解三角形综合

一、解三角形综合问题

1. 知识讲解

利用正弦定理，余弦定理解决三角形的综合问题时，要注意三角形三个内角的一些三角函数关系：

在$\triangle ABC$中，$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，则

①$sinA=sin(B+C)$，$cosA=-cos(B+C)$，

$tanA=-tan(B+C)$.

②$sin\frac{A}{2}=cos\frac{B+C}{2}$，$cos\frac{A}{2}=sin\frac{B+C}{2}$.

③$sin2A=-sin(2B+2C)$，$cos2A=cos(2B+2C)$，

$tan2A=-tan(2B+2C)$.

④$sinA+sinB+sinC=4cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}$，

$tanA+tanB+tanC=tanAtanBtanC$.

⑤$sin2A+sin2B+sin2C=4sinAsinBsinC$，

$cos2A+cos2B+cos2C=-1-4cosAcosBcosC$.

2. 例题精讲

正余弦定理综合

1 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边为a，b，c．

(1) $a=4$，$A=30^\circ$，$B=60^\circ$，求b．

(2) 若$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$，试求A．

答案 (1) $b=4\sqrt{3}$．

(2) $A=60^\circ$．

解析 (1) 由正弦定理知，

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

$\frac{4}{\sin 30^\circ}=b\sin 60^\circ$，

$\therefore 2\sqrt{3}=\frac{1}{2}b$，

$\therefore b=4\sqrt{3}$．

(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$3=1+4-4\cos A$．

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$，

$\therefore A=60^\circ$．

求面积

2 $\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$．

(1) 求A.

(2) 若$a=\sqrt{7}$，$b=2$求$\triangle ABC$的面积．

答案 (1) $A=\frac{\pi}{3}$．

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

解析 (1) 对 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$两边同除$2R$，

有 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，

$\sin A=\sqrt{3}\cos A$，

虽然$\cos A\neq 0$ 同除$\cos A$，

$\tan A=\sqrt{3}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$．

(2) 由余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，

$7=4+c^2-2c$，

$c^2-2c-3=0$，

$(c-3)(c+1)=0$，

边c应为正值，$c=3$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\cdot\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

3 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$c\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)-a\sin C=0$．

(1) 求角A的值．

(2) 若$a=2\sqrt{7}$，$b=4$，求$\triangle ABC$的面积．

答案 (1) $A=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $6\sqrt{3}$．

解析 (1) $\because c\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)-a\sin C=0$，

$\therefore \sin C\left(\sin A\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos A\right)-\sin A\sin C=0$，

$\because \angle C\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin C>0$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\sin A=0$，

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，

又$\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$28=16+c^2-2\times 4c\times\dfrac{1}{2}$，

$\therefore c^2-4c-12=0$，

$(c-6)(c+2)=0$，

$\because c>0$，

$\therefore c=6$，

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 4\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$=6\sqrt{3}$．

4 在$\triangle ABC$中，$a\neq b$，$c=\sqrt{3}$，$\cos^2 A-\cos^2 B=\sqrt{3}\sin A\cos A-\sqrt{3}\sin B\cos B$．

(1) 求C．

(2) 若$\sin A=\dfrac{4}{5}$，求$\triangle ABC$的面积．

答案 (1) $\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $\dfrac{18+8\sqrt{3}}{25}$．

解析 (1) $\cos^2 A-\cos^2 B=\sqrt{3}\sin A\cos A-\sqrt{3}\cos B\sin B$，

$\dfrac{1+\cos 2A}{2}-\dfrac{1+a\times 2B}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B$，

$\cos 2A-\cos 2B=\sqrt{3}\sin 2A-\sqrt{3}\sin 2B$，

$\sqrt{3}\sin 2B-\cos 2B=\sqrt{3}\sin 2A-\cos 2A$，

$\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because a\neq b$，

$\therefore A\neq B$，

$\therefore 2A-\dfrac{\pi}{6}=\pi-\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore A+B=\dfrac{2}{3}\pi$，

$\therefore C=\pi-\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $\because\sin A=\dfrac{4}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且$A+B=\dfrac{2}{3}\pi$，

$\therefore A<\dfrac{\pi}{2}$，

即$\cos A=\dfrac{3}{5}$，

又$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\cos C=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\sin B=\sin[\pi-(A+C)]$，

$=\sin(A+C)$，

$=\sin A\cdot\cos C+\cos A\cdot\sin C$，

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$，

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{C}{\sin C}$，

得$a=\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8}{5}$，

$\therefore S==\dfrac{18+8\sqrt{3}}{25}$．

5 $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$2\cos A(b\cos C+c\cos B)=\sqrt{3}a$．

(1) 求角A．

(2) 若$a=1$，$\triangle ABC$的周长为$\sqrt{5}+1$，求$\triangle ABC$的面积．

答案 (1) $A=\dfrac{\pi}{6}$．

(2) $S_{\triangle ABC}=2-\sqrt{3}$．

解析 (1) 由$2\cos A(b\cos C+c\cos B)=\sqrt{3}a$，

可得$2\cos A(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=\sqrt{3}\sin A$，

可得$2\cos A\sin A=\sqrt{3}\sin A$，

$\because A\in(0,\pi)$

$\therefore \sin A=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$．

(2) 由题意知，$a=1$，$a+b+c=\sqrt{5}+1$，

$\therefore b+c=\sqrt{5}$，由余弦定理得：

$b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$

$=(b+c)^2-(2+\sqrt{3})bc$

$=1$，

$\therefore bc=\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}=4(2-\sqrt{3})$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=2-\sqrt{3}$．

6 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\cos C+\cos A\cos B=2\cos A\sin B$．

(1) 求$\tan A$．

(2) 若$b=2\sqrt{5}$，AB边上的中线$CD=\sqrt{17}$，求$\triangle ABC$的面积．

答案 (1) $\tan A=2$．

(2) 当$c=2$时，$S_{\triangle ABC}=4$；当$c=6$时，$S_{\triangle ABC}=12$．

解析 (1) 由已知得$\cos C+\cos A\cos B=\cos\ [\pi-(A+B)]+\cos A\cos B$

$=-\cos\ (A+B)+\cos A\cos B=\sin A\sin B$，

所以$\sin A\sin B=2\cos A\sin B$，

因为在ΔABC中，$\sin B\neq 0$，

所以$\sin A=2\cos A$，

则$\tan A=2$．

(2) 由（1）得，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

在$\triangle ACD$中，$CD^2=b^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)^2-2\cdot b\cdot\dfrac{c}{2}\cdot\cos A$，

代入条件得$c^2-8c+12=0$，解得$c=2$或6，

当$c=2$时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=4$；当$c=6$时，$S_{\triangle ABC}=12$．

求边长

7 已知a，b，c分别为$\triangle ABC$三个内角A，B，C的对边，且$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$．

(1) 求A．

(2) 若$a=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求b与c的值．

答案 (1) $A=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$或$\begin{cases}b=3\\c=2\end{cases}$．

解析 (1) $\because a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$，

由正弦定理得：$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，

即$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，

化简得：$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

$\therefore\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，

在$\triangle ABC$中，$0<A<\pi$，

$\therefore A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，得$A=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) 由已知得$\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，可得$bc=6$，

由已知及余弦定理得$b^2+c^2-2bc\cos A=7$，$(b+c)^2=25$，$b+c=5$，

联立方程组$\begin{cases}bc=6\\b+c=5\end{cases}$，可得$\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$或$\begin{cases}b=3\\c=2\end{cases}$．

8 $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$2\sin A-\sin B-2\sin C\cos B=0$．

(1) 求内角C的大小．

(2) 若$\triangle ABC$的周长为$6+2\sqrt{3}$，面积为$2\sqrt{3}$．求边c的长度．

答案 (1) $\frac{\pi}{3}$．

(2) $2\sqrt{3}$．

解析 (1) 由$2\sin A-\sin B-2\sin C\cos B=0$得：$2\sin(B+C)-\sin B-2\sin C\cos B=0$，

整理得：$2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin B-2\sin C\cos B=0$，

故$\cos C=\frac{1}{2}$，而$C\in(0,\pi)$，从而$C=\frac{\pi}{3}$．

故答案为：$\frac{\pi}{3}$．

(2) 由条件知：$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，得$ab=8\cdots\cdots$①

又$a+b+c=6+2\sqrt{3}\cdots\cdots$②

由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab\cdots\cdots$③

将①代入③得：$(a+b+c)(a+b-c)=24\cdots\cdots$④

由②④得：$c=2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$．

求周长

9 $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$．

(1) 求角C．

(2) 若$c=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle ABC$的周长．

答案 (1) $\frac{\pi}{3}$．

(2) $5+\sqrt{7}$．

解析 (1) $\because 2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$，

$\therefore 2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，

$2\cos C\sin(A+B)=\sin C$，

$\because A+B+C=\pi$，

$\therefore 2\cos C\sin C=\sin C$，

$\therefore \cos C=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle C=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore ab=6$，$c=\sqrt{7}$，

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a^2+b^2=13$，

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=25$，

$a+b=5$，$C_{\triangle ABC}=a+b+c=5+\sqrt{7}$．

与三角函数结合

10 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$a>b$，$a=5$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\triangle ABC$的面积为9．

(1) 求b和$\sin A$的值．

(2) 求$\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值．

答案 (1) $b=\sqrt{13}$，$\sin A=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$．

(2) $\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$．

解析 (1) $\because S_{\triangle ABC}=9$，

$\therefore \dfrac{1}{2}ac\sin B=9$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\times 5c\cdot\dfrac{3}{5}=9$，

$\therefore c=6$，

$\because b<a$，

$\therefore \angle B$为锐角，

又$\because \sin B=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore \cos B=\dfrac{4}{5}$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$= 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \frac{4}{5}$

$= 61 - 48$

$= 13$，

$\therefore b = \sqrt{13}$，

又$\because \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$，

$\therefore \frac{\sqrt{13}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{\sin A}$，

$\therefore \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$．

(2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，

$25 = 13 + 36 - 2 \times 6 \times \sqrt{13}\cos A$，

$\therefore 12\sqrt{13}\cos A = 24$，

$\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$，

$\therefore \sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A = 2 \times \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$，

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{8}{13} - 1 = -\frac{5}{13}$，

$\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin 2A \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos 2A$

$= \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{13}$

$= \frac{7\sqrt{2}}{26}$．

11 已知向量$a = \left(\sin x, \frac{3}{4}\right)$，$b = (\cos x, -1)$．

(1) 当$a // b$时，求$\cos^2 x - \sin 2x$的值．

(2) 设函数$f(x) = 2(a+b) \cdot b$，已知在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c．若$a = \sqrt{3}$，$b = 2$，$\sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}$，求$f(x) + 4\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)$的取值范围．

答案 (1) $\frac{8}{5}$．

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \leqslant f_{(x)} + 4\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) \leqslant \sqrt{2} - \frac{1}{2}$．

解析 (1) $\because \vec{a} // \vec{b}$，$\therefore \frac{3}{4}\cos x + \sin x = 0$，$\therefore \tan x = -\frac{3}{4}$，

$\therefore \cos^2 x - \sin x = \frac{\cos^2 x - 2\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1 - 2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{8}{5}$．

(2) $f_{(x)}=2(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}$，

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin A}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{4}$（$a=\sqrt{3}<b=2$），

$\therefore f_{(x)}+4\cos\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$，

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{11}{12}\pi\right]$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}-1\leqslant f_{(x)}+4\cos\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}$．

最值问题

12 锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c且$\sqrt{3}(a\cos B+b\cos A)=2c\sin B$，$a=2$．则边长$b$的取值范围是（　）．

A. $(0,\sqrt{3})$　　B. $(0,2\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{3},2\sqrt{3})$　　D. $(\sqrt{3},+\infty)$

答案 C

解析 $\because\sqrt{3}(a\cos B+b\cos A)=2c\sin B$，

$\therefore\sqrt{3}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=2\sin C\sin B$，

$\therefore\sqrt{3}\sin(A+B)=2\sin C\sin B$，

$\therefore\sqrt{3}\sin C=2\sin C\sin B$，

$\therefore\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$或$B=\frac{2\pi}{3}$，

$\because\triangle ABC$为锐角三角形，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，即$\frac{1}{2}<\sin A<1$，

由正弦定理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，则$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin A}$，

此时$\sqrt{3}<b<2\sqrt{3}$，

综上所述b的取值范围为$(\sqrt{3},2\sqrt{3})$．

故选：C．

13 锐角$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$(a-b)(\sin A+\sin B)=(c-b)\sin C$，若$a=\sqrt{3}$，则$b^2+c^2$的取值范围是（　）．

A. $(5,6]$

B. $(3,5)$

C. $(3,6]$

D. $[5,6]$

答案 A

解析 $\because(a-b)(\sin A+\sin B)=(c-b)\sin C$，

由正弦定理可得:$(a-b)(a+b)=(c-b)c$，

化为$b^2+c^2-a^2=bc$．

由余弦定理可得:$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$，

$\because a=\sqrt{3}$，$\therefore$由正弦定理可得:$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

$\therefore$可得: $b^2+c^2=(2\sin B)^2+\left[2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)\right]^2=3+2\sin^2B+\sqrt{3}\sin 2B=4+2\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)$

，$\because B\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore 2B-\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$，$\therefore b^2+c^2=4+2\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)\in(5,6]$．

故选A.

14 $\triangle ABC$的三个内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$B=\dfrac{\pi}{3}$，$b=1$，求$a+c$的取值范围（

）．

A. $(1,\sqrt{3})$

B. $(\sqrt{3},2]$

C. $(1,2]$

D. $(1,2)$

答案 C

解析 $\because\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

$\therefore a+c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left[\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)\right]=2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because 0<A<\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore a+c=2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in(1,2]$．

故选：C．

15 $\triangle ABC$中$2\sqrt{2}\left(\sin^2A-\sin^2C\right)=(a-b)\sin B$，$\triangle ABC$外接圆半径为$\sqrt{2}$．则$\triangle ABC$的周长的最大值______．

答案 $3\sqrt{6}$

解析 因为$2\sqrt{2}\left(\sin^2A-\sin^2C\right)=(a-b)\sin B$，$\triangle ABC$外接圆半径为$\sqrt{2}$，

所以$\left(2\sqrt{2}\right)^2\left(\sin^2A-\sin^2C\right)=(a-b)\,2\sqrt{2}\sin B$，

所以$a^2-c^2=ab-b^2$，即$a^2+b^2-c^2=ab$，

所以$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{3}$，

则$\triangle ABC$的周长$l=a+b+c=2\sqrt{2}\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)$，

$=2\sqrt{2}\left(\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)+\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{6}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{6}$，

因为$0<A<\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

所以$\dfrac{1}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

所以$\triangle ABC$的周长的最大值为$3\sqrt{6}$，

故答案为：$3\sqrt{6}$．

16 $\triangle ABC$的三个内角A、B、C.所对的边分别是a，b，c，若$c=2\sqrt{3}$，$\tan A+\tan B=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan A\tan B$，则$\triangle ABC$的面积的取值范围是（　）．

A. $[\sqrt{3},+\infty)$

B. $(0,\sqrt{3}]$

C. $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right]$

D. $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

答案 B

解析 $\tan A+\tan B=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan A\tan B$，得$\tan A+\tan B=\sqrt{3}(1-\tan A\tan B)$，

$\therefore\tan(A+B)=\sqrt{3}$，即$\tan C=-\sqrt{3}$，

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$，

则$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又$c=2\sqrt{3}$，由余弦定理可得：$(2\sqrt{3})^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}$，

即$a^2+b^2+ab=12$，

$\therefore 12=a^2+b^2+ab\geqslant 3ab$，得$ab\leqslant 4$，

则$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin C\leqslant\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

$\therefore\triangle ABC$的面积的取值范围是$(0,\sqrt{3}]$．．

故选B．

17 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$\dfrac{\sin C}{\sin A-\sin B}=\dfrac{a+b}{a-c}$．

(1) 求角B的大小．

(2) 点D满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$，且线段$AD=3$，求$\triangle ABC$的面积的最大值．

答案 (1) $B=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$．

解析 (1) $\because\dfrac{\sin C}{\sin A-\sin B}=\dfrac{a+b}{a-c}$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

得$\dfrac{c}{a-b}=\dfrac{a+b}{a-c}$，

$\therefore c(a-c)=(a+b)(a-b)$，即$a^2+c^2-b^2=ac$，

又$\because a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

代入得$\cos B=\dfrac{1}{2}$，

$\because B\in(0,\pi)$，

$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) 在$\triangle ABD$中由余弦定理知：

$c^2+(2a)^2-2\cdot 2a\cdot c\cdot\cos 60^\circ=3^2$，

$\therefore (2a)^2+c^2-2ac=9$，

$\because 4ac\leqslant (2a)^2+c^2$，

$\therefore 2ac\leqslant 9$，

当且仅当$2a=c$，即$a=\dfrac{3}{2}$，$c=3$时取等号，

$\therefore \triangle ABC$的面积的最大值为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$．

18 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，向量$\overrightarrow{m}=(a+b,\sin A-\sin C)$，向量$\overrightarrow{n}=(c,\sin A-\sin B)$，且$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$．

(1) 求角B的大小．

(2) 设BC的中点为D，且$AD=\sqrt{3}$，求$a+2c$的最大值．

答案 (1) $B=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $a+2c$的最大值为$4\sqrt{3}$．

解析 (1) 由$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$得$(a+b)\cdot(\sin A-\sin B)=(\sin A-\sin C)\cdot c$，

结合正弦定理有$(a+b)\cdot(a-b)=(a-c)\cdot c$，即$a^2+c^2-b^2=ac$，

结合余弦定理有$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，

又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $\triangle ABD$中，由余弦定理可得

$\dfrac{1}{2}=\cos B=\dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2-3}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot c}$，即$2ac+12=a^2+4c^2$，

有$2ac+12=a^2+4c^2\geqslant 4ac$，从而$ac\leqslant 6$，

$(a+2c)^2=a^2+4c^2+4ac=6ac+12\leqslant 6\cdot 6+12=48$，当且仅当$a=2c$时取“=”，

所以$a+2c\leqslant 4\sqrt{3}$，所以$a+2c$的最大值为$4\sqrt{3}$．

19 在锐角三角形$\triangle ABC$中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，$\cos C+\sqrt{3}\sin C-a-c=0$，且$b=1$．

(1) 若$a+c=2$，求a与c．

(2) 求$\triangle ABC$的周长的取值范围．

答案 (1) $a=1$，$c=1$．

(2) $(2,3]$．

解析 (1) 当$a+c=2$时，$\cos C+\sqrt{3}\sin C-a-c=0$，

$\cos C+\sqrt{3}\sin C=2$，

$\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=1$，

即：$\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\because$锐角三角形$\triangle ABC$，

$\therefore 0<C<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\because b=1$，

即$\frac{1}{2}=\frac{a^2+1-c^2}{2a}$，

$\therefore a^2-c^2+1=a$，

$\because a+c=2$，即$c=2-a$，

$\therefore a^2-(2-a)^2+1=a$，

得：$a=1$，

$\therefore c=2-a=1$，

即：$a=1$，$c=1$．

(2) $\cos C+\sqrt{3}\sin C-a-c=0$，

$\therefore a+c=\sqrt{3}\sin C+\cos C=2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\because 0<C<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore C+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2}{3}\pi\right)$，

$\therefore \sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，

$\therefore a+c=2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\in(1,2]$，

又$\because b=1$，

$\therefore\triangle ABC$的周长$=a+b+c\in(2,3]$，

即$\triangle ABC$的周长的取值范围为$(2,3]$．

20 已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$．

(1) 求函数$f(x)$的最小正周期．

(2) 在$\triangle ABC$中，内角A、B、C对的边分别为a、b、c．若$f\left(\dfrac{A}{2}\right)=2$，$a=1$，求$\triangle ABC$的面积的最大值．

答案 (1) π．

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

解析 (1) $\because f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

所以，函数$y=f(x)$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．

(2) $\because f\left(\dfrac{A}{2}\right)=2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=2$，

$\therefore \sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

$\because 0<A<\pi$，

$\therefore \dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，

$\therefore A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，则$A=\dfrac{\pi}{3}$，

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$，

$\therefore bc\leqslant a^2=1$，当且仅当$b=c$时，等号成立，

所以，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

即$\triangle ABC$的面积的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

实际应用

21 某船开始看见灯塔在南偏东$30°$方向，后来船沿南偏东$60°$的方向航行$15\sqrt{6}\mathrm{km}$海里后，看见灯塔在正西方向，则这时船与灯塔的距离是（ ）．

A. $15\mathrm{km}$

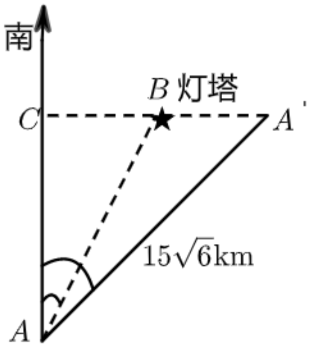
B. $15\sqrt{2}\mathrm{km}$

C. $15\sqrt{3}\mathrm{km}$

D. $15\sqrt{6}\mathrm{km}$

答案 B

解析　如图：船由A到A'，



灯塔为B，即求$A'B$.

延长$A'B$交A于C，

则$A'C\perp AC$，

$\therefore AC=\dfrac{15\sqrt{6}}{2}\text{km}$，

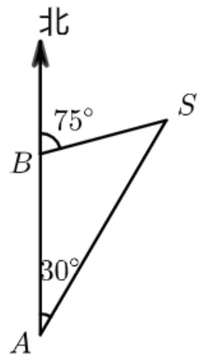
$\therefore A'C=\dfrac{45\sqrt{2}}{2}\text{km}$，

$\therefore BC=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}\text{km}$，

$\therefore A'B=15\sqrt{2}\text{km}$，

故选B．

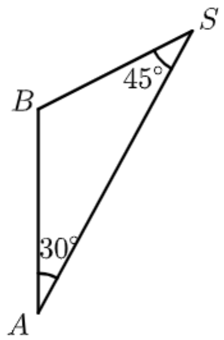
22　如图，一艘船下午$13:30$在A处测得灯塔S在它的北偏东$30°$处，之后它继续沿正北方向匀速航行，$14:00$到达B处，此时又测得灯塔S在它的北偏东$75°$处，且与它相距$9\sqrt{2}$海里，则此船的航速为（　）海里/小时．



A．18　　B．24　　C．30　　D．36

答案　D

解析



∵外角等于两个不相邻的内角和，

∴$30° + \angle S = 75°$，

∴$\angle S = 45°$，

$\frac{BS}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin 45°}$，

$\frac{9\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

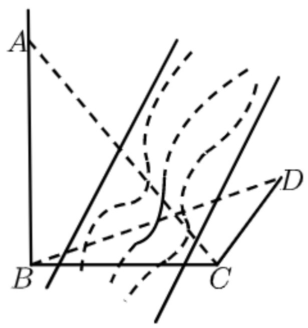
∴$AB = 18$，

半小时行驶18海里，

∴航速为$\frac{18}{0.5} = 36$海里/小时．

故选：D．

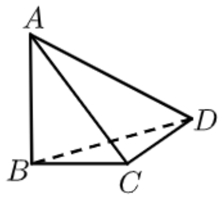
23 为测得河对岸塔AB的高，先在河岸上选一点C，使C在塔底B的正东方向上，测得点A的仰角为$60°$，再由点C沿北偏东$15°$方向走10米到位置D，测得$\angle BDC = 45°$（如图所示），则塔AB的高是（　）．



A．10米　　B．$10\sqrt{2}$米　　C．$10\sqrt{3}$米　　D．$10\sqrt{6}$米

答案　D

解析　由题意可得，$\angle BCD = 90° + 15° = 105°$，



$CD=10$，$\angle BDC=45^\circ$，

$\therefore \angle CBD=30^\circ$，

在$\triangle BCD$中，由正弦定理得

$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，即$\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{10}{\frac{1}{2}}$，解得$BC=10\sqrt{2}$，

$\because \angle ACB=60^\circ$，$AB\perp BC$，

$\therefore AB=BC\tan\angle ACB=\sqrt{3}BC=10\sqrt{6}$．

故选D．

3. 课堂巩固

正余弦定理综合

24 求解下列问题．

(1) 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$A=120^\circ$，求边b和角C．

(2) 在$\triangle ABC$中，已知$\cos A=\frac{4}{5}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，求边a，c．

答案

(1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，30°．

(2) $\frac{6}{5}$，$\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$．

解析

(1) 由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore \sin C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$\because A=120^\circ$，

$\therefore 0^\circ<C<60^\circ$，

$\therefore C=30^\circ$．

$\therefore B=180^\circ-A-C=30^\circ=C$，

$\therefore b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

(2) $\because \cos A=\dfrac{4}{5}$

$\therefore A\in(0,\pi)$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$得，$\dfrac{a}{\frac{3}{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，

$\therefore a=\dfrac{6}{5}$．

$\because \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos A\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$，

由$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=2$得，$c=2\times\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{5}$．

求面积

25 在$\triangle ABC$中，若$b\sin A=a\sin(B+\dfrac{\pi}{3})$．

(1) 求角B的大小．

(2) 若$a=2$，$b=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积．

答案 (1) $\dfrac{\pi}{3}$．

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

解析 (1) 由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$，

$\therefore a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\sin B$，

$\therefore$原式变为：$\sin A\sin B=\sin A\sin(B+\dfrac{\pi}{3})$，

$\sin A\sin B=\sin A(\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B)$，

$\dfrac{1}{2}\sin A\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B=0$，

$\sin A(\dfrac{1}{2}\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B)=0,$

$\sin A\sin(B-\dfrac{\pi}{3})=0$，

$\therefore\sin A=0$或$\sin(B-\dfrac{\pi}{3})=0$，

$\because A$、B为$\triangle ABC$内角，

$\therefore 0<A<\pi$，$0<B<\pi$，

$\therefore\sin(B-\dfrac{\pi}{3})=0$，

$B=\dfrac{\pi}{3}$．

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$．

(2) 由余弦定理得，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$3=4+c^2-4c\times\frac{1}{2}$，

$\therefore c^2-2c+1=0$，

$c=1$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$，

$=\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

26 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$a^2+c^2=b^2+ac$．

(1) 求$\cos B$的值．

(2) 若$\cos A=\frac{1}{7}$，$a=8$，求b以及$S_{\triangle ABC}$的值．

答案 (1) $B=\frac{\pi}{3}$．

(2) $b=7$，$10\sqrt{3}$．

解析 (1) $\because a^2+c^2=b^2+ac$，

$\therefore b^2=a^2+c^2-ac$，

又$\because b^2=a^2+c^2-2a\cos B$，

$\therefore 2\cos B=1$，

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$．

(2) $\because \cos A=\frac{1}{7}$，$A\in(0^\circ,180^\circ)$，

$\therefore \sin A>0$，

$\therefore \sin A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

$\frac{8}{\frac{4}{7}\sqrt{3}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，

$\therefore 4\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{7}b$，

$\therefore b=7$，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$64=49+c^2-2\times7\times c\frac{1}{7}$，

$\therefore c^2-2c=15=0$，

$(c-5)(c+3)=0$，

$\therefore c=5$或$c=-3$（舍），

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}\times7\times5\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$=10\sqrt{3}$．

27 在锐角$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2a\sin B=\sqrt{2}b$．

(1) 求角A的大小．

(2) 若$a=6$，$b+c=8$，求$\triangle ABC$的面积．

答案 (1) $\angle A=\frac{\pi}{4}$．

(2) $7(\sqrt{2}-1)$．

解析 (1) 在$\triangle ABC$中：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

则$a\sin B=b\sin A$．

$\because 2a\sin B=\sqrt{2}b$，

$\therefore 2\sin A\cdot\sin B=\sqrt{2}b$，

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

$\because\triangle ABC$是锐角三角形，

$\therefore 0<\angle A<\pi$，

$\therefore\angle A=\frac{\pi}{4}$．

(2) 在$\triangle ABC$中，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{4}bc$，

条件中$a=6$，且$b+c=8$，$\angle A=\frac{\pi}{4}$,

并且$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$．

$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{b^2+c^2-6^2}{2bc}$，

$\therefore b^2+c^2-36=\sqrt{2}bc$.

$\because (b+c)^2-2bc=b^2+c^2$,

$\therefore (b+c)^2-2bc-36=\sqrt{2}bc$,

$\therefore bc=\dfrac{8^2-36}{2+\sqrt{2}}$,

$\therefore bc=14(2-\sqrt{2})$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times 14(2-\sqrt{2})=7(\sqrt{2}-1)$.

28 设$\triangle ABC$的内角A、B、C所对的边长分别为a、b、c，且$\left(2b-\sqrt{3}c\right)\cos A=\sqrt{3}a\cos C$.

(1) 求角A的大小.

(2) 若角$B=\dfrac{\pi}{6}$，BC边上的中线AM的长为$\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积 .

答案 (1) $A=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) $\sqrt{3}$.

解析 (1) 因为$\left(2b-\sqrt{3}c\right)\cos A=\sqrt{3}a\cos C$,

所以$\left(2\sin B-\sqrt{3}\sin C\right)\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C$,

$2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos A$,

$2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin(A+C)$,

则$2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin B$,

所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，于是$A=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) 由(1)知$A=\dfrac{\pi}{6}$,

而$B=\dfrac{\pi}{6}$,

所以$AC=BC$ ，$C=\dfrac{2\pi}{3}$,

设$AC=x$ ，则$MC=\dfrac{1}{2}x$,

又$AM=\sqrt{7}$.

在$\triangle ABC$中由余弦定理得$AC^2+MC^2-2AC\cdot MC\cos C=AM^2$,

即$x^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-2x\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\cos 120^\circ=\left(\sqrt{7}\right)^2$,

解得$x=2$,

故$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}x^2\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

求边长

29 已知a，b，c分别为$\triangle ABC$三个内角A，B，C的对边，$a=\sqrt{3}b\sin A-a\cos B$．

(1) 求角B的值．

(2) 若$b=2$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，求a，c．

答案 (1) $B=60^\circ$．

(2) $a=c=2$．

解析 (1) $\because a=\sqrt{3}b\sin A-a\cos B$，

$\therefore \sin A=\sqrt{3}\sin B\sin A-\sin A\cos B$，

$\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A\neq 0$，

$\therefore 1=\sqrt{3}\sin B-\cos B$，

$\therefore 2\sin(B-30^\circ)=1$，

$\therefore \sin(B-30^\circ)=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore B-30^\circ=30^\circ$，或$150^\circ$，

$\therefore B=60^\circ$或180°（舍），

$\therefore B=60^\circ$．

(2) $\because S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}ac\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

$ac=4$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$4=(a+c)^2-2ac-ac$，

$\therefore (a+c)^2=16$，

$\therefore a+c=4$，

$\therefore a$，c为方程$x^2-4x+4=0$的2根，

$\therefore a=c=2$．

30 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\sin(A+C)=\frac{8}{17}$，且角B为锐角．

(1) 求$\cos B$的值．

(2) 若$a+c=6$，$\triangle ABC$的面积为2，求边长b．

答案 (1) $\cos B=\frac{15}{17}$．

(2) $b=2$．

解析 (1) $\because\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，

$\therefore A+C=\pi-B$，

$\therefore\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B=\frac{8}{17}$，

又角B为锐角，

$\therefore\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$．

(2) $\because\triangle ABC$的面积为2，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{4}{17}ac=2$，则$ac=\frac{17}{2}$，

又$a+c=6$，

由余弦定理得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)=36-2\times\frac{17}{2}\times\left(1+\frac{15}{17}\right)=4$，

$\therefore b=2$．

求周长

31 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$b\sin 2A=a\sin B$．

(1) 求A．

(2) 若$a=2$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长．

答案 (1) $A=\frac{\pi}{3}$．

(2) 6．

解析 (1) 由$b\sin 2A=a\sin B$，得$2b\sin A\cos A=a\sin B$．

由正弦定理得$2\sin B\sin A\cos A=\sin A\sin B$．

由于$\sin A\sin B\neq 0$，

则$\cos A=\dfrac{1}{2}$．

$\because 0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$．

(2) 由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

又$a=2$，则$4=b^2+c^2-bc$．

又$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$．

即$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=8+8=16$．

得$b+c=4$．

所以$\triangle ABC$的周长为6．

与三角函数综合

32 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$B=\dfrac{\pi}{4}$，$c=3\sqrt{2}$，$\triangle ABC$的面积为6．

(1) 求b及$\sin A$的值；

(2) 求$\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)$的值．

答案 (1) $b=\sqrt{10}$，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

(2) $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$．

解析 (1) 由已知$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，

$\therefore 6=\dfrac{1}{2}a\cdot 3\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore a=4$，

且$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$\therefore b^2=16+18-2\times 4\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10$，

$\therefore b=\sqrt{10}$，

在$\triangle ABC$中，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

$\therefore\dfrac{4}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

$\therefore\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

(2) $\because a < c$，

$\therefore 0 < A < \frac{\pi}{2}$，

又$\sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$，

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2\times\frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$，

$\therefore \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2A\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2A\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{2}$

$= \frac{4\sqrt{3}+3}{10}$．

33 已知$f(x) = \sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2 x$．

(1) 若$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{10}$，求$\cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$的值．

(2) 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对应的边分别为a，b，c，若有$(2a - c)\cos B = b\cos C$，求角B的大小以及$f(A)$的取值范围．

答案 (1) $-\frac{7}{25}$．

(2) $B = \frac{\pi}{3}$；$f(A)$的取值范围是$\left(-1, \frac{1}{2}\right]$．

解析 (1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$

$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$，

因为$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$，

所以$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$，

所以

$\cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= -\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

$= 2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$

$= -\frac{7}{25}$．

(2) 因为$(2a-c)\cos B=b\cos C$，

由正弦定理得：

$(2\sin \mathrm{A}-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，

所以$2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，

即$2\sin A\cos B=\sin(B+C)=\sin A$，

因为$\sin A>0$，

所以$\cos B=\frac{1}{2}$，

所以$B=\frac{\pi}{3}$，

所以$A+C=\frac{2\pi}{3}$，$A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，

所以$\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(-\frac{1}{2},1\right]$，

所以$f(A)$的取值范围是$\left(-1,\frac{1}{2}\right]$．

最值问题

34 在$\triangle ABC$中，A,B,C所对应的边a,b,c，且$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$，则$\sin B+\sin C$的最大值为（　　）．

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

答案 B

解析 据正弦定理，由$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$ 可得 $a^2=b^2+c^2+bc$，

再由余弦定理，可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，则$\angle A=\frac{2\pi}{3}$，

因此$\sin B+\sin C=\sin B+\sin(\frac{\pi}{3}-B)=\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sin(B+\frac{\pi}{3})$，

又$0<\angle B<\frac{\pi}{3}$，所以当$\angle B=\angle C=\frac{\pi}{6}$时，$\sin B+\sin C$取得最大值1．

35 已知锐角$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，若$a=2$，$b^2+c^2-bc=4$，则$\triangle ABC$的面积的取值范围是(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$　　B. $(0,\sqrt{3}]$

C. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

答案 C

解析 $\because a=2$，$b^2+c^2-bc=4$，

$\therefore$由余弦定理得：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$由A为锐角，可得：$A=\dfrac{\pi}{3}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$B+C=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\because$由正弦定理可得：$\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}$，可得：$b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin B$，

$c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B\right)$

$=\sin 2B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos 2B+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\because B$，C为锐角，可得：$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{6}<2B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，可得：$\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$．

故选：C．

36 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$(3b-c)\cos A=a\cos C$．

(1) 求$\cos A$．

(2) 若$a=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积S的最大值．

答案 (1) $\dfrac{1}{3}$．

(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$．

解析 (1) 由余弦定理$(3b-c)\cos A=a\cos C$

可得：$(3b-c)\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

整理得$b^2+c^2-a^2=\dfrac{2}{3}bc$，

则$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\frac{2}{3}bc}{2bc}=\dfrac{1}{3}$．

(2) 由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-3}{2bc}=\dfrac{1}{3}$，

即$b^2+c^2=3+\frac{2}{3}bc$，

因为$3+\frac{2}{3}bc=b^2+c^2\geqslant 2bc$，

所以$bc\leqslant\frac{9}{4}$，

当且仅当$b=c$时取“=”，

因为$\cos A=\frac{1}{3}$，则$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

则$S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

故$\triangle ABC$面积S的最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$．

37 设$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\cos C+\frac{1}{2}c=b$．

(1) 求角A的大小．

(2) 若$a=1$，求$\triangle ABC$的周长l的取值范围．

答案 (1) 60°.

(2) $(2,3]$.

解析 (1) $\because a\cos C+\frac{1}{2}C=b$，

$\therefore\sin A\cos C+\frac{1}{2}\sin C=\sin B$，

$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$，

$=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

且$C\in(0,\pi)$，

$\therefore\frac{1}{2}=\cos A$，$A\in(0,\pi)$，

$\therefore A=60^\circ$.

(2) 解法1：由正弦定理得：$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B$，$c=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin C$，

$l=a+b+c=1+\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin B+\sin C)$，

$=1+\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin B+\sin(A+B))=1+2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B)$，

$=1+2\sin(B+\frac{\pi}{6})$，

$\because A=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore B\in(0,\frac{2\pi}{3})$，

$\therefore B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，

$\therefore \sin(B+\frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2},1]$，

故$\triangle ABC$的周长l的取值范围是$(2,3]$．

解法2：周长$l=a+b+c=1+b+c$，

由（1）及余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore b^2+c^2=bc+1$，

$\therefore (b+c)^2=1+3bc \leqslant 1+3(\frac{b+c}{2})$，

$\therefore b+c \leqslant 2$，

又$b+c>a=1$，

$\therefore l=a+b+c \in (2,3]$，

即$\triangle ABC$的周长l的取值范围是$(2,3]$．

解法3：

由余弦定理可知$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$1=b^2+c^2-bc$，

设$b+c=t>a=1$，则$b=t-c$，代入上式消b：

$3c^2-3tc+t^2-1=0$，

设$f(c)=3c^2-3tc+t^2-1$，

由题意可知，$f(c)=0$在$(0,+\infty)$上有解，

而$f(0)=t^2-1>0$，对称轴$c=-\frac{-3t}{2\times 3}=\frac{t}{2}>0$，

故只需令$f(c)=0$的判别式$\Delta \geqslant 0$即可，

即$(-3t)^2-4\cdot 3\cdot (t^2-1) \geqslant 0$，解得$-2 \leqslant t \leqslant 2$，

综上可得，$b+c=t \in (1,2]$，

而$\triangle ABC$的周长$a+b+c \in (2,3]$．

38 已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos^2 x+1$．

(1) 求函数$f(x)$的单调递增区间．

(2) 在锐角$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$f(A)=2$，$a=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值．

答案 (1) $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in \mathbf{Z})$．

(2) $\sqrt{3}$．

解析 (1) $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得$k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$．

(2) $\because f(A)=2$，

$\therefore 2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=2$，即$\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\because\triangle ABC$为锐角三角形，

$\therefore 2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

又$a=2$，

$\therefore 4=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$，

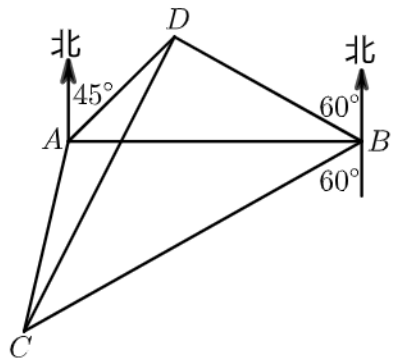
当且仅当$b=c=2$，$(bc)_{\max}=4$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\sqrt{3}$，

$\therefore$当$b=c=2$时，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\sqrt{3}$．

实际应用

39 A，B是海面上位于东西方向相距$5(3+\sqrt{3})$海里的两个观测点，现位于A点北偏东$45°$，B点北偏西$60°$的D点有一艘轮船发出求救信号，位于B点南偏西$60°$且B点相距$20\sqrt{3}$海里的C点的救援船立即前往营救，其航行速度为30海里/小时．



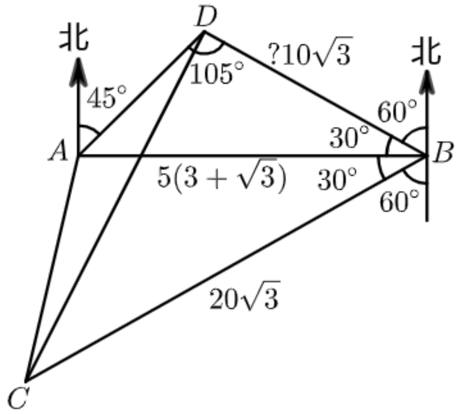
(1) 求BD的距离．

(2) 求救援船到达D点需要的时间．

答案 (1) $BD=10\sqrt{3}$.

(2) 1h .

解析 (1) $\dfrac{BD}{\sin\angle DAB}=\dfrac{BD}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{5(3+\sqrt{3})}{\sin 105^\circ}$,



$\therefore BD=10\sqrt{3}$.

(2) $\because CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle DBC$,

$CD^2=(10\sqrt{3})^2+(20\sqrt{3})^2-2\cdot10\cdot20\cdot3\cdot\cos 60^\circ$,

$\therefore CD=30$,

$\therefore t=\dfrac{CD}{v}=\dfrac{30}{30}=1\text{h}$.