

三角形形状判断与解三角形

一、三角形解的个数

1. 知识讲解

已知三角形的两边和其中一边的对角，不能唯一确定三角形的形状，解这类三角形问题将出现无解、一解和两解三种情况，应分情况予以讨论。

在 $\triangle ABC$ 中，已知 a ， b 和 $\angle A$ 时，解的情况如下：

①从代数角度分析

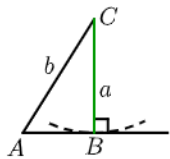
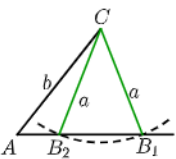
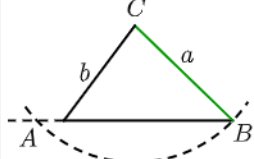
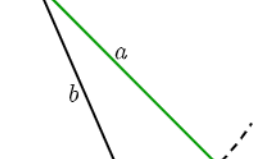
i. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$ ，则满足条件的三角形的个数为0，即无解；

ii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$ ，则满足条件的三角形的个数为1；

iii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ ，则满足条件的三角形的个数为1或2。

显然由 $0 < \sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ 可得 $\angle B$ 有两个值，一个为钝角一个为锐角，考虑到“大边对大角”“三角形内角和等于 180° ”等，此时需进行讨论。

②从几何角度分析

	$\angle A$ 为锐角			$\angle A$ 为钝角或直角
图形				
关系式	$a = b \sin A$	$b \sin A < a < b$	$a \geq b$	$a > b$
解的个数	一解	两解	一解	一解

上表中若 $\angle A$ 为锐角，当 $a < b \sin A$ 时无解；若 $\angle A$ 为钝角或直角，当 $a \leq b$ 时无解。

2. 例题精讲

1 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$, $b = 4$, 则满足条件的 $\triangle ABC$ 的解的个数为() .

- A. 一个 B. 两个 C. 无解 D. 不能确定

答案 B

解析 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$, $b = 4$,

$\therefore$ 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 得: $13 = 16 + c^2 - 8c \cos 60^\circ$,

得: $c^2 - 4c + 3 = 0$, (*)

$\therefore \Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$, 且两根之和、两根之积都为正数,

$\therefore$ 方程(*)有两个不相等的正实数根, 即有两个边 c 满足题中的条件.

由此可得满足条件的 $\triangle ABC$ 有两个解.

故选B.

2 下列条件判断三角形解的情况, 正确的是() .

- A. $a = 8$, $b = 16$, $A = 30^\circ$, 有两解 B. $b = 18$, $c = 20$, $B = 60^\circ$, 有一解
C. $a = 15$, $b = 2$, $A = 90^\circ$, 无解 D. $a = 40$, $b = 30$, $A = 120^\circ$, 有一解

答案 D

解析 A选项: 由正弦定理 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{16}{8} \sin 30^\circ = 1$, 故 $B = 90^\circ$ 是唯一解, 故A错误;

B选项: 由正弦定理 $\sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{20}{18} \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{9} > \sin B$, $c > b$, 此时 C 可以是钝角或锐角, 有两解, 故B错误;

C选项: 由于正弦定理 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{2}{15}$, $a > b$, 故 B 只能是锐角, 有一解, 故C错误;

D选项: 由正弦定理 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $a > b$, 此时 B 只能是锐角, 有一解, 故D正确.

故选D.

3 如果满足条件 $B = 60^\circ$, $b = 12$ 的 $\triangle ABC$ 有且只有一个, 则 a 的范围是() .

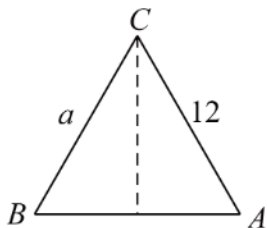
- A. $0 < a \leq 12$ B. $12 < a < 8\sqrt{3}$

C. $0 < a \leq 12$ 或 $a = 8\sqrt{3}$

D. $12 < a \leq 8\sqrt{3}$

答案 C

解析



由题意可得当 $k \sin 60^\circ = 12$ 或 $12 \geq k$ 时, 满足三角形恰有一个,

$$\text{解得 } k = \frac{12}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{3}, 0 < a \leq 12.$$

故选C.

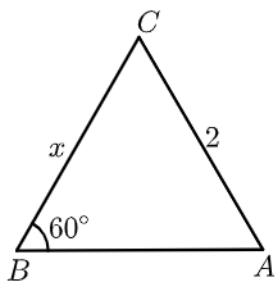
- 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = x, b = 2, B = 60^\circ$, 如果 $\triangle ABC$ 有两解, 则 x 的取值范围为 _____.

答案 $2 < x < \frac{4}{3}\sqrt{3}$

解析 $\because \triangle ABC$ 有两解,

$$\therefore x \sin 60^\circ < 2 < x,$$

$$\therefore 2 < x < \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$



3. 课堂巩固

- 5 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 6, c = 10, B = 30^\circ$, 则解此三角形的结果有 ().

A. 无解

B. 一解

C. 两解

D. 一解或两解

答案 C

解析 由正弦定理知 $\sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{5}{6}$ ，又由 $c > b > c \sin B$ 知，C 有两解。也可依已知条件，画出 $\triangle ABC$ ，由图知有两解。

6 不解三角形，下列判断中不正确的是（ ）。

A. $a = 7, b = 14, A = 30^\circ$ ，有两解

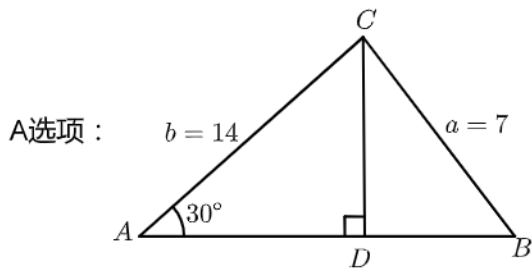
B. $a = 30, b = 25, A = 150^\circ$ ，有一解

C. $a = 6, b = 9, A = 45^\circ$ ，无解

D. $b = 9, c = 10, B = 60^\circ$ ，有两解

答案 A

解析



$$\therefore CD = 14 \sin 30^\circ = 7,$$

$$\therefore \text{又} \because BC = CD,$$

$\therefore$ 唯一解，故A错误；

$$\text{B选项：} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\frac{30}{\sin 150^\circ} = \frac{25}{\sin B},$$

$$\therefore \sin B = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \sin 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle A = 150^\circ,$$

$\therefore \angle B$ 必为锐角，

$$\text{又} \because \sin B < \sin 30^\circ,$$

$$\therefore B < 30^\circ,$$

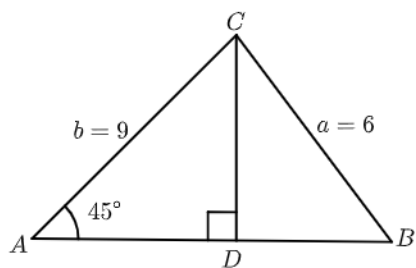
$\therefore \angle B$ 只有一解，

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

$$= 30^\circ - \angle B \text{ 也唯一确定，}$$

$\therefore$ 唯一解，故B正确；

C选项：



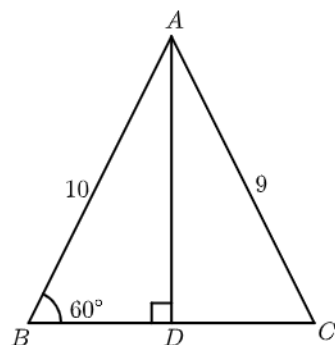
$$CD = 9 \sin 45^\circ = \frac{9}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{9}{2}\sqrt{2} > 6,$$

$$\therefore CB < CD,$$

$\therefore$ 无解，故C正确；

D选项：



$$AD = 10 \sin 60^\circ = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore 5\sqrt{3} < 9 < 10,$$

$$\therefore AD < AC < AB,$$

$\therefore$ 有2解，故D正确。

故选A.

7 若满足条件 $C = 60^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = a$ 的 $\triangle ABC$ 有两个，那么 a 的取值范围是 ()。

A. $(1, \sqrt{2})$

B. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

C. $(\sqrt{3}, 2)$

D. $(1, 2)$

答案 C

解析

根据正弦定理可 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ ，代人已知条件可求得 $\sin A = \frac{a}{2}$ ，因为 $C = 60^\circ$ ，若满足有两个三角形 ABC ，则 $60^\circ < A < 120^\circ$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{a}{2} < 1$ ，所以 $a \in (\sqrt{3}, 2)$ 。故选C。

在 $\triangle ABC$ 中, $BC = x$, $AC = 2$, $\angle B = 45^\circ$, 若满足条件的三角形有两个解, 则 x 的取值范围是 () .

- A. $(0, 2)$ B. $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ C. $(2, 2\sqrt{2})$ D. $(2, 2\sqrt{3})$

答案 C

二、判断三角形形状

1. 知识讲解

在 $\triangle ABC$ 中,

1. 由余弦定理知: 在 $\triangle ABC$ 中, 若:

① $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\angle C$ 是直角;

② $a^2 + b^2 < c^2$, 则 $\angle C$ 是钝角;

③ $a^2 + b^2 > c^2$, 则 $\angle C$ 是锐角.

2. 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形 ($a = b$) 或直角三角形 ($\angle C = \frac{\pi}{2}$).

3. 若:

① $\sin A = \cos B$, 则 $\angle C = \frac{\pi}{2}$;

② $\sin A > \cos B$, 则 $\angle C < \frac{\pi}{2}$;

③ $\sin A < \cos B$, 则 $\angle C > \frac{\pi}{2}$;

上述三个结论的证明有一定的难度, 有勇气的读者不妨一试.

2. 例题精讲

9 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 若 $a \sin A + b \sin B < c \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 () .

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 不确定

答案 B

解析 根据正弦定理 $a \sin A + b \sin B < c \sin C$ ，可转换为 $a^2 + b^2 < c^2$ ， $\therefore \triangle ABC$ 的形状是钝角三角形。

10 若在 $\triangle ABC$ 中，有 $a = 2b \cos C$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是 _____。

答案 等腰三角形

解析 将 $a = 2b \cos C$ ，利用正弦定理化简得： $\sin A = 2 \sin B \cos C$ ，
 $\therefore \sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin B \cos C$ ，
 $\therefore \sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin(B - C) = 0$ ，
 $\therefore B$ 与 C 为三角形内角，
 $\therefore B - C = 0$ ，即 $B = C$ ，
 故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。

11 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$ ，
 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()。

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰或直角三角形

答案 D

解析 两边同除 $2R$ ，
 $\sin C - \sin A \cos B = (2 \sin A - \sin B) \cos A$ ，
 $\sin(A + B) - \sin A \cos B + \cos A \sin B - 2 \sin A \cos A = 0$ ，
 $2 \cos A \sin B - 2 \sin A \cos A = 0$ ，
 $2 \cos A (\sin B - \sin A) = 0$ ，
 $\therefore \sin A = \sin B$ 或 $\cos A = 0$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 等腰或直角三角形。
 故选 D。

12 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 () .

- A. 正三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

答案 B

解析 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\therefore \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c},$$

$$\therefore \frac{1+\cos A}{2} = \frac{\sin B + \sin C}{2\sin C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore 1+\cos A = \frac{\sin B}{\sin C} + 1,$$

$$\text{即 } \cos A = \frac{\sin B}{\sin C},$$

$$\therefore \cos A \sin C = \sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

$$\therefore \sin A \cos C = 0, \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \cos C = 0,$$

$\therefore C$ 为直角.

故选B.

13 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 () .

- A. 有一内角为 30° 的直角三角形 B. 等腰直角三角形
C. 有一内角为 30° 的等腰三角形 D. 等边三角形

答案 B

解析 由 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 和正弦定理知,

$$\frac{\cos A}{2R \sin A} = \frac{\cos B}{2R \sin B} = \frac{\sin C}{2R \sin C} = \frac{1}{2R} \quad (R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径}),$$

$$\therefore \begin{cases} \cos A = \sin A, \\ \cos B = \sin B, \end{cases} \therefore \angle A = \angle B = 45^\circ, \therefore \angle C = 90^\circ.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选B.

14 在 $\triangle ABC$ 中, 满足 $\tan A \cdot \tan B > 1$, 则这个三角形是 () .

A. 正三角形

B. 等腰三角形

C. 锐角三角形

D. 钝角三角形

答案 C

解析

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 满足 $\tan A \cdot \tan B > 1$,

$\therefore A, B$ 都是锐角, $\tan A > 0, \tan B > 0$,

再由 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} < 0$,

可得 $A+B$ 为钝角, 故由三角形内角和公式可得 C 为锐角.

综上可得这个三角形是锐角三角形.

故选 C.

3. 课堂巩固

15 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ().

A. 钝角三角形

B. 直角三角形

C. 锐角三角形

D. 不能确定

答案 A

解析

方法一: $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$,

则 $a^2 + b^2 < c^2$,

则 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$,

又 $C \in (0, \pi)$,

$\therefore C \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形.

故选 A.

方法二: 由 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 得

$a^2 + b^2 < c^2$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 < 0$.

又 $\because \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 故 $\cos C < 0$.

又 $0 < C < \pi$, 故 $\frac{\pi}{2} < C < \pi$,

$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形.

16 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B = b \cos A$, 且 $a = b \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是() .

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 不确定

答案 C

解析

$$a \cos B = b \cos A,$$

$$\therefore \sin A \cos B - \sin B \cos A = 0,$$

$$\therefore \sin(A - B) = 0,$$

$$\therefore A = B,$$

$$\text{又} \because a = b \sin C,$$

$$\therefore \sin A = \sin B \sin C,$$

$$\therefore \sin C = 1,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等腰直角三角形.}$$

17 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 所对的边, 若 $b \cos C + c \cos B = a \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为() .

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 锐角三角形

答案 B

解析

在 $\triangle ABC$ 中,

$$\therefore b \cos C + c \cos B = a \sin A,$$

$$\therefore \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin(B + C) = \sin A = \sin^2 A,$$

$$\therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \sin A = 1,$$

$$\therefore \text{由于} A \text{ 为三角形内角, 可得 } A = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 就是直角三角形.

故选 B.

18 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$ (a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边), 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ().

- A. 直角三角形 B. 正三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰三角形

答案 A

解析

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{c-b}{2c}, \text{ 由降幂公式及正弦定理得} \\ \frac{1-\cos A}{2} &= \frac{\sin C - \sin B}{2 \sin C} \text{ 即 } \sin C - \sin C \cos A \\ &= \sin C - \sin B. \end{aligned}$$

$$\therefore \sin B = \sin C \cos A, \text{ 又 } \sin B = \sin(A+C),$$

$$\therefore \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C.$$

$$\text{即 } \sin A \cos C = 0, \text{ 又 } \sin A > 0, A \in (0, \pi)$$

$$\therefore \cos C = 0, \therefore C = \frac{\pi}{2}. \text{ 为直角三角形.}$$

19 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是 ().

- A. 等边三角形 B. 有一个角是 30° 的直角三角形
C. 等腰直角三角形 D. 有一个是 30° 的等腰三角形

答案 C

解析

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b}{\cos B} &= \frac{c}{\cos C}, \\ \therefore \frac{\sin B}{\cos B} &= \frac{\sin C}{\cos C}, \end{aligned}$$

$$\therefore \sin B \cos C - \sin C \cos B = 0,$$

$$\therefore \sin(B-C) = 0,$$

$$\therefore B = C,$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B},$$

$$\therefore \frac{\sin A}{\sin A} = \frac{\sin B}{\cos B},$$

$$\therefore \tan B = 1,$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore A = \pi - B - C = \frac{\pi}{2},$$

$\therefore$ 为等腰直角三角形.

故选C.

20 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A \cos B > \sin A \sin B$, 则 $\triangle ABC$ 一定为().

A. 等边三角形

B. 直角三角形

C. 锐角三角形

D. 钝角三角形

答案 D

解析 $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A \cos B > \sin A \sin B$,

$$\therefore \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B) = -\cos C > 0,$$

$$\therefore \cos C < 0,$$

$\therefore C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角,

$$\therefore \frac{\pi}{2} < C < \pi,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为钝角三角形.

故选D.

三、几何问题

1. 知识讲解

综合利用正余弦定理可以推导出三角形的一些相关有趣的结论, 这些结论不但好玩儿, 而且应用在某些题目中会起到意想不到的效果.

在 $\triangle ABC$ 中, 请读者证明下面结论:

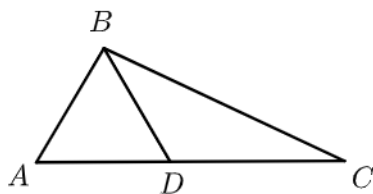
1. 射影公式: $a = b \cos C + c \cos B$, $b = a \cos C + c \cos A$, $c = a \cos B + b \cos A$;

2. 记 BC 、 AC 、 AB 边上的中线分别为 m_a 、 m_b 、 m_c ，应用余弦定理证明：

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}, m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}, m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

2. 例题精讲

- 21 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AC 上的点，且 $AB = AD$ ， $2AB = \sqrt{3}BD$ ， $BC = 2BD$ ，则 $\sin C$ 的值为（ ）.



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

答案 D

解析

设 $AB = c$ ，则 $AD = c$ ， $BD = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ ， $BC = \frac{4c}{\sqrt{3}}$ ，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理的变形得 $\cos A = \frac{c^2 + c^2 - \frac{4}{3}c^2}{2c^2} = \frac{1}{3}$ ，

则 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

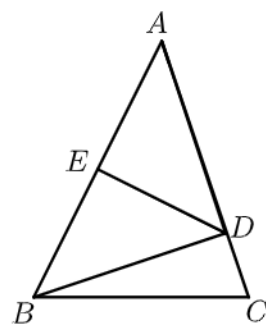
在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得：

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{\frac{4c}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}},$$

解得 $\sin C = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，

故选D.

- 22 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $C = \frac{\pi}{3}$ ， $BC = 4$ ，点 D 在边 AC 上， $AD = DB$ ， $DE \perp AB$ ， E 为垂足，若 $DE = 2\sqrt{2}$ ，则 $\cos A =$ （ ）.



A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

答案 D

解析

$$\because DE = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BD = AD = \frac{DE}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin A},$$

$$\because \angle BDC = 2\angle A,$$

$$\therefore \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C},$$

$$\therefore \frac{4}{\sin 2A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin A} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin A},$$

$$\therefore \frac{4}{2 \sin A \cos A} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \sin A},$$

$$\because \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

故选D.

3. 课堂巩固

23 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 中点, $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, 则 $AD = ()$.

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

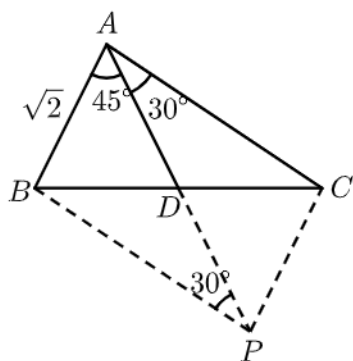
C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

答案 B

解析

补全平行四边形 $ABPC$,

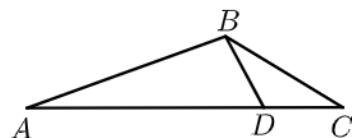


$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin 105^\circ},$$

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AP = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

- 24 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD = 3DC$, $AB = \sqrt{7}$, $\angle ADB = \frac{\pi}{3}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$, 则
 $DC = \underline{\hspace{2cm}}$; $\tan \angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$.

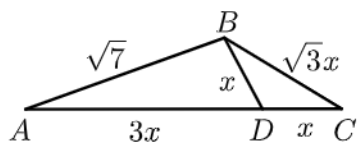


答案

1:1

2: $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析



$$\because \angle ADB = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \angle DBC + \angle C = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又} \because \angle C = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \angle DBC = \frac{\pi}{6} = \angle C,$$

$$\text{设 } DC = x,$$

$$\therefore BD = x,$$

$$\text{又} \because \angle BDC = 120^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{3}x,$$

$$AD = 3DC = 3x ,$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C ,$$

$$7 = 3x^2 + 16x^2 - 8\sqrt{3}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore 7 = 19x^2 - 12x^2 ,$$

$$\therefore x = 1 ,$$

$$\therefore DC = 1 ;$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC ,$$

$$16 = 7 + 3 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cos \angle ABC ,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = -\frac{3}{\sqrt{21}} ,$$

$$\text{又} \because \angle ABC \in (0, \pi) ,$$

$$\therefore \sin \angle ABC > 0 ,$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} ,$$

$$\therefore \tan \angle ABC = -\frac{2\sqrt{3}}{3} .$$