

正余弦定理及面积公式

一、正弦定理

1. 知识讲解

(1) 正弦定理的内容

在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即在 $\triangle ABC$ 中，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (\text{其中 } R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径}).$$

(2) 正弦定理的变形

$$\textcircled{1} a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C ;$$

$$\textcircled{2} a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C ;$$

$$\textcircled{3} \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} ;$$

$$\textcircled{4} a \sin B = b \sin A, c \sin B = b \sin C, c \sin A = a \sin C ;$$

⑤

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{a+c}{\sin A + \sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

2. 例题精讲



正弦定理的简单运用

1 $\triangle ABC$ 中，若 $b = 2a \sin B$ ，则 A 等于 () .

A. 30° 或 60°

B. 45° 或 60°

C. 30° 或 150°

D. 120° 或 60°

答案 C

解析

根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

化简 $b = 2a \sin B$ 得： $\sin B = 2 \sin A \sin B$ ，

$\because \sin B \neq 0$ ，在等式两边同时除以 $\sin B$ 得 $\sin A = \frac{1}{2}$ ，

又 A 为三角形的内角，

则 $A = 30^\circ$ 或 150° 。

故选：C。

2 在 $\triangle ABC$ 中， $A:B:C = 1:2:3$ ，则 $a:b:c$ 等于（ ）。

A. $1:2:3$

B. $3:2:1$

C. $1:\sqrt{3}:2$

D. $2:\sqrt{3}:1$

答案 C

解析 在 $\triangle ABC$ 中， $A:B:C = 1:2:3$ ，

又 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$

所以 $\angle A = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 。

$a:b:c = \sin \angle A : \sin \angle B : \sin \angle C$

$= \sin \frac{\pi}{6} : \sin \frac{\pi}{3} : \sin \frac{\pi}{2}$

$= 1:\sqrt{3}:2$

3 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，若 $2c \cos C = b \cos A + a \cos B$ ，则 $\angle C$ 的值为（ ）。

A. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$

答案 D

解析 $2c \cos C = b \cos A + a \cos B$ ，

$\therefore 2 \sin C \cos C = \sin B \cos A + \sin A \cos B$ ，

$\therefore 2 \sin C \cos C = \sin(A+B) = \sin C$ ，

又 $\because C \in (0^\circ, 180^\circ)$ ，

$\therefore \sin C > 0$ ，

$\therefore \cos C = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore C = 60^\circ$ 。

4 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于 ().

- A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$
C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

答案 B

解析

$$\begin{aligned} & \text{由正弦定理, 得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \\ & \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{39}}{3}, \\ & \therefore a = \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin A, \\ & b = \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin B, \\ & c = \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin C, \\ & \therefore \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{39}}{3} \sin A + \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin B + \frac{2\sqrt{39}}{3} \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{39}}{3} (\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ &= \frac{2\sqrt{39}}{3}, \end{aligned}$$

故选: B.

5 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 向量 $\vec{m} = (a, b+c)$,

$\vec{n} = (\sqrt{3} \sin C + \cos C, -1)$, 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $A = ()$.

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

答案 B

解析

$$\begin{aligned} & \because \vec{m} = (a, b+c), \vec{n} = (\sqrt{3} \sin C + \cos C, -1), \vec{m} \perp \vec{n}, \\ & \therefore a(\sqrt{3} \sin C + \cos C) - b - c = 0. \end{aligned}$$

由正弦定理可得: $\sin A(\sqrt{3} \sin C + \cos C) - \sin B - \sin C = 0$.

又 $A + B + C = \pi$,

$$\therefore B = \pi - A - C,$$

$$\therefore \sin B = \sin(A + C),$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin A \sin C + \sin A \cos C - \sin(A + C) - \sin C = 0,$$

$$\sqrt{3} \sin A \sin C + \sin A \cos C - \sin A \cos C - \sin C \cos A - \sin C = 0,$$

$$\sin C (\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1) = 0.$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin A - \cos A - 1 = 0,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A - \frac{1}{2} \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right),$$

$$\therefore A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

故选：B



知两角和任一边，求其他边和角

6 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 30^\circ$ ， $C = 105^\circ$ ， $b = 8$ ，则 $a = (\quad)$ 。

A. 4

B. $4\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{2}$

答案

D

解析

因为 $A = 30^\circ$ ， $C = 105^\circ$ ，

所以 $B = 180^\circ - A - C = 45^\circ$ ，

根据解三角形正弦定理可得 $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$ ，

解得 $a = 4\sqrt{2}$ ，

故选D。



知两边和其中一边对角，求其他边和角

7 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 60^\circ$, $a = 6$, $b = 2\sqrt{3}$, 则 $B = (\quad)$.

A. 30°

B. 60°

C. 30° 或 150°

D. 60° 或 120°

答案 A

解析 由正弦定理知:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\therefore 6 \sin B = 3, \sin B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B = 30^\circ \text{ 或 } 150^\circ.$$

$$\because a > b,$$

$$\therefore A > B,$$

$$\therefore B < 60^\circ,$$

$$\therefore B = 30^\circ.$$

故选A.

8 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $\sin B + \cos B = \sqrt{2}$, 则角 A 的大小为 $(\quad)$.

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

答案 B

解析 $\sin B + \cos B = \sqrt{2}$,

$$\sqrt{2} \sin(B + 45^\circ) = \sqrt{2},$$

$$\therefore B + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore B = 45^\circ,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin B},$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2},$$

$$\text{又} \because a < b,$$

$$\therefore \angle A < \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore A = 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

$\therefore$ 选B.

3. 课堂巩固



正余弦定理简单应用

9 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b . 若 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 则角 A 等于().

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

答案 D

解析 由 $2a \sin B = \sqrt{3}b$ 得 $2 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B$, 故 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. 又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 $A = \frac{\pi}{3}$.

10 在 $\triangle ABC$ 中, $A : B : C = 4 : 1 : 1$, 则 $a : b : c$ 等于().

A. $4 : 1 : 1$

B. $2 : 1 : 1$

C. $\sqrt{2} : 1 : 1$

D. $\sqrt{3} : 1 : 1$

答案 D

解析 由 $A : B : C = 4 : 1 : 1$ 且 $A + B + C = \pi$, 得 $A = \frac{2\pi}{3}$, $B = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B = \frac{1}{2}$, $\sin C = \frac{1}{2}$.

又由 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 得, $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : 1$.

11 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $(2a + c) \cos B + b \cos C = 0$, 角 B 的值为().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

答案 C

解析

$$(2a + c) \cos B + b \cos C = 0,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos B + \sin C \cos B + \sin B \cos C = 0,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos B + \sin(B + C) = 0,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos B + \sin A = 0,$$

$$\because A \in (0^\circ, 180^\circ),$$

$$\therefore \sin A > 0,$$

$$\therefore 2 \cos B = -1,$$

$$\therefore \cos B = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore B = 120^\circ.$$

12 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $\cos A = \frac{1}{2}$, $a = \sqrt{3}$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ 等于().

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案 A

解析

$$\because 0 < A < \pi,$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{由正弦定理可得 } \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2.$$

故选A.

13 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 向量 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 满足 $\vec{m} = (\sqrt{3}b - c, \cos C)$, $\vec{n} = (a, \cos A)$, $\vec{m} \parallel \vec{n}$, 则 $\cos A$ 的值为 ____.

答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 $\because \vec{m} // \vec{n}$,

$$\therefore (\sqrt{3}b - c) \cos A - a \cos C = 0,$$

再由正弦定理得

$$\sqrt{3} \sin B \cos A = \sin C \cos A + \cos C \sin A,$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin B \cos A = \sin(C + A) = \sin B,$$

$$\text{即 } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



知两角和任一边，求其他边角

14 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $BC = 3\sqrt{2}$ ，则 $AC = ()$ 。

A. $4\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案 B

解析 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$ ，即 $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}$ ，所以 $AC = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$ 。

故选B。



知两边和其中一边对角，求其他边和角

15 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a = 1$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $A = 30^\circ$ ，则角 B 等于 ()。

A. 60° 或 120°

B. 30° 或 150°

C. 60°

D. 120°

答案 A

解析 $\because \triangle ABC$ 中， $a = 1$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $A = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,
 得: $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore a < b$, $\therefore A < B$,
 则 $B = 60^\circ$ 或 120° ,
 故选: A .

- 16 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin B + \sin A (\sin C - \cos C) = 0$, $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, 则 $C = (\quad)$.
- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

答案 B

解析

$\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,
 $\therefore \sin B + \sin A (\sin C - \cos C) = 0$,
 $\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0$,
 $\therefore \cos A \sin C + \sin A \sin C = 0$,
 $\therefore \sin C \neq 0$,
 $\therefore \cos A = -\sin A$,
 $\therefore \tan A = -1$,
 $\therefore \frac{\pi}{2} < A < \pi$,
 $\therefore A = \frac{3\pi}{4}$,
 由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$,
 $\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a}$,
 $\therefore a = 2$, $c = \sqrt{2}$,
 $\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore a > c$,
 $\therefore C = \frac{\pi}{6}$.
 故选 B .

二、余弦定理

1. 知识讲解

(1) 余弦定理的内容

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的二

倍，即在 $\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC. \end{cases}$$

(2) 余弦定理的变形

$$\begin{cases} cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ cosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\ cosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 = 2bccosA, \\ a^2 + c^2 - b^2 = 2accosB, \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2abcosC. \end{cases}$$

2. 例题精讲



余弦定理的简单运用

17 已知 $\triangle ABC$ 中， $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$ ，那么角 C 的大小是（ ）。

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

答案

A

解析

由题可知 $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$ ，

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \sqrt{3},$$

$$cosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\because$ 角 C 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$$\therefore C = \frac{\pi}{6}.$$

故选A.

- 18 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 A 角大小为 _____ .

答案 $\frac{\pi}{6}$

解析 $\because \sin C = 2\sqrt{3}\sin B$,
 $\therefore c = 2\sqrt{3}b$,
 $\therefore a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc = \sqrt{3}b \cdot 2\sqrt{3}b = 6b^2$,
 $\therefore a^2 = 7b^2$, 即 $a = \sqrt{7}b$,
 又 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $= \frac{b^2 + 12b^2 - 7b^2}{2b \cdot 2\sqrt{3}b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $A \in (0, \pi)$,
 $\therefore A = \frac{\pi}{6}$.

- 19 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边为 a, b, c , 且 $a \sin A + c \sin C - b \sin B = \sqrt{2}a \sin C$, 则 $\cos B$ 的值为 _____ .

答案 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 由正弦定理知 $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{2}ac$,
 由余弦定理知 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

知三边, 求三个角

- 20 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____ .

答案 1

解析 方法一: $\frac{\sin 2A}{\sin C}$
 $= \frac{2 \sin A \cos A}{\sin C}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a}{c} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
 &= \frac{4}{6} \times \frac{25 + 36 - 16}{30} \\
 &= \frac{90}{90} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

方法二：由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 36 - 16}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$,

由正弦定理和二倍角公式可得, $\frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin C} = 2 \cos A \frac{a}{c} = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 1$.

故答案为：1.

21 在 $\triangle ABC$ 中, 已知三个内角 A, B, C 满足 $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$, 则 $\cos B = ()$.

A. $\frac{9}{16}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5\sqrt{7}}{16}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

答案 A

解析 由 $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$ 结合正弦定理可得 $a : b : c = 6 : 5 : 4$,

设 $a = 6x (x > 0)$, 则 $b = 5x, c = 4x$,

$$\text{所以 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{36x^2 + 16x^2 - 25x^2}{2 \cdot 6x \cdot 4x} = \frac{9}{16}.$$

故选A.

22 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 8, b = 7, \cos C = \frac{13}{14}$, 则最大角的余弦值是().

A. $-\frac{1}{5}$

B. $-\frac{1}{6}$

C. $-\frac{1}{7}$

D. $-\frac{1}{8}$

答案 C

解析 因为在 $\triangle ABC$ 中, $a = 8, b = 7, \cos C = \frac{13}{14}$,

$$\text{所以由余弦定理可得: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \frac{13}{14} = 9,$$

所以 $c = 3$,

因为 $a > b > c$,

所以 $A > B > C$,

故选C .

知两边和它们夹角，求其他边角

2

故答案为：2.

3. 课堂巩固

余弦定理的简单运用

D. $\frac{2\pi}{3}$

答案 D

解析

$$\because a^2 = b^2 + c^2 + bc,$$

$$\text{又} \because a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\therefore \cos A = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore A = 120^\circ.$$

故选D.

26 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a^2 = 2b^2$, $\sin C = \sqrt{3} \sin B$. 则 $\cos A =$

_____.

答案

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

解析

$$\because a^2 = 2b^2,$$

$$\therefore a = \sqrt{2}b,$$

$$\text{又} \because \sin C = \sqrt{3} \sin B,$$

$$\therefore c = \sqrt{3}b,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$2b^2 = b^2 + 3b^2 - 2\sqrt{3}b^2 \cos A,$$

$$2\sqrt{3}b^2 \cos A = 2b^2,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

27 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $a \cos B = (\sqrt{2}c - b) \cos A$, 则角 A 的大小为 () .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

答案

B

解析

$$a \cos B = (\sqrt{2}c - b) \cos A$$

$$a \cos B + b \cos A = \sqrt{2}c \cdot \cos A$$

$$a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \sqrt{2}c \cdot \cos A$$

$$c = \sqrt{2} \cos A \cdot c$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$A = \frac{\pi}{4}.$$

故选B.



知三边，求三个角

28 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 5$ ， $b = 8$ ， $c = 7$ ，则 $\cos C =$ _____.

答案

$$\frac{1}{2}$$

解析

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \therefore \cos C = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

29 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$ ，则 $\angle B =$ () .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

答案

C

解析

$$\because \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8,$$

$$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8,$$

$$\text{设 } a = 5k, b = 7k, c = 8k (k > 0),$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25k^2 + 64k^2 - 49k^2}{2 \times 5k \times 8k} = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 < B < \pi,$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

故选C.

30 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 6$, $b = 7$, $\cos C = \frac{5}{7}$, 则最大内角的余弦值是 _____.

答案 $\frac{1}{5}$

解析 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 36 + 49 - 2 \times 6 \times 7 \times \frac{5}{7} = 25$, 故 $c = 5$.
 $\therefore$ 最大边为 b , 最大角为 B , $\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{5}$.

知两边和它们夹角, 求其他边角

31 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, $A = \frac{\pi}{3}$, 则边 c 的值为 () .

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3} + 1$

答案 B

解析 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,
 $\therefore \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin B}$,
 $\therefore \sin B = \frac{1}{2}$,
 $\therefore b < a$,
 $\therefore \angle B = \angle A = \frac{\pi}{3}$,
 $\therefore B = 30^\circ$,
 $\therefore C = 90^\circ$,
 $\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 2 = 8$,
 $\therefore c = 2\sqrt{2}$.

32 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = 1$, $c = 2\sqrt{2}$, $B = 45^\circ$, 则 $\sin C =$ () .

A. $\frac{4}{41}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{4\sqrt{41}}{41}$

答案 C

解析

$$\because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\therefore b^2 = 1 + 8 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore b^2 = 9 - 4 = 5,$$

$$\therefore b = \sqrt{5},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$8 = 1 + 5 - 2\sqrt{5} \cos C,$$

$$\therefore \cos C = \frac{-1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{又} \because C \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin C > 0,$$

$$\therefore \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5},$$

故选C.

三、三角形的面积公式

1. 知识讲解

$$(1) S = \frac{1}{2} \text{底} \times \text{高}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$(3) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)} = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin(C+A)} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)}$$

$$(4) S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (R \text{ 为外接圆半径})$$

$$(5) S = \frac{abc}{4R}$$

$$(6) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \left(p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right); \quad (\text{海伦公式})$$

2. 例题精讲



面积公式应用

33 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ().

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$
C. $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$

答案 D

解析 由余弦定理可得: $2^2 = (2\sqrt{3})^2 + a^2 - 2 \times 2\sqrt{3}a \cos 30^\circ$,

$$\therefore a^2 - 6a + 8 = 0 .$$

解得 $a = 2$ 或 4 .

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{3} \text{ 或 } 2\sqrt{3} .$$

故选：D．

34 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

答案 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

解析 $\because c^2 = (a-b)^2 + 6$,

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 6 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 2ab - 6,$$

由余弦定理知 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - 6}{2ab} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore ab = 6,$$

$$\therefore \text{三角形}ABC\text{的面积为} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

35 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $b = 1$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 求 $\frac{a + 2b + c}{\sin A + 2\sin B + \sin C} = (\quad)$.

- A. $\sqrt{3}$
C. 2
- B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

答案 D

解析

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, c = 4,$$

$$\text{利用余弦定理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cos 60^\circ = 13, a = \sqrt{13},$$

$$\text{利用正弦定理, } \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{39}}{3},$$

$$\text{根据合分比性质 } \frac{a+2b+c}{\sin A + 2\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

故选D.

36 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 面积为 S , 且 $4S = (a+b)^2 - c^2$, 则 $\cos C =$

_____.

答案

0

解析

$$\because 4S = (a+b)^2 - c^2, S = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$\therefore 2ab \sin C = (a+b)^2 - c^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + 2ab - 2ab \sin C = c^2 \text{ ①},$$

$$\text{又} \because a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2 \text{ ②},$$

$$\therefore \text{①}-\text{②}, 2ab - 2ab \sin C + 2ab \cos C = 0,$$

$$\therefore \cos C - \sin C + 1 = 0,$$

$$\therefore \cos C = 0.$$

故答案为: 0.

37 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , $\cos 2A + 3 \cos A = 1$, $b = 5$, $\triangle ABC$ 的面积

$S = 5\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____.

答案

$9 + \sqrt{21}$

解析

$$\cos 2A + 3 \cos A = 1,$$

$$\text{即为 } 2\cos^2 A + 3 \cos A - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } \cos A = \frac{1}{2} \text{ (}-2 \text{舍去)},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{由 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3},$$

解得 $c = 4$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 21,$$

解得 $a = \sqrt{21}$,

可得 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{21} + 5 + 4 = 9 + \sqrt{21}$.

故答案为: $9 + \sqrt{21}$.

38 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin B \sin C = \sqrt{3} \sin A$, $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}, a + b = 3\sqrt{3}, \text{ 则 } c = (\quad).$$

A. $\sqrt{21}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{21}$ 或 $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{21}$ 或 3

答案 D

解析 $\because \sin A \sin C = \sqrt{3} \sin A,$

$$\therefore b \sin C = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}a}{b},$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}a}{b},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\text{又 } \because a + b = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore b = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}a}{b} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore C = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ,$$

$$\text{① } C = 60^\circ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$c^2 = 3 + 12 - 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2},$$

$$c^2 = 15 - 6 = 9,$$

$$\therefore c = 3.$$

$$\textcircled{2} C = 120^\circ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$c^2 = 3 + 12 - 2 \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$c^2 = 21,$$

$$\therefore c = \sqrt{21}.$$

故选D.

39 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c , 且 $a = 1, B = 45^\circ, S_{\triangle ABC} = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径为 ().

A. $4\sqrt{3}$

B. 5

C. $5\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2}$

答案 C

解析 由题设可知:

在 $\triangle ABC$ 中, $a = 1, B = 45^\circ, S_{\triangle ABC} = 2$,

$$\text{则利用 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = 2,$$

$$\text{解得 } c = 4\sqrt{2},$$

又利用余弦定理可知,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B,$$

$$\text{即 } b^2 = 1^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25,$$

$$\text{解得 } b = 5,$$

$$\text{故由正弦定理可知, } \frac{b}{\sin B} = 2R = d,$$

$$\text{即 } \frac{5}{\sin B} = 5\sqrt{2} = 2R = d,$$

即 $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 $5\sqrt{2}$,

故选C.



面积最值问题

- 40 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, $a = 2$, 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

答案 $\sqrt{3}$

解析 由 $a = 2$ 知, $(a+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$,

由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

于是 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $b^2 + c^2 - bc = a^2 = 4 \geq 2bc - bc = bc$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \leq \sqrt{3}$.

- 41 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{2a-c}{b} = \frac{\cos C}{\cos B}$, $b = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 ().

A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{3}$

答案 A

解析 $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中 $\frac{2a-c}{b} = \frac{\cos C}{\cos B}$,

$\therefore (2a-c)\cos B = b\cos C$,

$\therefore (2\sin A - \sin C)\cos B = \sin B\cos C$,

$\therefore 2\sin A\cos B = \sin C\cos B + \sin B\cos C = \sin(B+C) = \sin A$,

约掉 $\sin A$ 可得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理可得 $16 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - ac \geq 2ac - ac$,

$\therefore ac \leq 16$, 当且仅当 $a = c$ 时取等号,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac \leq 4\sqrt{3}$.

故选 A.

- 42 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b = 2\sqrt{2}$ 且 $\triangle ABC$ 面积为 $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - a^2 - c^2)$, 则 $\angle B =$ _____, $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值为 _____.

答案 $1:150^\circ$

$$2:4 - 2\sqrt{3}$$

解析

$$(1) S = \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2 - a^2 - c^2),$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(-2ac \cos B),$$

$$\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{12}(-2ac \cos B),$$

$$\therefore \tan B = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore B = 150^\circ.$$

$$(2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$8 = (a+c)^2 - 2ac - 2ac \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$8 = (a+c)^2 - (2-\sqrt{3})ac,$$

$$\therefore (2-\sqrt{3})ac + 8 = (a+c)^2 \geq 4ac,$$

$$\therefore (2+\sqrt{3})ac \leq 8,$$

$$\therefore ac \leq \frac{8}{2+\sqrt{3}} = 8(2-\sqrt{3}),$$

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B \leq \frac{1}{2} \cdot 8(2-\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

3. 课堂巩固



面积公式应用

43 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $\cos C = \frac{1}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为().

A. $3\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

答案 C

解析

$$\because \cos C = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{又} \because a = 3\sqrt{2}, b = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

故选：C.

44 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $\cos B = \frac{1}{4}$ ， $b = 2$ ， $\sin C = 2 \sin A$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）.

A. $\frac{\sqrt{15}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

D. $\sqrt{15}$

答案 B

解析 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore ac = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2 \text{ ①},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{结合已知 } \sin C = 2 \sin A,$$

$$\therefore c = 2a,$$

$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{联立①式解得 } a = 1, c = 2,$$

$$\text{又 } \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

故选B.

45 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $a = 6\sqrt{3}$ ， $b = 12$ ， $S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$ ，则 $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 1:12

2:6

解析

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A,$$

$$\text{即 } 18\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 12 \times c \cdot \sin 60^\circ,$$

解得 $c = 6$.

$$\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12.$$

46 已知 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且

$$2S = (a+b)^2 - c^2, \text{ 则 } \tan C = ().$$

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $-\frac{3}{4}$

答案 C

解析

$$\text{由 } 2S = (a+b)^2 - c^2, \text{ 得 } 2S = a^2 + b^2 + 2ab - c^2,$$

$$\text{即 } 2 \times \frac{1}{2}ab \sin C = a^2 + b^2 + 2ab - c^2,$$

$$\text{所以 } ab \sin C - 2ab = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab \sin C - 2ab}{2ab} = \frac{\sin C}{2} - 1,$$

$$\text{所以 } \cos C + 1 = \frac{\sin C}{2}, \text{ 即 } 2\cos^2 \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\text{因为 } \cos \frac{C}{2} \neq 0, \text{ 所以 } \tan \frac{C}{2} = 2,$$

$$\text{所以 } \tan C = \frac{2 \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

故选C.

47 在 $\triangle ABC$ 中, $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2}b$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = a \sin C$, 则 $a+c$ 的值为 _____.

答案 4

解析

$$\because S = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$\therefore a \sin C = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$\therefore b = 2 ,$$

$$\therefore a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = 3 ,$$

$$\therefore a (\cos C + 1) + c (\cos A + 1) = 6 ,$$

$$\therefore a \cos C + c \cos A + a + c = 6 ,$$

$$\therefore a \cos C + c \cos A = b = 2 ,$$

$$\therefore a + c = 4 .$$

48 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的周长为7, 面积为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$,

$\cos C = -\frac{1}{8}$, 则 $c =$ _____ .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析

$$\therefore \cos C = -\frac{1}{8} ,$$

$$\text{又} \because \angle C \in (0^\circ, 180^\circ) ,$$

$$\therefore \sin C > 0 ,$$

$$\text{利用} \sin^2 C + \cos^2 C = 1 ,$$

$$\therefore \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8} ,$$

$$\frac{1}{2} ab \sin C = S ,$$

$$\frac{1}{2} ab \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{4} ,$$

$$ab = 4 ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C ,$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab - 2ab \cos C ,$$

$$c^2 = (7-c)^2 - 8 + 1 ,$$

$$\therefore c^2 = 49 - 14c + c^2 - 7 ,$$

$$\therefore 14c = 42 ,$$

$$c = 3 .$$

故选C .

49 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 对边分别为 a 、 b 、 c , $A = 60^\circ$, $b = 1$, 这个三角形的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的直径是() .

A. $\sqrt{39}$

B. $\frac{\sqrt{39}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{39}}{6}$

D. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$

答案 D

解析 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$ 且 $b = 1$, $A = 60^\circ$,

$$\therefore c = 4,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 13,$$

$$\therefore a = \sqrt{13},$$

$$\therefore 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

最值问题

50 在 $\triangle ABC$ 中, a , b , c 分别为内角 A , B , C 的对边, $a + c = 4$, $(2 - \cos A)\tan \frac{B}{2} = \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 _____ .

答案 $\sqrt{3}$

解析 在 $\triangle ABC$ 中, $\because (2 - \cos A)\tan \frac{B}{2} = \sin A$, $\therefore (2 - \cos A) \cdot \frac{\sin B}{1 + \cos B} = \sin A$,

$$\text{即 } 2\sin B = \sin A + \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin A + \sin C,$$

$$\therefore 2b = a + c = 4, \therefore b = 2.$$

$$\therefore a + c = 4, \therefore a = 4 - c.$$

$$\therefore S = \sqrt{3(3-a)(3-b)(3-c)} = \sqrt{3(3-c)(c-1)}.$$

$$\therefore (3-c)(c-1) \leq \left(\frac{3-c+c-1}{2}\right)^2 = 1,$$

$$\therefore S \leq \sqrt{3}.$$

故答案为: $\sqrt{3}$.

51 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2a+b}{c} = \frac{\cos(A+C)}{\cos C}$, $c=2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $2\sqrt{3}$

答案 A

解析

$$\frac{2a+b}{c} = \frac{\cos(A+C)}{\cos C} = \frac{-\cos B}{\cos C},$$

$$\therefore 2a \cos C + b \cos C = C(-\cos B),$$

$$\therefore 2 \sin A \cos C + \sin B \cos C + \sin C \cos B = 0,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos C + \sin(B+C) = 0,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos C + \sin A = 0.$$

$$\because A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore 2 \cos C + 1 = 0,$$

$$\therefore \cos C = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore C = 120^\circ,$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$\therefore 4 = a^2 + b^2 + ab,$$

$$\therefore 4 = (a+b)^2 - ab,$$

$$\therefore ab + 4 = (a+b)^2 \geq 4ab,$$

$$\therefore ab \leq \frac{4}{3},$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选A.