

三角形形状判断与解三角形-习题

一、选择题

- 1 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$, $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则符合条件的三角形有 () .
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 0个

答案 B

解析 $\because \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\therefore \cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 ① 当 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,
 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5 + c^2 - 3}{2\sqrt{5}c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\therefore$ 整理可得 $c^2 - \sqrt{10}c + 2 = 0$,
 求得 $c = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2}$ 有两个解,
 ② 当 $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,
 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5 + c^2 - 3}{2\sqrt{5}c} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 整理得 $c^2 + \sqrt{10}c + 2 = 0$,
 求得 $c = \frac{-\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2} < 0$,
 与 $c > 0$ 矛盾.
 综合可知, $c = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2}$,
 即这样的三角形有 2 个.
 故选 B.

- 2 已知 $\triangle ABC$ 中, 满足 $b = 2$, $B = 60^\circ$ 的三角形有两解, 则边长 a 的取值范围是 () .
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 2$ B. $\frac{1}{2} < a < 2$ C. $2 < a < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $2 < a < 2\sqrt{3}$

答案 C

解析

由三角形有两解, 则满足 $\begin{cases} a \sin B < b \\ a > b \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} a \sin 60^\circ < 2 \\ a > 2 \end{cases}, \text{解得: } 2 < a < \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

边长 a 的取值范围 $\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

故选 C.

3 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\cos A = (\quad)$.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

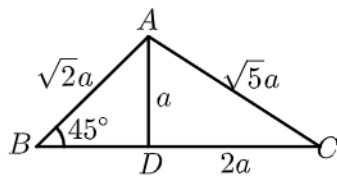
C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

答案 C

解析

方法一:



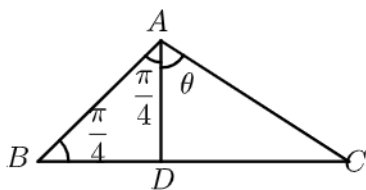
设 $AD = a$, 则 $BC = 3AD = 3a$, $AB = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{5}a$.

$$\therefore \cos A = \frac{(\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{5}a)^2 - (3a)^2}{2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{5}a} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

故选 C.

方法二: 设 $\triangle ABC$ 中角 A 、 B 、 C 对应的边分别为 a 、 b 、 c ,

$AD \perp BC$ 于 D , 令 $\angle DAC = \theta$,



$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高 $AD = h = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a$,

$\therefore BD = AD = \frac{1}{3}a$, $CD = \frac{2}{3}a$,

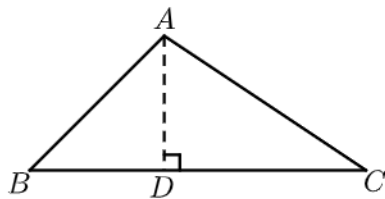
$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \cos \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{故 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore \cos A = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 故选C.}$$

方法三：



过A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，

由题意知 $AD = BD = \frac{1}{3}BC$ ，

则 $CD = \frac{2}{3}BC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $AC = \frac{\sqrt{5}}{3}BC$ ， $\sin \angle DAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

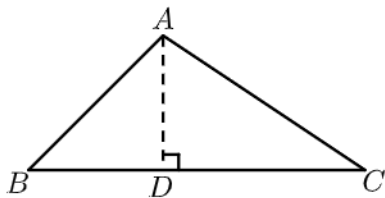
因为 $B = \frac{\pi}{4}$ ，

所以

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \cos \left(\angle DAC + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \angle DAC \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \angle DAC \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &\times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

故选C.

方法四：过A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，



由题意知 $AD = BD = \frac{1}{3}BC$ ，则 $CD = \frac{2}{3}BC$ ， $AB = \frac{\sqrt{2}}{3}BC$ ， $AC = \frac{\sqrt{5}}{3}BC$ ，而

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{9}BC^2$$

$$- \frac{2}{9}BC^2 = -\frac{1}{9}BC^2$$

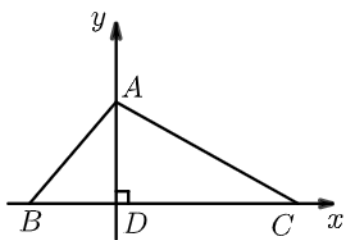
$$\text{, 所以 } \cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-\frac{1}{9}BC^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}BC \times \frac{\sqrt{5}}{3}BC} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

故选C.

方法五：过A作 $AD \perp BC$ ，垂足为D，

设 $BC = 3a (a > 0)$ ，结合题意知 $AD = BD = a$ ， $DC = 2a$ 。

以D为原点，DC，DA所在直线分别为x轴，y轴建立如图所示的平面直角坐标系，



则 $B(-a, 0)$, $C(2a, 0)$, $A(0, a)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (-a, -a)$, $\overrightarrow{AC} = (2a, -a)$, 所以 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}a$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}a$, 所以 $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2a^2 + a^2}{\sqrt{2}a \times \sqrt{5}a} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选C.

4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a + b = c(\cos A + \cos B)$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ().

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形

答案 B

解析

$$a + b = c(\cos A + \cos B).$$

$$a + b = c \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right).$$

$$2ab(a + b) = ab^2 + ac^2 - a^3 + a^2b + bc^2 - b^3.$$

$$a^3 + b^3 + ab^2 + a^2b = ac^2 + bc^2 = c^2(a + b).$$

$$\therefore a^2 + b^2 - ab + ab = c^2.$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

$$\therefore \text{是 Rt}\triangle.$$

$$\therefore \text{选 B}.$$

5 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cdot \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ().

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形
C. 等腰三角形或直角三角形 D. 等腰直角三角形

答案 C

解析 在 $\triangle ABC$ 中, $\because a \cdot \cos A = b \cos B$,
 $\therefore$ 由正弦定理得: $\sin A \cos A = \sin B \cos B$,
 即 $\sin 2A = \sin 2B$,
 $\therefore 2A = 2B$ 或 $2A = \pi - 2B$,
 $\therefore A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore \triangle ABC$ 的形状为等腰三角形或直角三角形.
 故选: C.

- 6 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{c}$, $(b+c+a)(b+c-a) = 3bc$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ().
- A. 等边三角形 B. 等腰非等边三角形 C. 直角三角形 D. 钝角三角形

答案 A

解析 $\because \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{c}$,
 $\therefore \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$,
 $\therefore b = c$.
 又 $\because (b+c+a)(b+c-a) = 3bc$,
 $\therefore (b+c)^2 - a^2 = 3bc$,
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2 - bc$.
 又 $\because a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,
 $\therefore \cos A = \frac{1}{2}$,
 $\therefore A = 60^\circ$.
 又 $\because b = c$,
 $\therefore$ 为等边三角形.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b^2 + c^2 = a^2 + bc$, 若 $\sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

答案 C

解析

$$b^2 + c^2 = a^2 + bc,$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\cos A = \frac{1}{2},$$

$$A = 60^\circ,$$

$$\begin{cases} \sin B \cdot \sin C = \sin^2 A \\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \end{cases},$$

$$\therefore bc = a^2, a^2 - bc = 0,$$

$$b^2 + c^2 - 2bc = a^2 - bc,$$

$$(b - c)^2 = 0, b = c,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形, 故选C.

8 若 $\triangle ABC$ 中, $\sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为().

- A. 直角三角形 B. 等边三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

答案 C

解析

$$\text{由 } \sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2} \text{ 可得}$$

$$2 \sin B \cdot \sin C = 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A,$$

$$\text{即 } 2 \sin B \cdot \sin C = 1 - \cos(B + C) = 1 - \cos B \cos C + \sin B \sin C,$$

$$\therefore \sin B \cdot \sin C + \cos B \cos C = 1, \text{ 即 } \cos(B - C) = 1,$$

$$\text{又 } -\pi < \angle B - \angle C < \pi, \therefore \angle B - \angle C = 0, \text{ 即 } \angle B = \angle C.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

$\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边, 若 $\frac{c}{b} < \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 是() .

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 等边三角形

答案 B

解析

$$\because \frac{c}{b} < \cos A,$$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin B} < \cos A,$$

$$\because B \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin B > 0,$$

$$\therefore \sin C < \sin B \cos A,$$

$$\therefore \sin(A+B) < \sin B \cos A,$$

$$\therefore \sin A \cos B + \sin B \cos A < \sin B \cos A,$$

$$\therefore \sin A \cos B < 0,$$

$$\because A \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A > 0,$$

$$\therefore \cos B < 0,$$

$$\therefore B \text{ 为钝角},$$

$$\therefore \text{为钝角三角形},$$

故选: B .

二、填空题

- 10 已知 $\triangle ABC$, $AB = AC = 4$, $BC = 2$. 点 D 为 AB 延长线上一点, $BD = 2$, 连结 CD , 则 $\triangle BDC$ 的面积是 _____, $\cos \angle BDC =$ _____ .

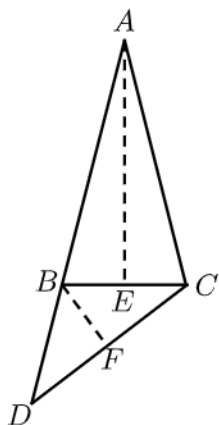
答案

$$1: \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$2: \frac{\sqrt{10}}{4}$$

解析

方法一: 取 BC 中点 E , DC 中点 F ,



由题意： $AE \perp BC$ ， $BF \perp CD$ ，

$$\triangle ABE \text{ 中, } \cos \angle ABC = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{4}, \therefore \cos \angle DBC = -\frac{1}{4}, \sin \angle DBC = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times BD \times BC \times \sin \angle DBC = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{又} \because \cos \angle DBC = 1 - 2\sin^2 \angle DBF = -\frac{1}{4}, \therefore \sin \angle DBF = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore \cos \angle BDC = \sin \angle DBF = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{综上可得, } \triangle BCD \text{ 面积为 } \frac{\sqrt{15}}{2}, \cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

方法二： $\because AB = AC = 4, BC = 2$ ，

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{1}{4},$$

$\therefore \angle ABC$ 为三角形的内角.

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore \sin \angle CBD = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{故 } S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\therefore BD = BC = 2,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle BDC.$$

$$\text{又 } \cos \angle ABC = \frac{1}{4},$$

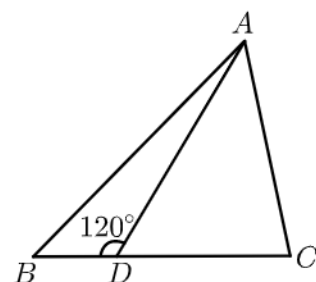
$$\therefore 2\cos^2 \angle BDC - 1 = \frac{1}{4} \text{ 得 } \cos^2 \angle BDC = \frac{5}{8}$$

又 $\angle BDC$ 为锐角，

$$\therefore \cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

11 在 $\triangle ABC$ 中， D 为边 BC 上一点， $BD = \frac{1}{2}DC$ ， $\angle ADB = 120^\circ$ ， $AD = 2$ ，若 $\triangle ADC$ 的面积为

$3 - \sqrt{3}$ ，则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$.



答案 60°

解析 $\because S_{ADC} = 3 - \sqrt{3}, \therefore \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin 60^\circ = 3 - \sqrt{3},$

$$\therefore DC = 2(\sqrt{3} - 1), BD = \sqrt{3} - 1,$$

由余弦定理： $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot DB \cos 120^\circ = 6,$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cos 60^\circ = 24 - 12\sqrt{3} = 6(\sqrt{3} - 1)^2.$$

$$\therefore AB = \sqrt{6}, AC = \sqrt{6}(\sqrt{3} - 1).$$

再由余弦定理， $\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{2}, \therefore \angle BAC = 60^\circ.$