a},$$

$$\text{又由 } \angle PF_1F_2 = 30^\circ \text{ 可得 } |F_1F_2| = \sqrt{3}|PF_2|,$$

$$\text{故 } 2c = \sqrt{3} \cdot \frac{b^2}{a},$$

$$\text{变形可得 } \sqrt{3}(a^2 - c^2) = 2ac,$$

$$\text{等式两边同除以 } a^2, \text{ 得 } \sqrt{3}(1 - e^2) = 2e,$$

$$\text{解得 } e = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } e = -\sqrt{3} \text{ (舍去)}.$$

故选D.

18 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，过 F_2 的直线 l 交 C 于

A, B 两点，若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，则椭圆 C 的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$
B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$
D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

答案 A

解析

$\triangle A_1FB$ 的周长 $= AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2 = 4a = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$, 故 $c = \frac{\sqrt{3}}{3}a = 1$, $b = \sqrt{2}$,

选A

19 设 e_1, e_2 , 分别为具有公共焦点 F_1, F_2 的椭圆和双曲线的离心率, P 为两曲线的一个公共点, 且满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2}$ 的值为 ().

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. 2

D. 不确定

答案 C

解析 因为 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$,

所以 $PF_1 \perp PF_2$,

设椭圆的长半轴是 a_1 , 双曲线的实半轴是 a_2 , 半焦距是 c , $PF_1 = m$, $PF_2 = n$, $m > n$,

根据椭圆和双曲线的定义可得: $m + n = 2a_1$, $m - n = 2a_2$,

解得: $(a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 = (2c)^2$,

化简得: $a_1^2 + a_2^2 = 2c^2$,

$\therefore \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 2$.

故选C.

三、双曲线的方程与性质

1. 真题分析

20 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A 、 B 两点, 设 A 、 B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

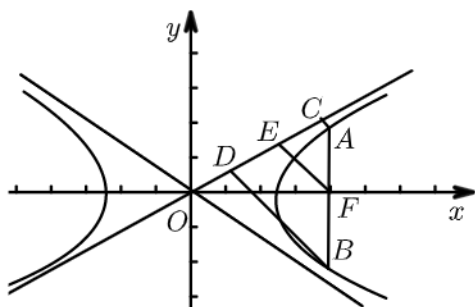
B. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$

D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 C

解析 方法一：由题意可得图象如图，



CD 是双曲线的一条渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ， $F(c, 0)$ ，

$AC \perp CD$ ， $BD \perp CD$ ， $FE \perp CD$ ， $ACDB$ 是梯形．

F 是 AB 的中点， $EF = \frac{d_1 + d_2}{2} = 3$ ，

$$EF = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b，$$

所以 $b = 3$ ，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2，可得 $\frac{c}{a} = 2$ ，

可得： $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 4$ ，解得 $a = \sqrt{3}$ ．

则双曲线的方程为： $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ ．

故选 C．

方法二：因为直线 AB 经过双曲线的右焦点，

所以不妨取 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ， $B\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$ ，取双曲线的一条渐近线 $bx - ay = 0$ ，

由点到直线的距离公式可得 $d_1 = \frac{|bc - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc - b^2}{c}$ ， $d_2 = \frac{|bc + b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc + b^2}{c}$ ，

因为 $d_1 + d_2 = 6$ ，

所以 $\frac{bc - b^2}{c} + \frac{bc + b^2}{c} = 6$ ，

所以 $2b = 6$ ，得 $b = 3$ ．

因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2，

所以 $\frac{c}{a} = 2$ ，

所以 $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 4$ ，

所以 $\frac{a^2 + 9}{a^2} = 4$ ，

解得 $a^2 = 3$ ，

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ ．

故选 C．

21 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，离心率为 $\sqrt{2}$ ．若经过 F 和 $P(0, 4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为 () ．

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

B. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

D. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

答案 B

解析 方法一：由题意得 $a = b$ ， $\frac{4}{-c} = -1 \Rightarrow c = 4$ ， $a = b = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ ，选B．

方法二：由过 F 和 $P(0, 4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线可得 $\frac{4}{c} = \frac{b}{a}$ ，由离心率为 $\sqrt{2}$ 可知 $c = \sqrt{2}a$ ，代入得 $b = 2\sqrt{2}$ ， $a = 2\sqrt{2}$ ．

故选B．

22 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，点 A 在双曲线的渐近线上， $\triangle OAF$ 是边长为2的等边三角形 (O 为原点)，则双曲线的方程为 () ．

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

B. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析 方法一：由题意结合双曲线的渐近线方程可得：

$$\begin{cases} c = 2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \\ \frac{b}{a} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{cases}, \text{解得 } a^2 = 1, b^2 = 3,$$

双曲线方程为： $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ．故选D．

方法二： $\triangle OAF$ 是边长为2的正三角形，则 $c = 2$ ，一条渐近线斜率为 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ，即 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，

解得 $a^2 = 1$ ， $b^2 = 3$ ，所以双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ．

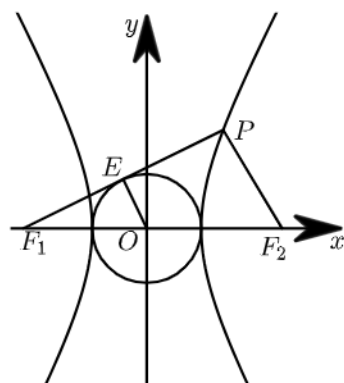
2. 思路总结

解析 因为 E 为圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的点,

所以 $|OE| = a = \sqrt{3}$,

因为 $\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OF_1})$,

所以 E 是 PF_1 的中点 ,



又因为 O 是 F_1F_2 的中点 ,

所以 $|PF_2| = 2|OE| = 2a = 2\sqrt{3}$, 且 $PF_2 \parallel OE$,

又因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{3}$,

所以 $|PF_1| = 4\sqrt{3}$,

因为 PF_1 是圆 O 的切线 ,

所以 $OE \perp PF_1$,

所以 $PF_2 \perp PF_1$,

因为 $|F_1F_2| = 2c$,

所以 $4c^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2$, 所以 $c^2 = 15$,

所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 12$,

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$.

25 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 虚轴的上端点为 B , P 为左支上的一个动点 , 若 $\triangle PBF$ 周长的最小值等于实轴长的 3 倍 , 则该双曲线的离心率为 () .

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\sqrt{2}$

答案 A

解析 由题意可得 $B(0, b)$, $F(c, 0)$,

设 $F'(-c, 0)$,

由双曲线的定义可得 $|PF| - |PF'| = 2a$, $|PF| = |PF'| + 2a$, $|BF| = |BF'| = \sqrt{b^2 + c^2}$,

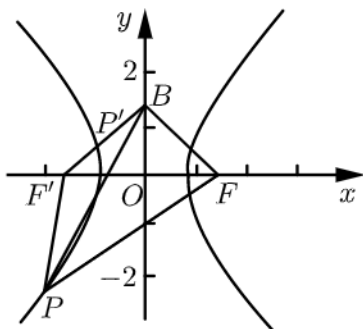
则 $\triangle BPF$ 的周长为 $|PB| + |PF| + |BF| = |PB| + |PF'| + 2a + |BF'| \geq 2|BF'| + 2a$,

当且仅当 B, P, F' 共线, 取得最小值, 且为 $2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$,

由题意可得 $6a = 2a + 2\sqrt{b^2 + c^2}$, 即 $4a^2 = b^2 + c^2 = 2c^2 - a^2$, 即 $5a^2 = 2c^2$,

则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选 A.



- 26 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$, 以原点为圆心, 双曲线的实半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于 A, B, C, D 四点, 四边形的 $ABCD$ 的面积为 $2b$, 则双曲线的方程为 ().

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$
 B. $\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{3} = 1$
 C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$
 D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

答案 D

解析 方法一: 根据圆和双曲线的对称性,

可知四边形 $ABCD$ 为矩形,

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{2}x$,

圆的方程为 $x^2 + y^2 = 4$,

不妨设交点 A 在第一象限,

由 $y = \frac{b}{2}x$, $x^2 + y^2 = 4$ 得 $x_A = \frac{4}{\sqrt{4+b^2}}$, $y_A = \frac{2b}{\sqrt{4+b^2}}$,

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $4x_A y_A = \frac{32b}{4+b^2} = 2b$,

解得 $b^2 = 12$,

故所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

故选D.

方法二：以原点为圆心，双曲线的实半轴长为半径长的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 4$,

双曲线的两条渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{2}x$,

设 $A\left(x, \frac{b}{2}x\right)$,

则：四边形 $ABCD$ 的面积为 $2b$,

$$\therefore 2x \cdot bx = 2b,$$

$$\therefore x = \pm 1,$$

将 $A\left(1, \frac{b}{2}\right)$ 代入 $x^2 + y^2 = 4$,

$$\text{可得 } 1 + \frac{b^2}{4} = 4,$$

$$\therefore b^2 = 12,$$

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

故选D.

27 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点为 $F(2, 0)$, 且双曲线的渐近线与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 3$ 相切, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1$
C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

B. $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$
D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析 方法一：已知上双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 与圆方程联立得

$$\begin{cases} y = \pm \frac{b}{a}x \\ (x - 2)^2 + y^2 = 3 \end{cases},$$

代入得到 $(1 + \frac{b^2}{a^2})x^2 - 4x + 1 = 0$, 因为渐近线与圆相切, 所以 $\Delta = 4^2 - 4(1 + \frac{b^2}{a^2}) = 0$,

又因为双曲线一个焦点为 $F(2, 0)$, 所以 $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2^2 \\ \frac{b^2}{a^2} = 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{cases}$,

故双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

故答案为D.

方法二：由题意知，双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，即 $bx \pm ay = 0$ ，

因为双曲线的渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 相切，所以 $\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3}$ ，由双曲线的一个焦点

为 $F(2,0)$ 可得 $a^2 + b^2 = 4$ ，所以 $|b| = \sqrt{3}$ ，所以 $b^2 = 3$ ，所以 $a^2 = 1$ ，故双曲线的方程为

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

故选D.

- 28 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点为 $F(c, 0) (c > 0)$ ，且离心率等于 $\sqrt{5}$ ，若该双曲线的一条渐近线被圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$ ，则该双曲线的标准方程为 ().

- A. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
 B. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$
 C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$
 D. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{25} = 1$

答案 C

解析 由题意可得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$ ，

双曲线的一条渐近线方程为 $bx - ay = 0$ ，

圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 的圆心为 $(c, 0)$ ，半径为 c ，

可得圆心到渐近线的距离为 $d = \frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}} = b$ ，

渐近线被圆 $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$ ，

可得 $2\sqrt{5} = 2\sqrt{c^2 - b^2} = 2a$ ，

可得 $a = \sqrt{5}$ ， $c = 5$ ， $b = 2\sqrt{5}$ ，

则双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ 。

故选C.

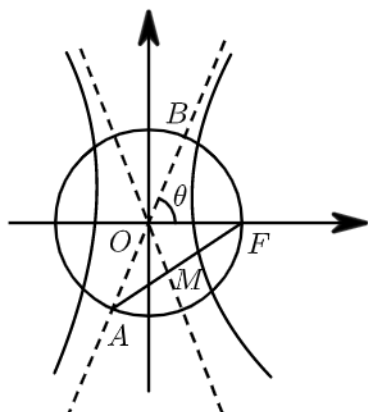
- 29 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F ，圆 $x^2 + y^2 = c^2$ (c 为双曲线的半焦距) 与双曲线 C 的一条渐近线交于 A, B 两点，且线段 AF 的中点 M 落在另一条渐近线上，则双曲线 C 的方程是 ().

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$
C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$
D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析 草图如下：



$$\therefore \tan \theta = \frac{b}{a},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$y_B = |OB| \cdot \sin \theta = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$x_B = |OB| \cdot \cos \theta = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\text{即 } B \left(\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\text{根据对称性 } A \left(-\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\text{则 } M \left(\frac{1}{2} \left(c - \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -\frac{bc}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\text{将 } M \text{ 点代入 } y = -\frac{b}{a}x, \text{ 整理可得 } \begin{cases} a^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases},$$

$$\text{即双曲线方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

故选D.

四、抛物线的方程与性质

1. 真题分析

- 30 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l 。已知点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A 。若 $\angle FAC = 120^\circ$ ，则圆的方程为 _____。

答案 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$

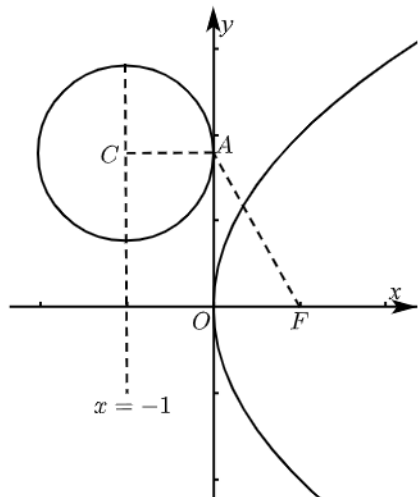
解析 方法一：设圆心坐标为 $C(-1, m)$ ，则 $A(0, m)$ ，焦点 $F(1, 0)$ ，

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 0), \overrightarrow{AF} = (1, -m), \cos \angle CAF = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AF}|} = \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}} = -\frac{1}{2}, \text{解得 } m = \pm\sqrt{3}$$

由于圆 C 与 y 轴得正半轴相切，则取 $m = \sqrt{3}$ ，所求圆的圆心为 $(-1, -\sqrt{3})$ ，半径为 1，

所求圆的方程为 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ 。

方法二：



设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$ ，准线 $l: x = -1$ ，

$\because$ 点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切与点 A ，

$\therefore \angle FAC = 120^\circ, \therefore \angle FAO = 30^\circ$ ，

$$\therefore OA = \frac{OF}{\tan \angle FAO} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1,$$

$\therefore OA = \sqrt{3}$ ，

$\therefore C(-1, \sqrt{3})$ ，圆的半径为 $CA = 1$ ，

故要求的圆的标准方程为 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ 。

2. 思路总结

利用抛物线的几何性质计算求解，注意多利用抛物线定义进行思路转化。

抛物线 $y^2 = 2px$, 其中 $p > 0$, 定义描述 : _____ ,
 焦点坐标是 _____ 及准线方程是 _____ .

3. 模拟演练

- 31 设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线为 l , 过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点 , 分别过 A, B 作 l 的垂线 , 垂足为 C, D , 若 $|AF| = 4|BF|$, 则 $p =$ _____ , 三角形 CDF 的面积
 为 _____ .

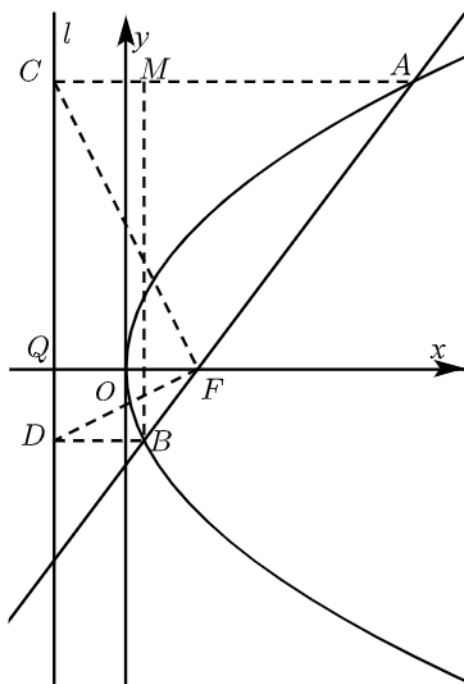
答案 1:2

2:5

解析 方法一 : 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$,

所以 $\frac{p}{2} = 1$, 所以 $p = 2$,

如图所示 , 过点 B 作 $BM \parallel l$, 交直线 AC 与点 M ,



由抛物线的定义知 $|AF| = |AC|$, $|BF| = |BD| = CM$,

且 $|AF| = 4|BF|$,

所以 $|AM| = 3|BF|$, $|AB| = 5|BF|$, 由勾股定理得 $|BM| = 4|BF|$,

所以直线 AB 的斜率为 $k = \tan \angle BAM = \frac{4}{3}$,

设直线 AB 的方程为 $y = \frac{4}{3}(x - 1)$,

点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{4}{3}(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases},$$

消去 y 整理得 $4x^2 - 17x + 4 = 0$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{17}{4},$$

$$\text{所以 } |AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{25}{4},$$

$$\text{所以 } |CD| = |AB| \sin \angle BAM = \frac{25}{4} \times \frac{4}{5} = 5,$$

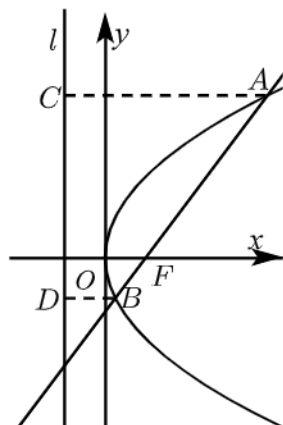
$$\text{所以 } \triangle CDF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5,$$

故答案为: 2, 5.

方法二: $\because$ 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $F(1, 0)$,

$\therefore p = 2$, 即抛物线方程为 $y^2 = 4x$,

$\therefore$ 准线 l 为 $x = -1$,



又: 设过焦点的直线为 $x = my + 1$ 并交抛物线于 A, B ,

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } y^2 - 4my - 4 = 0,$$

又: 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, (设 $y_1 > 0$, $y_2 < 0$),

$$\therefore y_1 + y_2 = 4m, \quad ①$$

$$y_1 y_2 = -4, \quad ②$$

$$\text{又: } |AF| = 4|BF|,$$

$$\therefore \text{由抛物线性质可得 } |AC| = 4|BD|,$$

$$\text{且 } |y_1| = |4y_2| \Rightarrow y_1 = -4y_2,$$

$$\therefore 1 + \frac{y_1^2}{4} = 4\left(1 + \frac{y_2^2}{4}\right),$$

$$\text{解得 } y_1^2 = 4y_2^2 + 12, \quad ③$$

对①式两边平方得： $(y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 = 16m^2$,

解得 $y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8$,

$\therefore |y_1 - y_2| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2} = 4\sqrt{m^2 + 1}$,

又 $\therefore$ 联立 $\begin{cases} y_1^2 = 4y_2^2 + 12 \\ y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8 \\ y_1 = -4y_2 \end{cases}$,

解得 $m^2 = \frac{9}{16}$,

$\therefore |y_1 - y_2| = 4\sqrt{m^2 + 1} = 5$,

$\therefore S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}CD \times P = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_1 - y_2| = 5$.

32 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 直线 $y = k(x - \frac{p}{2})$ 交抛物线于 A, B 两点, 过点 A 作准线的垂线, 垂足为 E , 若等边 $\triangle AFE$ 的面积为 $36\sqrt{3}$, 则 $\triangle BEF$ 的面积为().

A. $6\sqrt{3}$

B. $12\sqrt{3}$

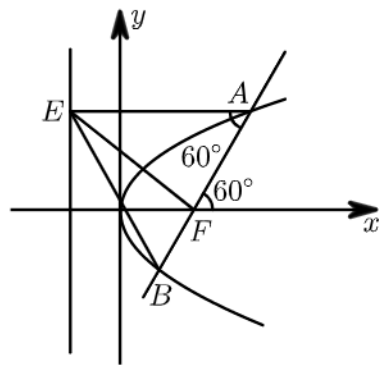
C. 16

D. $24\sqrt{3}$

答案 B

解析 因为 $\triangle AEF$ 为等边三角形, 故 $k = \sqrt{3}$, $\triangle AEF$ 边长为 $2p$,

由 $\frac{1}{2} \times 2p \times 2p \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$, 得 $p = 6$,



抛物线方程为 $y^2 = 12x$, 联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3}(x - 3) \\ y^2 = 12x \end{cases}$,

得 $x^2 - 10x + 9 = 0$,

故 $x_A = 9$, $x_B = 1$,

所以 $|BF| = x_B + \frac{p}{2} = 1 + \frac{6}{2} = 4$,

故 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

故选B.

33 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| = ()$.

A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

B. 6

C. 12

D. $7\sqrt{3}$

答案 C

解析

方法一: $\because y^2 = 3x$,

$\therefore$ 焦点为 $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, 准线为 $x = -\frac{3}{4}$,

$\therefore$ 直线方程为 $y = \tan 30^\circ \left(x - \frac{3}{4}\right)$,

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right),$$

$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow 16x^2 - 168x + 9 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{168}{16} = \frac{21}{2},$$

$$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + p$$

$$= \frac{21}{2} + \frac{3}{4} \times 2$$

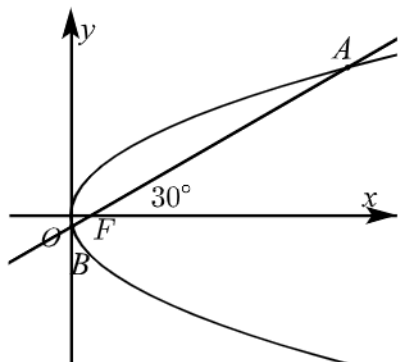
$$= 12.$$

故选 C.

$$\text{方法二: } |AF| = \frac{p}{1 - \cos \theta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = 3(2 + \sqrt{3}),$$

$$|BF| = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} = 3(2 - \sqrt{3}),$$

$$|AB| = |AF| + |BF| = 3(2 + \sqrt{3}) + 3(2 - \sqrt{3}) = 12.$$



若经过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与圆 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 的斜率为 _____.

答案 $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 抛物线的焦点为 $F(1, 0)$, 设直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$, 即 $kx - y - k = 0$, $\therefore$ 直线 l 与圆 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 相切, $\therefore \frac{|4k - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$, 解得 $k = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故答案为 $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

五、双曲线与抛物线结合

1. 真题分析

35 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 ().

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

答案 D

解析 $\therefore$ 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l .

$\therefore F(1, 0)$, 准线 l 的方程为 $x = -1$,

$\therefore l$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B , 且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点),

$\therefore |AB| = \frac{2b}{a}$, $|OF| = 1$, $\therefore \frac{2b}{a} = 4$, $\therefore b = 2a$,

$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}a$,

$\therefore$ 双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$.

故选: D.

36 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ().

- A. $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$
 B. $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$
 C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$
 D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析 双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$

由已知, $\sqrt{3} = \frac{2b}{a}$ ①

又 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线为 $x = -\sqrt{7}$

则 $c = \sqrt{7}$ ②

又 $c^2 = a^2 + b^2$ ③

由①②③得, $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 3 \end{cases}$

故选D.

37 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$
 B. $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$
 C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$
 D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

答案 D

解析 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由点 $(2, \sqrt{3})$ 在渐近线上, 所以

$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 准线 $x = -\sqrt{7}$ 上, 所以 $c = \sqrt{7}$, 由此可解得 $a = 2, b = \sqrt{3}$, 所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, 故选D.

设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)，过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点和点 $(0, b)$ 的直线为 l ，若 C 的一条渐近线与 l 平行，另一条渐近线与 l 垂直，则双曲线 C 的方程为()。

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

D. $x^2 - y^2 = 1$

答案 D

解析 由抛物线方程 $y^2 = 4x$ 可得其焦点为 $F(1, 0)$ ，

过 $F(1, 0)$ 和点 $(0, b)$ 的直线 l 的方程的斜率为 $k = -b$ ，

由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的方程可得其渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

由 C 的一条渐近线与 l 平行，另一条渐近线与 l 垂直可得

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = -b \\ \frac{b}{a} \cdot -b = -1 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ ，

所以双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 1$ 。

故选D。

39 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)的两条渐近线与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$)的准线分别交于 A, B 两点， O 为坐标原点，若双曲线的离心率为2， $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，则 $p =$ ()。

A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. 2

D. 3

答案 C

解析 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，

双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

又抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$)的准线方程是 $x = -\frac{p}{2}$ ，

故 A, B 两点的纵坐标分别是 $y = \pm \frac{pb}{2a}$ ，

双曲线的离心率为2，所以 $\frac{c}{a} = 2$ ，则 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，

所以 A, B 两点的纵坐标分别是 $y = \pm \frac{\sqrt{3}p}{2}$ ，

$\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ， x 轴是 $\angle AOB$ 的角平分线，

$$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{3}p \times \frac{p}{2} = \sqrt{3}, \text{ 得 } p = 2, \text{ 故选 C.}$$

2. 思路总结

(1) 分析圆锥曲线中 a, b, c, e, p 各量之间的关系是求解问题的关键.

(2) 求椭圆、双曲线的离心率, 关键是根据已知条件确定 a, b, c 的等量关系, 然后把 b 用 a, c 代换, 求 $\frac{c}{a}$ 的值; 在双曲线中由于 $e^2 = 1 + (\frac{b}{a})^2$, 故双曲线的渐近线与离心率密切相关.

3. 模拟演练

40 已知双曲线的一个焦点与抛物线 $x^2 = 20y$ 的焦点重合, 且双曲线上的一点 P 到双曲线的两个焦点的距离之差的绝对值等于 6, 则该双曲线的标准方程为 ().

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

D. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

答案 C

解析 $\because$ 抛物线标准方程 $x^2 = 20y$,

则焦点坐标为 $(0, 5)$, 即 $c = 5, c^2 = 25$,

又根据双曲线定义可得 $2a = 6$, 即 $a^2 = 9$,

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore b^2 = 16,$$

$$\text{故双曲线方程为 } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

故选 C.

41 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点重合, 且双曲线的离心率等于 $\sqrt{3}$, 则该双曲线的标准方程为 ().

A. $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{18} = 1$

B. $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{27} = 1$

- C. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1$
 D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

答案 D

解析 根据题意，抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点在 x 轴正半轴上，其坐标为 $(3, 0)$ ，
 则双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中，一个焦点的坐标为 $(3, 0)$ ，即 $c = 3$ ，
 又由双曲线的离心率 $e = \sqrt{3}$ ，则有 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ，解可得 $a = \sqrt{3}$ ，
 则 $b^2 = c^2 - a^2 = 6$ ，
 则双曲线的标准方程为： $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 。
 故选：D。

- 42 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点重合，则该抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为 ()。
- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{14}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 5

答案 B

解析 由题知，双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右焦点坐标为 $(4, 0)$ ，
 所以抛物线的准线为 $x = -4$ ，
 代入双曲线方程解得 $y = \pm \frac{7}{3}$ ，
 所以抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为 $\frac{14}{3}$ 。

- 43 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合，且双曲线的离心率等于 $\sqrt{5}$ ，则该双曲线的实轴长为 ()。
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{1}{2}$
 C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. 1

答案 C

解析

由题意，抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$

$\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合，

$\therefore c = 1$ ，

$\therefore$ 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$ ，

$\therefore \frac{c}{a} = \sqrt{5}$ ，

$\therefore a = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

故实轴长 $2a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

故选C。

44 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点的距离为4，且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$ ，则双曲线的焦距为()。

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. $2\sqrt{5}$

答案 D

解析

$\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左顶点为 $(-a, 0)$ ，渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$ ，抛物线

$y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ，

$\therefore$ 点 $(-a, 0)$ 到点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 的距离为 $\frac{p}{2} + a = 4$ ，由 $\begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}$ ，解得 $x = -\frac{p}{2}$ ， $y = -\frac{pb}{2a}$ ，

则 $\begin{cases} -\frac{p}{2} = -2 \\ -\frac{pb}{2a} = -1 \end{cases}$ ，解得 $p = 4$ ， $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ ，

又 $\therefore \frac{p}{2} + a = 4$ ，则 $a = 2$ ，

$\therefore a = 2, b = 1$ ，

所以双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 $2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}$ ，故D正确；

故选D。

抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 是双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{1-m} = 1 (0 < m < 1)$ 的右焦点, P 是 C_1 与 C_2 的交点, 点 Q 在 C_1 的准线上, $\triangle FPQ$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形, 则 C_2 的离心率为 ().

A. $\sqrt{2} + 1$

B. $2\sqrt{2} + 3$

C. $2\sqrt{10} - 3$

D. $2\sqrt{10} + 3$

答案 A

解析 设 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $P\left(\frac{p}{2}, y_0\right)$, $Q\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$,

$$PF = PQ,$$

$$\text{即 } y_0 = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p,$$

$$\therefore P\left(\frac{p}{2}, p\right),$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{m + 1 - m}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = m + 1 - m = 1,$$

$$\therefore c = 1,$$

$$\therefore F(1, 0), \frac{p}{2} = 1, p = 2,$$

$$\therefore P(1, 2),$$

$$\frac{1}{m} - \frac{4}{1-m} = 1,$$

$$\text{解得: } m = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

$$\because m \in (0, 1),$$

$$\therefore m = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2,$$

$$\therefore e = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

46 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $3x^2 - y^2 = 3a^2 (a > 0)$ 的左、右焦点, P 是抛物线 $y^2 = 8ax$ 与双曲线的一个交点, 若 $|PF_1| + |PF_2| = 12$, 则抛物线的准线方程为 ().

A. $x = -4$

B. $x = -3$

C. $x = -2$

D. $x = -1$

答案 C

解析 $3x^2 - y^2 = 3a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1,$

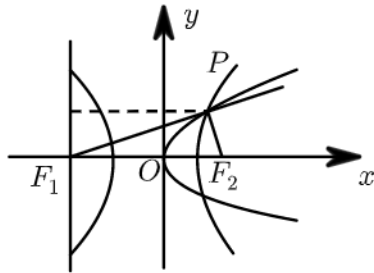
$$\therefore c^2 = 4a^2, c = 2a,$$

$$\therefore F_1(-2a, 0), F_2(2a, 0),$$

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3a^2 \\ y^2 = 8ax \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 8ax - 3a^2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 3a \text{ 或 } x = -\frac{a}{3} \text{ (舍去)},$$

$$\text{故 } P(3a, 2\sqrt{6}a),$$



$$\therefore |PF_1| = \sqrt{(3a + 2a)^2 + (2\sqrt{6}a)^2} = 7a,$$

$$\therefore |PF_2| = \sqrt{(3a - 2a)^2 + (2\sqrt{6}a)^2} = 5a,$$

$$|PF_1| + |PF_2| = 12a = 12, \therefore a = 1,$$

$$\therefore \text{抛物线方程为 } y^2 = 8x,$$

$$\therefore \text{准线方程为 } x = -2.$$

故选C.