

向量数量积的应用

1. 知识梳理

向量数量积的应用

直接转化

垂直的转化

一、数量积直接转化

1. 真题分析

1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点, 若

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{CB} = 8, \text{ 求 } k \text{ 的值.}$$

答案

(1) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $k = \pm\sqrt{2}$.

解析

(1) 设 $F(-c, 0)$, 由 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 知 $a = \sqrt{3}c$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线为 $x = -c$, 代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}b}{3}$, 于是 $\frac{2\sqrt{6}b}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 解得 $b = \sqrt{2}$, 又 $a^2 - c^2 = b^2$, 从而 $a = \sqrt{3}$, $c = 1$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设点 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 由 $F(-1, 0)$ 得直线 CD 的方程为 $y = k(x + 1)$,

由方程组 $\begin{cases} y = k(x + 1) \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 整理得 $(2 + 3k^2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0$

求解可得 $x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{2 + 3k^2}, x_1x_2 = \frac{3k^2 - 6}{2 + 3k^2}$, 因为 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} &= (x_1 + \sqrt{3}, y_1) \cdot (\sqrt{3} - x_2, -y_2) + (x_2 + \sqrt{3}, y_2) \cdot (\sqrt{3} - x_1, -y_1) \\ &= 6 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 6 - 2x_1x_2 - 2k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ &= 6 - (2 + 2k^2)x_1x_2 - 2k^2(x_1 + x_2) - 2k^2 \\ &= 6 + \frac{2k^2 + 12}{2 + 3k^2}\end{aligned}$$

由已知得 $6 + \frac{2k^2 + 12}{2 + 3k^2} = 8$, 解得 $k = \pm\sqrt{2}$.

2. 思路总结

在向量与圆锥曲线相结合的题目中, 主要是利用向量的相等、平行、垂直去寻找坐标之间的数量关系, 往往要和根与系数的关系结合运用.

①问题的条件以向量形式呈现, 间接考查向量几何性质、运算性质, 找出参数的数量关系, 再结合联立方程所得一元二次方程情况, 用韦达定理结论代入向量结论;

②所求问题以向量的形式呈现, 先把所求问题的向量形式化简得出熟悉的关系式, 再用常规作法化简求解;

③问题的条件及待求的问题均以向量的形式呈现, 同样先将向量化简找到关系式, 再利用圆锥曲线的性质, 化简求解;

一般有两类题型:

①几何法: 图形很规整或很有特点, 利用相关平面图形性质, 可以得出相关数理结论. 如得了中点, 对称等特性, 再利用圆锥曲线数理特点化简;

②代数法: 一般有利用向量的等量关系, 利用向量的数量积关系得结论.

3. 模拟演练

2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上、下顶点分别为 B_1, B_2 , F 为其右焦点, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 1$, 且该椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 过点 A_1 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P , 交直线 $x = 4$ 于点 D , 直线 A_2D 与椭圆 C 的另一个交点为 G , 直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H . 若 $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1H}$, 求 λ 取值范围.

答案 (1) $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

$$(2) \lambda \in \left(\frac{5}{3}, 3\right).$$

解析

(1) 依题意知： $A_1(-a, 0)$ ， $B_1(0, b)$ ， $F(c, 0)$ ，

$$\overrightarrow{B_1A_1} = (-a, -b), \overrightarrow{B_1F} = (c, -b),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = -ac + b^2 = 1,$$

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设直线 $A_1D: y = k(x+2)$ ，

$\because P$ 在 x 轴上方，

$$\therefore k > 0,$$

直线 A_1D 与 $x = 4$ 的交点 $D(4, 6k)$ ，

又 $A_2(2, 0)$ ，

所以设直线 $y = 3k(x-2)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} y = 3k(x-2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases},$$

$$\text{得 } G\left(\frac{24k^2-2}{1+12k^2}, \frac{-12k}{1+12k^2}\right),$$

$$\therefore k_{OG} = \frac{-6k}{12k^2-1},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} y = \frac{-6k}{12k^2-1}x \\ y = k(x+2) \end{cases},$$

$$\text{解得 } H\left(\frac{-24k^2+2}{12k^2+5}, \frac{12k}{12k^2+5}\right),$$

$$\text{又 } \begin{cases} y = k(x+2) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases},$$

$$\text{解得 } P\left(\frac{6-8k^2}{3+4k^2}, \frac{12k}{3+4k^2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1H},$$

$$\therefore y_P = \lambda y_H,$$

$$\lambda = \frac{y_P}{y_H} = \frac{\frac{12k}{3+4k^2}}{\frac{12k}{12k^2+5}}$$

$$= \frac{12k^2+5}{3+4k^2}$$

$$= 3 - \frac{4}{3+4k^2}$$

由 $k^2 > 0$ ，

$$\text{得 } \lambda \in \left(\frac{5}{3}, 3\right).$$

3 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F_1(-1, 0)$ ，上顶点为 B_1 ，原点 O 到直线 B_1F_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程。

(2) 若点 T 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，点 A 为椭圆的右顶点，是否存在过点 A 的直线 l 交椭圆 C 于点 B (异于点 A)，使得 $\overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{14}}{7}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 存在； $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2)$ 。

解析

(1) 由椭圆的一个焦点为 $F_1(-1, 0)$ ，知： $c = 1$ ，

$$\text{即 } a^2 - b^2 = 1 \text{ ①}.$$

又因为直线 B_1F_1 的方程为 $bx - y + b = 0$ ，即

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } b = \sqrt{3}.$$

$$\text{由 ① 解得 } a^2 = 4.$$

$$\text{故所求椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 假设存在过点 A 的直线 l 适合题意，则结合图形易判断知直线 l 的斜率必存在，于是可设

$$\text{直线 } l \text{ 的方程为 } y = k(x - 2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x - 2) \end{cases}, \text{ 得}$$

$$(3 + 4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0 (*),$$

因为点 A 是直线 l 与椭圆 C 的一个交点，且 $x_A = 2$ 。

$$\text{所以 } x_A \cdot x_B = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \text{ 所以 } x_B = \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2},$$

$$\text{即点 } B\left(\frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}, -\frac{12k}{3 + 4k^2}\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(\frac{16k^2}{3 + 4k^2}, -\frac{12k}{3 + 4k^2}\right), \text{ 即 } \overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{14}}{7}\left(\frac{16k^2}{3 + 4k^2}, -\frac{12k}{3 + 4k^2}\right),$$

因为点 T 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，所以

$$\frac{2}{7} \cdot \left[\left(\frac{16k^2}{3+4k^2} \right)^2 + \left(-\frac{12k}{3+4k^2} \right)^2 \right] = 2, \text{ 化简得 } 48k^4 - 8k^2 - 21 = 0, \text{ 解得 } k^2 = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

经检验知, 此时(*)对应的判别式 $\Delta > 0$, 满足题意.

故存在满足条件的直线 l , 其方程为

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2).$$

二、数量积垂直转化

1. 例题分析

- 4 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 右顶点为 A , 上顶点为 B . 已知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.

- (1) 求椭圆的离心率;
- (2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 , 经过原点的直线 l 与该圆相切. 求直线的斜率.

答案

- (1) 椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (2) 直线 l 的斜率为 $4 + \sqrt{15}$ 或 $4 - \sqrt{15}$.

解析

- (1) 设椭圆的右焦点 F_2 的坐标为 $(c, 0)$. 由 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$, 可得 $a^2 + b^2 = 3c^2$, 又 $b^2 = a^2 - c^2$, 则 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$.
 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c$, 所以 $2a^2 - c^2 = 3c^2$, 解得 $a = \sqrt{2}c$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 所以, 椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (2) 由 (I) 知 $a^2 = 2c^2$, $b^2 = c^2$. 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$.
 设 $P(x_0, y_0)$. 由 $F_1(-c, 0)$, $B(0, c)$, 有 $\overrightarrow{F_1P} = (x_0 + c, y_0)$, $\overrightarrow{F_1B} = (c, c)$.
 由已知, 有 $\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_1B} = 0$, 即 $(x_0 + c)c + y_0c = 0$. 又 $c \neq 0$, 故有
 $x_0 + y_0 + c = 0$. ①

又因为点 P 在椭圆上, 故

$$\frac{x_0^2}{2c^2} + \frac{y_0^2}{c^2} = 1. \quad ②$$

由①和②可得 $3x_0^2 + 4cx_0 = 0$. 而点 P 不是椭圆的顶点, 故 $x_0 = -\frac{4c}{3}$, 代入①得

$$y_0 = \frac{c}{3}, \text{ 即点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{4c}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

设圆的圆心为 $T(x_1, y_1)$, 则 $x_1 = \frac{-\frac{4}{3}c + 0}{2} = -\frac{2}{3}c$, $y_1 = \frac{\frac{c}{3} + c}{2} = \frac{2}{3}c$, 进而圆的半径

$$r = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - c)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}c.$$

设直线 l 的斜率为 k , 依题意, 直线 l 的方程为 $y = kx$.

$$\text{由 } l \text{ 与圆相切, 可得 } \frac{|kx_1 - y_1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r, \text{ 即 } \frac{|k(-\frac{2c}{3}) - \frac{2c}{3}|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{3}c,$$

整理得 $k^2 - 8k + 1 = 0$, 解得 $k = 4 \pm \sqrt{15}$.

所以, 直线 l 的斜率为 $4 + \sqrt{15}$ 或 $4 - \sqrt{15}$.

2. 思路总结

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$

$$x_1x_2 = \frac{\frac{m^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \quad y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}},$$

$$0 = x_1x_2 + y_1y_2 = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{(1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1)}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{\frac{2k^2m^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + m^2,$$

$$\text{两边同时乘以 } \frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}, \text{ 整体处理得 } (1 + k^2)(\frac{m^2}{b^2} - 1) - \frac{2k^2m^2}{b^2} + m^2(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}) = 0,$$

$$\text{消去高次项 } \frac{k^2m^2}{b^2} \text{ 得 } \frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} = 0,$$

即找了 a, b, m, k 的关系式.

推广: 以 AB 为直径的圆过焦点 F_1 ,

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + c)(x_2 + c) + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow (1 + k^2)x_1x_2 + (km + c)(x_1 + x_2) + m^2 + c^2 = 0$$

可以看得出, 同样可以采用整体法处理.

3. 模拟演练

5 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_2 的直线 l 与

C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设椭圆 C 的上顶点为 P , 证明: 当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) $\triangle AF_1B$ 的周长等于 $|AF_1| + |AB| + |BF_1| = |AF_1| + |AF_2| + |BF_2| + |BF_1| = 4a$,

$$\therefore 4a = 4\sqrt{2} \text{ 从而 } a = \sqrt{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore c = 1, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆} C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) 由(1)得 $P(0, 1)$, $F_2(1, 0)$,

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{依题意得, 直线 } l \text{ 的方程为 } x = 3y + 1,$$

$$\text{将 } l \text{ 的方程代入 } C \text{ 并整理, 可得 } 11y^2 + 6y - 1 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{6}{11}, y_1 y_2 = -\frac{1}{11},$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x_1 x_2 + (y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= (3y_1 + 1)(3y_2 + 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= 10y_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) + 2 = -\frac{10}{11} - \frac{12}{11} + 2 = 0,$$

$$\therefore PA \perp PB,$$

综上, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.

三、定值问题

1. 真题分析

6 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B 、 D 两点, 且 A 、 B 、 D 三点不重合.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 求证: 直线 AB 、 AD 的斜率之和为定值.

(3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，说明理由？

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 证明见解析.

(3) 存在, $\sqrt{2}$.

解析

(1) $\because e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}, \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} = 1, a^2 = b^2 + c^2,$

$\therefore a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2},$

$\therefore \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$

(2) 设 $D(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 、 AD 的斜率分别为: k_{AB} 、 k_{AD} ,

$\therefore k_{AD} + k_{AB} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 1}$

$= 2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2} \right] (*) ,$

联立 $\begin{cases} y = \sqrt{2}x + b \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{2}bx + b^2 - 4 = 0 ,$

$\Delta = -8b^2 + 64 > 0 ,$

$\therefore -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b \textcircled{1}, x_1 x_2 = \frac{b^2 - 4}{4} \textcircled{2} ,$

将①、②式代入 (*) 式整理得 $2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 1} \right] = 0 ,$

即 $k_{AD} + k_{AB} = 0 .$

(3) $\because |BD| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\Delta}}{4}$

$= \sqrt{3} \frac{\sqrt{64 - 8b^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{8 - b^2} ,$

设 d 为点 A 到直线 BD 的距离, $\therefore d = \frac{|b|}{\sqrt{3}} ,$

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |BD| d = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(8 - b^2) b^2} \leq \sqrt{2} ,$

当且仅当 $b = \pm 2$ 时取等号,

又 $\because \pm 2 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) ,$

$\therefore$ 当 $b = \pm 2$ 时, $S_{\triangle ABD \max} = \sqrt{2} .$

2. 思路总结

圆锥曲线的定点、定值问题涉及到曲线上的动点及动直线, 常用下面方法:

(1) 参数法:

① 引入参数求定值:

设动点的坐标 (或直线方程), 引入参数; 结合已知条件将目标式用参变量表示; 再根据点在某曲线上代入消参求定值, 或经过整理化简后恒为定值. 注意到繁杂难是代数运算是此类问题的特点, 设而不求, 整体思想和消元的思想的运用可有效简化运算;

② 引入参数求定点:

第一步: 引进参数, 参数一般为点的坐标、直线的斜率、直线的夹角等;

第二步: 列出关系, 根据题设条件, 表示出对应的动态直线或曲线方程;

第三步: 探求直线过定点. 若是动态的直线方程, 将动态的直线方程转化为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 的形式, 则直线恒点 (x_0, y_0) ;

③ 在设参的选取上, 解题方案通常有两种: 设直线或设点, 只有合理的选参, 才能减少运算, 建议设直线, 设点的话参数个数较多, 也不好转化, 尤其是设椭圆上的点, 因为坐标满足椭圆方程, 这是二次方程, 只能整体代换, 不好转化.

(2) 由特殊到一般法:

这是解决定点或定值问题, 而题设条件又没有给出这个定值 (定点), 让证明定值 (定点), 我们可以认为, 由于这个定值 (定点) 对符合要求的一些特殊情况必然成立, 那么我们根据特殊情况先找到这个定值 (定点), 明确了解决目标, 再推理证明;

第一步: 研究特殊情形, 从问题特殊情形出发, 如直线的斜率不存在, 或直线过原点等, 得到目标关系所要探求的定值 (定点);

第二步: 探究一般情况;

第三步: 下结论, 综合上面两种情况定结论;

定点、定值问题着重考察逻辑推理的能力, 主要是式子复杂, 计算量大, 要仔细确保计算不出错, 结合图形的对称性、结合圆锥曲线的特殊性质等解题会找到巧妙方法和提高效率.

3. 模拟演练

7 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点与抛物线 $C_2: x^2 = 4y$ 的焦点重合, F_1, F_2 分别是椭圆 C_1 的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 过椭圆 C_1 右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C_1 的方程.

(2) 是否存在直线 l , 使得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

- (3) 设点 $M(t, 0)$ 是一个动点, 若直线 l 的斜率存在, 且 N 为 AB 中点, $MN \perp AB$, 求实数 t 的取值范围.

答案

- (1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.
 (2) 存在, 直线 l 的方程为: $y = \pm \frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$.
 (3) 实数 t 的取值范围为: $t \in \left[0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

解析

- (1) 由题意得, 抛物线焦点为 $(a, 1)$,

$$\therefore b = 1,$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{c}{a}, \text{ 且 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{得 } a = \sqrt{3}, c = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

- (2) ①当直线 l 斜率不存在的时候,

$$A\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), B\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{5}{3} \neq -1, \text{ 不合题意, 舍去.}$$

- ②当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 为 $y = k(x - \sqrt{2})$,

$$\begin{cases} y = k(x - \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}k^2x + 6k^2 - 3 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{6\sqrt{2}k^2}{1 + 3k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{6k^2 - 3}{1 + 3k^2},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$= x_1 \cdot x_2 + [k(x_1 - \sqrt{2}) \cdot k(x_2 - \sqrt{2})]$$

$$= (k^2 + 1)x_1x_2 - \sqrt{2}k^2(x_1 + x_2) + 2k^2$$

$$= \frac{5k^2 - 3}{1 + 3k^2}$$

$$= -1.$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = \pm \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}).$$

- (3) 设 AB 的中点为 $N(x_0, y_0)$,

当 $k = 0$ 时, 因为 $MN \perp AB$, 则 $t = 0$,

当 $t \neq 0$ 时,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}, y_0 = \frac{-\sqrt{2}k}{1+3k^2},$$

$$\text{则 } N\left(\frac{3\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}, \frac{-\sqrt{2}k}{1+3k^2}\right),$$

由 $MN \perp AB$, 知 $k_{MN} \cdot k_{AB} = -1$,

$$\text{即 } \frac{\frac{-\sqrt{2}k}{1+3k^2}}{\frac{3\sqrt{2}k^2}{1+3k^2} - t} \cdot k = -1,$$

$$\text{得 } t = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{k^2} + 3} \in \left[0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

综上可知, $t \in \left[0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

- 8 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴长为 2, 若点 A, B 分别是椭圆 E 的左、右顶点, 动点 $M(a, t)$, ($t \geq \sqrt{2}$), 直线 AM 交椭圆 E 于点 P .

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2)

① 求证: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 是定值.

② 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1 , 四边形 $OBMP$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1,

解析

(1) $\because$ 短轴长为 2,

$$\therefore b = 1,$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore a = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) ① 方法一: $\because k_{AM} = \frac{t}{2\sqrt{2}},$

$$\text{设 } l_{AM}: y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2}),$$

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{t}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \therefore (t^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{2}t^2x + 2t^2 - 8 &= 0, \\ \therefore (-\sqrt{2})x_P &= \frac{2t^2 - 8}{t^2 + 4}, \\ \therefore x_P &= \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \\ \therefore y_P &= \frac{t}{2\sqrt{2}}(x_P + \sqrt{2}) = \frac{4t}{t^2 + 4}, \\ \therefore P &\left(\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \frac{4t}{t^2 + 4} \right), \\ \therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BP} &= (\sqrt{2}, t) \cdot \left(\frac{-2\sqrt{2}t^2}{t^2 + 4}, \frac{4t}{t^2 + 4} \right) = 0. \end{aligned}$$

方法二：设 $AM: y = k(x + \sqrt{2})$,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + 2k^2)x^2 + 4\sqrt{2}k^2x + 4k^2 - 2 = 0,$$

$$x_A x_P = \frac{4k^2 - 2}{1 + 2k^2} \Rightarrow x_P = \frac{\sqrt{2}(1 - 2k^2)}{1 + 2k^2},$$

$$y_P = k(x_P + \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2},$$

$$\therefore P \left(\frac{\sqrt{2}(1 - 2k^2)}{1 + 2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} \right),$$

其中 $M(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k)$, $B(\sqrt{2}, 0)$,

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{-4\sqrt{2}k^2}{1 + 2k^2}, \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} \right), \quad \overrightarrow{OM} = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}k), \\ \therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{OM} &= 0. \end{aligned}$$

② 方法一： $\because S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4\sqrt{2}t}{t^2 + 4}$,

$$S_2 = S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{4t}{t^2 + 4}$$

$$= \sqrt{2}t - \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 4},$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{4\sqrt{2}t}{t^2 + 4}}{\sqrt{2}t - \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 4}} = \frac{1}{\frac{t^2 + 4}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}} \leq 1,$$

当 $t = \sqrt{2}$ 时取等，

$\therefore \frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1.

方法二： $S_1 = \frac{1}{2} |AB| |y_P| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}k}{1 + 2k^2} = \frac{|4k|}{1 + 2k^2}$,

$$S_2 = S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot |2\sqrt{2}k| - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{|2\sqrt{2}k|}{1 + 2k^2}$$

$$= \frac{|2k|(1 + 4k^2)}{1 + 2k^2},$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{|4k|}{1 + 2k^2} \cdot \frac{1 + 2k^2}{|2k|(1 + 4k^2)} = \frac{2}{1 + 4k^2},$$

由于 $t \geq \sqrt{2}$ ，所以直线 AM 的斜率 $k \geq \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 1, 当且仅当 $k = \frac{1}{2}$ 取等.

9

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值? 并说明理由.

答案

(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $k_1 + k_2$ 为定值 0, 证明见解析.

解析

(1) 由题意可得 $b = \sqrt{2}$,

又 $a + b = 3\sqrt{2}$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$,

则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设直线在 y 轴上的截距为 m ,

$\therefore$ 直线的方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases},$$

$$\text{得 } x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{当 } \Delta = 4m^2 - 8m^2 + 16 > 0,$$

即 $-2 < m < 2$ 时, 直线与椭圆交于两点,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -2m, x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 4,$$

$$\text{又 } k_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2}, k_2 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} \\ &= \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } y_1 = \frac{1}{2}x_1 + m, y_2 = \frac{1}{2}x_2 + m,$$

$$\therefore (y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x_1 + m - 1\right)(x_2 - 2) + \left(\frac{1}{2}x_2 + m - 1\right)(x_1 - 2)$$

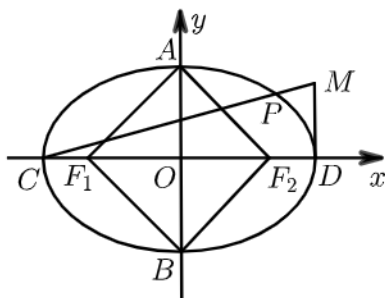
$$= x_1 \cdot x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) - 4(m - 1)$$

$$= 2m^2 - 4 + (m-2)(-2m) - 4(m-1) = 0.$$

$$\text{故 } k_1 + k_2 = 0.$$

四、综合训练

- 10 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 短轴的两端点为 A, B , 且四边形 F_1AF_2B 是边长为 2 的正方形.



- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 若 C, D 分别是椭圆长轴的左、右端点, 动点 M 满足 $MD \perp CD$, 连结 CM , 交椭圆于点 P , 证明: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$ 为定值.
- (3) 在(2)的条件下, 试问 x 轴上是否存在异于点 C 的定点 Q , 使得以 MP 为直径的圆恒过直线 DP, MQ 的交点, 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.
- (2) 定值 4, 证明见解析.
- (3) 存在 $Q(0, 0)$ 使得以 MP 为直径的圆恒过交点.

解析

- (1) 由题意, 得 $b = c = \sqrt{2}, a = 2$, 所以, 所求椭圆的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

- (2) 由(1)知, $C(-2, 0), D(2, 0)$.

由题意可设 CM 所在的直线方程为 $y = k(x+2) (k \neq 0), P(x_1, y_1)$.

因为 $MD \perp CD$, 所以 $M(2, 4k)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x+2) \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (1+2k^2)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 4 = 0.$$

$$\text{所以 } -2x_1 = \frac{8k^2 - 4}{1+2k^2}, \text{ 即 } x_1 = \frac{2-4k^2}{1+2k^2}.$$

因为 $y_1 = k(x_1 + 2) = \frac{4k}{1+2k^2}$, 所以点 $P\left(\frac{2-4k^2}{1+2k^2}, \frac{4k}{1+2k^2}\right)$.

从而 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \frac{2-4k^2}{1+2k^2} + 4k \cdot \frac{4k}{1+2k^2} = \frac{4(1+2k^2)}{1+2k^2} = 4$, 即 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}$ 为定值.

(3) 设存在 $Q(x_0, 0) (x_0 \neq -2)$ 使得以 MP 为直径的圆恒过 DP 、 MQ 的交点, 则 $DP \perp MQ$, 所以 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{DP}$ 恒为 0.

由 (2) 可知 $\overrightarrow{QM} = (2-x_0, 4k)$, $\overrightarrow{DP} = \left(\frac{-8k^2}{1+2k^2}, \frac{4k}{1+2k^2}\right)$.

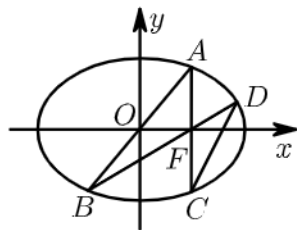
所以 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{DP} = (2-x_0) \cdot \frac{-8k^2}{1+2k^2} + 4k \cdot \frac{4k}{1+2k^2} = \frac{8k^2}{1+2k^2} x_0$.

当 $x_0 = 0$, 即 Q 为 $(0, 0)$ 时, $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{DP}$ 恒为 0.

所以存在 $Q(0, 0)$, 使得以 MP 为直径的圆恒过直线 DP 、 MQ 的交点.

11 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

F 为椭圆的右焦点, A, B 为椭圆关于原点对称的两点, 连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点.



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若 $AF = FC$, 求 $\frac{BF}{FD}$ 的值;

(3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 是否存在实数 m , 使得 $k_2 = mk_1$, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) $\frac{BF}{FD} = \frac{7}{3}$.

(3) 存在 $m = \frac{5}{3}$, 使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

解析

(1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意知: $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$,

解之得: $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$, 所以椭圆方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 若 $AF = FC$, 由椭圆对称性, 知 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $B\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$,

此时直线 BF 方程为 $3x - 4y - 3 = 0$,

由 $\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $7x^2 - 6x - 13 = 0$, 解得 $x = \frac{13}{7}$ ($x = -1$ 舍去),

故 $\frac{BF}{FD} = \frac{1 - (-1)}{\frac{13}{7} - 1} = \frac{7}{3}$.

(3) 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$,

直线 AF 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 得

$$(15 - 6x_0)x^2 - 8y_0^2 - 15x_0^2 + 24x_0 = 0,$$

因为 $x = x_0$ 是该方程的一个解, 所以 C 点的横坐标 $x_c = \frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}$,

又 $C(x_c, y_c)$ 在直线 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$ 上, 所以 $y_c = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x_c - 1) = \frac{-3y_0}{5 - 2x_0}$,

同理, D 点坐标为 $(\frac{8 + 5x_0}{5 + 2x_0}, \frac{3y_0}{5 + 2x_0})$,

$$\text{所以 } k_2 = \frac{\frac{3y_0}{5+2x_0} - \frac{-3y_0}{5-2x_0}}{\frac{8+5x_0}{5+2x_0} - \frac{8-5x_0}{5-2x_0}} = \frac{5y_0}{3x_0} = \frac{5}{3}k_1,$$

即存在 $m = \frac{5}{3}$, 使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

12 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点, O 为坐标原点, 过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点, 求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 1.

解析

(1) 由题意可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $c^2 = \frac{1}{2}a^2$, $b^2 = \frac{1}{2}a^2$,

将点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 代入方程组 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{2b^2} = 1$, 即 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = 1$, 解得 $a^2 = 4$,

所以椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 由(1)知, $F(\sqrt{2}, 0)$,

设直线 $OQ: x = my$, 则直线 $MN: x = my + \sqrt{2}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } x_Q^2 = \frac{4m^2}{m^2 + 2}, y_Q^2 = \frac{4}{m^2 + 2},$$

$$\text{所以 } |OQ|^2 = x_Q^2 + y_Q^2 = \frac{4m^2}{m^2 + 2} + \frac{4}{m^2 + 2} = \frac{4m^2 + 4}{m^2 + 2},$$

联立 $\begin{cases} x = my + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 整理得 $(m^2 + 2)y^2 + 2\sqrt{2}my - 2 = 0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = -\frac{2}{m^2 + 2}$,

所以

$$|MN| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+m^2} \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2}\right)^2 + \frac{8}{m^2 + 2}} = \frac{4m^2 + 4}{m^2 + 2}$$

,

所以 $\frac{|MN|}{|OQ|^2} = \frac{\frac{4m^2 + 4}{m^2 + 2}}{\frac{4m^2 + 4}{m^2 + 2}} = 1$.