

三角形形状判断与解三角形

一、三角形解的个数

1. 知识讲解

已知三角形的两边和其中一边的对角，不能唯一确定三角形的形状，解这类三角形问题将出现无解、一解和两解三种情况，应分情况予以讨论。

在 $\triangle ABC$ 中，已知 a ， b 和 $\angle A$ 时，解的情况如下：

①从代数角度分析

i. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$ ，则满足条件的三角形的个数为0，即无解；

ii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$ ，则满足条件的三角形的个数为1；

iii. 若 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ ，则满足条件的三角形的个数为1或2。

显然由 $0 < \sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$ 可得 $\angle B$ 有两个值，一个为钝角一个为锐角，考虑到“大边对大角”“三角形内角和等于 180° ”等，此时需进行讨论。

②从几何角度分析

	$\angle A$ 为锐角			$\angle A$ 为钝角或直角
图形				
关系式	$a = b \sin A$	$b \sin A < a < b$	$a \geq b$	$a > b$
解的个数	一解	两解	一解	一解

上表中若 $\angle A$ 为锐角，当 $a < b \sin A$ 时无解；若 $\angle A$ 为钝角或直角，当 $a \leq b$ 时无解。

2. 例题精讲

- 1 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{13}$, $b = 4$, 则满足条件的 $\triangle ABC$ 的解的个数为 () .
 A. 一个 B. 两个 C. 无解 D. 不能确定
- 2 下列条件判断三角形解的情况, 正确的是 () .
 A. $a = 8$, $b = 16$, $A = 30^\circ$, 有两解 B. $b = 18$, $c = 20$, $B = 60^\circ$, 有一解
 C. $a = 15$, $b = 2$, $A = 90^\circ$, 无解 D. $a = 40$, $b = 30$, $A = 120^\circ$, 有一解
- 3 如果满足条件 $B = 60^\circ$, $b = 12$ 的 $\triangle ABC$ 有且只有一个, 则 a 的范围是 () .
 A. $0 < a \leq 12$ B. $12 < a < 8\sqrt{3}$
 C. $0 < a \leq 12$ 或 $a = 8\sqrt{3}$ D. $12 < a \leq 8\sqrt{3}$
- 4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = x$, $b = 2$, $B = 60^\circ$, 如果 $\triangle ABC$ 有两解, 则 x 的取值范围为 _____ .

3. 课堂巩固

- 5 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 6$, $c = 10$, $B = 30^\circ$, 则解此三角形的结果有 () .
 A. 无解 B. 一解 C. 两解 D. 一解或两解
- 6 不解三角形, 下列判断中不正确的是 () .
 A. $a = 7$, $b = 14$, $A = 30^\circ$, 有两解 B. $a = 30$, $b = 25$, $A = 150^\circ$, 有一解
 C. $a = 6$, $b = 9$, $A = 45^\circ$, 无解 D. $b = 9$, $c = 10$, $B = 60^\circ$, 有两解
- 7 若满足条件 $C = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = a$ 的 $\triangle ABC$ 有两个, 那么 a 的取值范围是 () .
 A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ C. $(\sqrt{3}, 2)$ D. $(1, 2)$
- 8 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = x$, $AC = 2$, $\angle B = 45^\circ$, 若满足条件的三角形有两个解, 则 x 的取值范围是 () .

A. (0, 2)

B. $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

C. $(2, 2\sqrt{2})$

D. $(2, 2\sqrt{3})$

二、判断三角形形状

1. 知识讲解

在 $\triangle ABC$ 中,

1. 由余弦定理知: 在 $\triangle ABC$ 中, 若:

① $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\angle C$ 是直角;

② $a^2 + b^2 < c^2$, 则 $\angle C$ 是钝角;

③ $a^2 + b^2 > c^2$, 则 $\angle C$ 是锐角.

2. 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形($a = b$)或直角三角形($\angle C = \frac{\pi}{2}$).

3. 若:

① $\sin A = \cos B$, 则 $\angle C = \frac{\pi}{2}$;

② $\sin A > \cos B$, 则 $\angle C < \frac{\pi}{2}$;

③ $\sin A < \cos B$, 则 $\angle C > \frac{\pi}{2}$;

上述三个结论的证明有一定的难度, 有勇气的读者不妨一试.

2. 例题精讲

9 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 若 $a \sin A + b \sin B < c \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().

A. 锐角三角形

B. 钝角三角形

C. 直角三角形

D. 不确定

10 若在 $\triangle ABC$ 中, 有 $a = 2b \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是_____.

11 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰或直角三角形

12 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 () .

- A. 正三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

13 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 () .

- A. 有一内角为 30° 的直角三角形 B. 等腰直角三角形
C. 有一内角为 30° 的等腰三角形 D. 等边三角形

14 在 $\triangle ABC$ 中, 满足 $\tan A \cdot \tan B > 1$, 则这个三角形是 () .

- A. 正三角形 B. 等腰三角形 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形

3. 课堂巩固

15 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 () .

- A. 钝角三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 不能确定

16 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cos B = b \cos A$, 且 $a = b \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 () .

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 不确定

17 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 所对的边, 若 $b \cos C + c \cos B = a \sin A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 () .

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 锐角三角形

18 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$ (a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边), 则 $\triangle ABC$ 的形状为 () .

- A. 直角三角形 B. 正三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰三角形

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是 () .

- A. 等边三角形
B. 有一个角是 30° 的直角三角形
C. 等腰直角三角形
D. 有一个是 30° 的等腰三角形

20 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A \cos B > \sin A \sin B$, 则 $\triangle ABC$ 一定为 () .

- A. 等边三角形
B. 直角三角形
C. 锐角三角形
D. 钝角三角形

三、几何问题

1. 知识讲解

综合利用正余弦定理可以推导出三角形的一些相关有趣的结论, 这些结论不但好玩儿, 而且应用在某些题目中会起到意想不到的效果.

在 $\triangle ABC$ 中, 请读者证明下面结论:

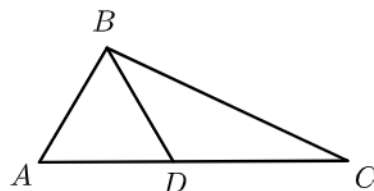
1. 射影公式: $a = b \cos C + c \cos B$, $b = a \cos C + c \cos A$, $c = a \cos B + b \cos A$;

2. 记 BC 、 AC 、 AB 边上的中线分别为 m_a 、 m_b 、 m_c , 应用余弦定理证明:

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}, m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}, m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

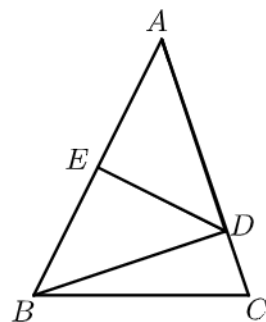
2. 例题精讲

21 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, 且 $AB = AD$, $2AB = \sqrt{3}BD$, $BC = 2BD$, 则 $\sin C$ 的值为 () .



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $C = \frac{\pi}{3}$ ， $BC = 4$ ，点 D 在边 AC 上， $AD = DB$ ， $DE \perp AB$ ， E 为垂足，若 $DE = 2\sqrt{2}$ ，则 $\cos A = (\quad)$.



A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

3. 课堂巩固

23 在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 中点， $\angle BAD = 45^\circ$ ， $\angle CAD = 30^\circ$ ， $AB = \sqrt{2}$ ，则 $AD = (\quad)$.

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

24 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，且 $AD = 3DC$ ， $AB = \sqrt{7}$ ， $\angle ADB = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle C = \frac{\pi}{6}$ ，则

$DC = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\tan \angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$.

