

向量数量积的应用

1. 知识梳理



一、数量积直接转化

1. 真题分析

1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点, 若

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{CB} = 8, \text{ 求 } k \text{ 的值.}$$

2. 思路总结

在向量与圆锥曲线相结合的题目中, 主要是利用向量的相等、平行、垂直去寻找坐标之间的数量关系, 往往要和根与系数的关系结合运用.

①问题的条件以向量形式呈现, 间接考查向量几何性质、运算性质. 找出参数的数量关系, 再结合联立方程所得一元二次方程情况, 用韦达定理结论代入向量结论;

②所求问题以向量的形式呈现. 先把所求问题的向量形式化简得出熟悉的关系式, 再用常规作法化简求解;

③问题的条件及待求的问题均以向量的形式呈现, 同样先将向量化简找到关系式, 再利用圆锥曲线的性质, 化简求解;

一般有两类题型:

①几何法: 图形很规整或很有特点, 利用相关平面图形性质, 可以得出相关数理结论. 如得了中点, 对称等特性, 再利用圆锥曲线数理特点化简;

②代数法: 一般有利用向量的等量关系, 利用向量的数量积关系得结论.

3. 模拟演练

- 2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上、下顶点分别为 B_1, B_2 , F 为其右焦点, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 1$, 且该椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 过点 A_1 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P . 交直线 $x = 4$ 于点 D , 直线 A_2D 与椭圆 C 的另一个交点为 G , 直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H . 若 $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1H}$. 求 λ 取值范围.

3 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F_1(-1, 0)$ ，上顶点为 B_1 ，原点 O 到直线 B_1F_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 若点 T 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，点 A 为椭圆的右顶点，是否存在过点 A 的直线 l 交椭圆 C 于点 B (异于点 A)，使得 $\overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{14}}{7} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

二、数量积垂直转化

1. 例题分析

4 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点为 F_1, F_2 ，右顶点为 A ，上顶点为 B 。已知

$$|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1 F_2|.$$

- (1) 求椭圆的离心率；
- (2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点，以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 ，经过原点的直线 l 与该圆相切。求直线的斜率。

2. 思路总结

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$x_1 x_2 = \frac{\frac{m^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \quad y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}},$$

$$0 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1 + k^2)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{(1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1)}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{\frac{2k^2 m^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + m^2,$$

$$\text{两边同时乘以 } \frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}, \text{ 整体处理得 } (1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1) - \frac{2k^2 m^2}{b^2} + m^2(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}) = 0,$$

$$\text{消去高次项 } \frac{k^2 m^2}{b^2} \text{ 得 } \frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} = 0,$$

即找了 a, b, m, k 的关系式.

推广: 以 AB 为直径的圆过焦点 F_1 ,

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_1 A} \cdot \overrightarrow{F_1 B} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + c)(x_2 + c) + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow (1 + k^2)x_1 x_2 + (km + c)(x_1 + x_2) + m^2 + c^2 = 0$$

可以看得出, 同样可以采用整体法处理.

3. 模拟演练

- 5 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle AF_1 B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设椭圆 C 的上顶点为 P , 证明: 当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.

三、定值问题

1. 真题分析

6 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点，斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交

椭圆 C 于 B, D 两点，且 A, B, D 三点不重合。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 求证：直线 AB, AD 的斜率之和为定值。

(3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，说明理由？

2. 思路总结

圆锥曲线的定点、定值问题涉及到曲线上的动点及动直线, 常用下面方法:

(1) 参数法:

① 引入参数求定值:

设动点的坐标 (或直线方程), 引入参数; 结合已知条件将目标式用参变量表示; 再根据点在某曲线上代入消参求定值, 或经过整理化简后恒为定值. 注意到繁杂难是代数运算是此类问题的特点, 设而不求, 整体思想和消元的思想的运用可有效简化运算;

② 引入参数求定点:

第一步: 引进参数, 参数一般为点的坐标、直线的斜率、直线的夹角等;

第二步: 列出关系, 根据题设条件, 表示出对应的动态直线或曲线方程;

第三步: 探求直线过定点. 若是动态的直线方程, 将动态的直线方程转化为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 的形式, 则直线恒点 (x_0, y_0) ;

③ 在设参的选取上, 解题方案通常有两种: 设直线或设点, 只有合理的选参, 才能减少运算, 建议设直线, 设点的话参数个数较多, 也不好转化, 尤其是设椭圆上的点, 因为坐标满足椭圆方程, 这是二次方程, 只能整体代换, 不好转化.

(2) 由特殊到一般法:

这是解决定点或定值问题, 而题设条件又没有给出这个定值 (定点), 让证明定值 (定点), 我们可以认为, 由于这个定值 (定点) 对符合要求的一些特殊情况必然成立, 那么我们根据特殊情况先找到这个定值 (定点), 明确了解决目标, 再推理证明;

第一步: 研究特殊情形, 从问题特殊情形出发, 如直线的斜率不存在, 或直线过原点等, 得到目标关系所要探求的定值 (定点);

第二步: 探究一般情况;

第三步: 下结论, 综合上面两种情况定结论;

定点、定值问题着重考察逻辑推理的能力, 主要是式子复杂, 计算量大, 要仔细确保计算不出错, 结合图形的对称性、结合圆锥曲线的特殊性质等解题会找到巧妙方法和提高效率.

3. 模拟演练

设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点与抛物线 $C_2: x^2 = 4y$ 的焦点重合, F_1, F_2 分别是椭圆 C_1 的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 过椭圆 C_1 右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A, B 两点.

- (1) 求椭圆 C_1 的方程.
- (2) 是否存在直线 l , 使得 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$, 若存在, 求出直线 l 的方程: 若不存在, 说明理由.
- (3) 设点 $M(t, 0)$ 是一个动点, 若直线 l 的斜率存在, 且 N 为 AB 中点, $MN \perp AB$, 求实数 t 的取值范围.

8 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，短轴长为2，若

点 A 、 B 分别是椭圆 E 的左、右顶点，动点 $M(a, t)$ ， $(t \geq \sqrt{2})$ ，直线 AM 交椭圆 E 于点 P 。

(1) 求椭圆 E 的方程。

(2)

① 求证： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值。

② 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 ，四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 ，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值。

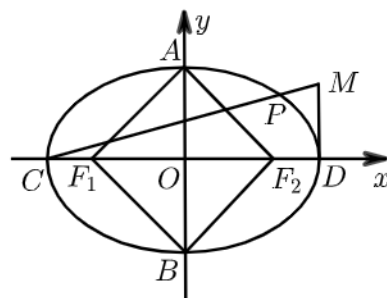
9 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值 ? 并说明理由 .

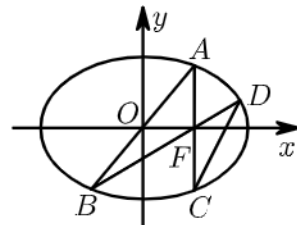
四、综合训练

- 10 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，短轴的两端点为 A 、 B ，且四边形 F_1AF_2B 是边长为 2 的正方形。



- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 若 C 、 D 分别是椭圆长轴的左、右端点，动点 M 满足 $MD \perp CD$ ，连结 CM ，交椭圆于点 P ，证明： $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$ 为定值。
- (3) 在(2)的条件下，试问 x 轴上是否存在异于点 C 的定点 Q ，使得以 MP 为直径的圆恒过直线 DP 、 MQ 的交点，若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

- 11 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $(1, \frac{3}{2})$ 。
 F 为椭圆的右焦点， A, B 为椭圆关于原点对称的两点，连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点。



- (1) 求椭圆的标准方程；
- (2) 若 $AF = FC$ ，求 $\frac{BF}{FD}$ 的值；
- (3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 ，是否存在实数 m ，使得 $k_2 = mk_1$ ，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

12 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点， O 为坐标原点，过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点，求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值。