

## 复数-习题

### 一、选择题

1 复数  $\frac{i-2}{1+2i} = ( \quad )$  .

A.  $i$

B.  $-i$

C.  $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

D.  $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

答案 A

解析  $\frac{i-2}{1+2i} = \frac{(i-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5i}{5} = i$

故答案为A .

2 已知 $i$ 为虚数单位, 若复数 $z$ 满足 $(1-i)z = 2i^{2016}$ , 则 $z$ 的虚部为( ) .

A.  $-1$

B.  $1$

C.  $i$

D.  $-i$

答案 B

解析  $\because (1-i)z = 2i^{2016}$ ,  
 $\therefore z = \frac{2i^{2016}}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ ,

$\therefore z$ 的虚部为1 .

故选B .

3 设 $(1+2i)(a+i)$ 的实部与虚部相等, 其中 $a$ 为实数, 则 $a = ( \quad )$  .

A.  $-3$

B.  $-2$

C.  $2$

D.  $3$

答案 A

解析

由题意  $(1+2i)(a+i) = a-2 + (1+2a)i$ ，实部与虚部相等，则有  $a-2 = 1+2a$ ，解得  $a = -3$ 。

4 已知  $a \in \mathbf{R}$ ， $i$  是虚数单位，若  $z = a + \sqrt{3}i$ ， $z \cdot \bar{z} = 4$ ，则  $a = ( )$ 。

- A. 1或-1                      B.  $\sqrt{7}$ 或 $-\sqrt{7}$                       C.  $-\sqrt{3}$                       D.  $\sqrt{3}$

答案 A

解析 由  $z = a + \sqrt{3}i$ ， $z \cdot \bar{z} = 4$ ，得  $a^2 + 3 = 4$ ，所以  $a = \pm 1$ ，故选A。

5 若  $z = 1 + 2i$ ，则  $\frac{4i}{z \cdot \bar{z} - 1} = ( )$ 。

- A. 1                      B. -1                      C. i                      D. -i

答案 C

解析  $\because z = 1 + 2i$ ，

$$\bar{z} = 1 - 2i，$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{4i}{z \cdot \bar{z} - 1} &= \frac{4i}{(1+2i)(1-2i) - 1} \\ &= \frac{4i}{1+4-1} \\ &= i。 \end{aligned}$$

故选C。

6 设  $z = (2t^2 + 5t - 3) + (t^2 - 2t + 2)i$ ， $t \in \mathbf{R}$ ，则下列命题中一定正确的是 ( )。

- A.  $z$  的对应点  $Z$  在第一象限                      B.  $z$  的对应点  $Z$  在第四象限  
C.  $z$  不是纯虚数                      D.  $z$  是虚数

答案 D

**解析**  $t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1 > 0$ .

7 设复数  $z$  满足  $\frac{1+z}{1-z} = i$ , 则  $|z| = ( )$ .

A. 1

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\sqrt{3}$

D. 2

**答案** A

**解析** 方法一：设  $z = a + bi$ , 所以由已知可得  $1 + a + bi = (1 - a - bi)i$ .

$$\therefore \begin{cases} 1+a=b \\ 1-a=b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}. \text{所以} |z| = 1.$$

$$\text{方法二：由} \frac{1+z}{1-z} = i, \text{得} z = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i,$$

所以  $|z| = |i| = 1$ .

故选A.

8 在复平面内, 复数  $\frac{-2+3i}{3-4i}$  ( $i$ 是虚数单位) 所对应的点位于 ( ).

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

**答案** B

$$\begin{aligned} \therefore \frac{-2+3i}{3-4i} &= \frac{(-2+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \\ &= \frac{-6+12i^2-8i+9i}{25} = \frac{-18+i}{25} = -\frac{18}{25} + \frac{i}{25}. \end{aligned}$$

$\therefore$  复数  $\frac{-2+3i}{3-4i}$  所对应的点的坐标为  $(-\frac{18}{25}, \frac{1}{25})$ , 位于第二象限.

故选B.

9 当  $\frac{2}{3} < m < 1$  时, 复数  $m(3+i) - (2+i)$  在复平面内对应的点位于 ( ).

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

**答案** D

**解析** 化简得  $(3m-2) + i(m-1)$  ,  
 又  $\because \frac{2}{3} < m < 1$  ,  
 $\therefore 3m-2 > 0$  ,  $m-1 < 0$  ,  
 $\therefore$  所对应的点在第四象限 .  
 故选 D .

10 已知复数  $zi = \left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{2018}$  ( $i$  为虚数单位) , 则  $z$  的虚部为 ( ) .

- A. 1                      B. -1                      C. i                      D. -i

**答案** A

**解析**  $\because \frac{i+1}{i-1} = \frac{-(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i$  ,  
 $(-i)^4 = 1$  ,  
 $\therefore (-i)^{2018} = [(-i)^4]^{504} \cdot i^2 = -1$  ,  
 $\therefore$  复数  $zi = \left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{2018} = -1$  ,  
 $\therefore -i \cdot zi = -1 \times (-i)$  , 解得  $z = i$  ,  
 则  $z$  的虚部为 1 .  
 故选 A .

11 已知  $m$  为实数,  $i$  为虚数单位, 若  $m + (m^2 - 4)i > 0$  , 则  $\frac{m+2i}{2-2i} = ( )$  .

- A. i                      B. 1                      C. -i                      D. -1

**答案** A

**解析**  $\because m + (m^2 - 4)i > 0$  ,  
 $\therefore \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases}$  , 解得:  $m = 2$  .  
 则  $\frac{m+2i}{2-2i} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{(2+2i)^2}{(2-2i)(2+2i)} = i$  .  
 故选: A .

12 如果复数 $z$ 满足 $|z+i|+|z-i|=2$ ，那么 $|z+i+1|$ 的最小值是（ ）.

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C. 2

D.  $\sqrt{5}$

答案 A

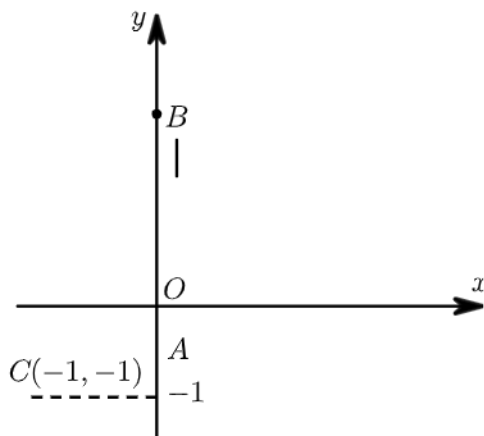
解析 由 $|z+i|+|z-i|=2$ 可知：复数 $z$ 的对应点 $Z$ 到 $A(0, -1)$ ， $B(0, 1)$ 的距离之和等于2，

又 $|AB|=2$ ，

$\therefore$ 满足条件的复数 $z$ 的对应点 $Z$ 在以 $A$ ， $B$ 为端点的线段上，

又 $|z+1+i|$ 的几何意义是 $Z$ 点与 $C(-1, -1)$ 的距离

如图所示：



当 $Z$ 与 $A(0, -1)$ 重合时， $|z+1+i|$ 取得最小值，最小值为1.

故选A.

## 二、填空题

13 计算复数 $\frac{7+i}{3+4i} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案  $1-i$

解析 
$$\begin{aligned} \frac{7+i}{3+4i} &= \frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{21+4+3i-28i}{25} \end{aligned}$$

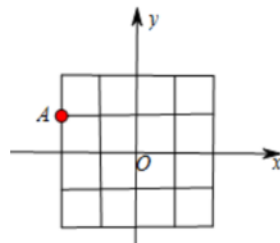
$$= 1 - i.$$

14 已知 $i$ 为虚数单位，则复数 $i^{2021} =$ \_\_\_\_\_.

答案  $i$

解析  $i^{2021} = i^{2020} \cdot i = (i^2)^{1010} \cdot i = (-1)^{1010} \cdot i = i.$

15 如图，在复平面内，复数 $z$ 和点 $A$ 对应，这复数 $z =$ \_\_\_\_\_.



答案  $-2 + i$

解析  $A$ 点坐标为 $(-2, 1)$ ，故对应的复数为 $-2 + i$ .

16 若复数 $z$ 满足 $2z + \bar{z} = 3 - 2i$ ，其中 $i$ 为虚数单位，则 $z =$  ( ).

A.  $1 + 2i$

B.  $1 - 2i$

C.  $-1 + 2i$

D.  $-1 - 2i$

答案 B

解析 方法一：设 $z = a + bi$ ，则 $2z + \bar{z} = 3a + bi = 3 - 2i$ ，故 $a = 1$ ， $b = -2$ ，则 $z = 1 - 2i$ .

方法二：由 $2z + \bar{z} = 3 - 2i$ 得 $2\bar{z} + z = 3 + 2i$ ②，

$$\text{由} \begin{cases} 2z + \bar{z} = 3 - 2i \\ 2\bar{z} + z = 3 + 2i \end{cases}, \text{得} z = 1 - 2i.$$

17 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ， $i$ 是虚数单位，若 $(1 + i)(1 - bi) = a$ ，则 $\frac{a}{b}$ 的值为\_\_\_\_\_.

答案 2

解析  $(1+i)(1-bi) = a$ ,  $1+b+i-bi = a$ ,  $\therefore 1+b = a$   

$$\begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}, \frac{a}{b} = 2.$$

18  $i$ 是虚数单位, 若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数, 则实数 $a$ 的值为 \_\_\_\_\_.

答案 -2

解析  $(1-2i)(a+i) = a+2+(1-2a)i$ ,  
 $\therefore (1-2i)(a+i)$ 纯虚数,  
 $\therefore a+2=0$ ,  
 $\therefore a=-2$ ,  
 故答案为-2.

19 复数 $z = \frac{m^2-m-6}{m-4} + (m^2-2m-8)i$ 是纯虚数, 则实数 $m =$  \_\_\_\_\_.

答案 3

解析  $\because z = \frac{m^2-m-6}{m-4} + (m^2-2m-8)i$ 为纯虚数,  

$$\therefore \begin{cases} \frac{m^2-m-6}{m-4} = 0 \\ m^2-2m-8 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} (m-3)(m+2) = 0 \text{ 且 } m \neq 4 \\ (m-4)(m+2) \neq 0 \end{cases},$$
 $\therefore m = 3.$

20 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$ 是虚数单位. 若 $(a+i)(1+i) = bi$ , 则 $a+bi =$  \_\_\_\_\_.

答案  $1+2i$

解析

$$\because (a+i)(1+i) = bi,$$

$$\therefore (a-1) + (a+1)i = bi,$$

$$\therefore \begin{cases} a-1=0 \\ a+1=b \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases},$$

$$a+bi = 1+2i.$$

故答案为： $1+2i$ .

21

计算  $(1-2i) \cdot i^{102} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案

$$-1+3i$$

解析

$$\begin{aligned} & (1-2i)i^{102} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \\ &= (1-2i)(i^2)^{51} + \left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^5 \\ &= -1+2i+i^5 \\ &= -1+2i+i \\ &= -1+3i. \end{aligned}$$

22

已知复数  $z = \frac{i+i^2+i^3+\cdots+i^{2011}}{3-2i}$ , 则  $z = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案

$$\frac{-3-2i}{13}$$

解析

$$\begin{aligned} z &= \frac{i+i^2+\cdots+i^{2011}}{3-2i} \\ &= \frac{i-i^{2012}}{(3-2i)(1-i)} \\ &= \frac{i-(i^2)^{1006}}{(3-2i)(1-i)} \\ &= \frac{i-1}{(3-2i)(1-i)} \\ &= \frac{-1}{3-2i} \\ &= \frac{-3-2i}{13}. \end{aligned}$$

23 设 $z_1$ 是复数,  $z_2 = z_1 - i\bar{z}_1$  (其中 $\bar{z}_1$ 表示 $z_1$ 的共轭复数), 已知 $z_2$ 的实部是 $-1$ , 则 $z_2$ 的虚部为\_\_\_\_\_.

答案 1

解析 设 $z_1 = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ),  
 则 $z_2 = a + bi - i(a - bi) = (a - b) + (b - a)i$ ,  
 $\because a - b = -1, \therefore b - a = 1$ .  
 $\therefore z_2$ 的虚部 $b - a = 1$ .

### 三、解答题

24 已知复数 $z = (m^2 - 4) + (m^2 - 2m - 8)i$ ,  $i$ 是虚数单位,  $m \in \mathbf{R}$ .

- (1) 若 $z$ 是纯虚数, 求 $m$ 的值.
- (2) 若 $z = -3 - 5i$ , 求 $m$ 的值.
- (3) 若 $z$ 与复数 $-3 + 9i$ 互为共轭复数, 求 $m$ 的值.

答案 (1) 2.

(2)  $-1$ .

(3) 1.

解析 (1)  $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m^2 - 2m - 8 \neq 0 \end{cases}$ ,  
 $\therefore m^2 - 4 = 0$ ,  
 $\therefore m = 2$ 或 $m = -2$ ,  
 $m^2 - 2m - 8 \neq 0$ ,  
 $(m - 4)(m + 2) \neq 0$   
 $\therefore m \neq 4$ 或 $m \neq -2$ ,  
 $\therefore m = 2$ .

$$(2) \begin{cases} m^2 - 4 = -3 \\ m^2 - 2m - 8 = -5 \end{cases} ,$$

$$\therefore m^2 = 1 ,$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } m = -1 ,$$

$$m^2 - 2m - 3 = 0 ,$$

$$(m - 3)(m + 1) = 0$$

$$\therefore m = 3 \text{ 或 } m = -1 ,$$

$$\therefore m = -1 .$$

$$(3) \because z \text{ 与复数 } -3 + 9i \text{ 互为共轭复数} ,$$

$$\therefore z = -3 - 9i ,$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 4 = -3 \\ m^2 - 2m - 8 = -9 \end{cases} ,$$

$$\therefore m^2 = 1 ,$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } m = -1 ,$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0 ,$$

$$(m - 1)^2 = 0 ,$$

$$\therefore m = 1 ,$$

$$\therefore m = 1 .$$

25 实数  $m$  取什么值时, 复数  $z = (m^2 - 5m + 6) + (m^2 - 3m)i$  是:

(1) 实数?

(2) 虚数?

(3) 纯虚数?

(4) 表示复数  $z$  的点在第一象限?

答案

(1)  $m = 0$  或  $m = 3$  .

(2)  $m \neq 3$  且  $m \neq 0$  .

(3)  $m = 2$  .

(4)  $m > 3$  或  $m < 0$  .

解析

(1)  $m^2 - 3m = 0$  ,

$$\therefore m(m-3) = 0,$$

$$\therefore m = 0 \text{ 或 } m = 3.$$

$$(2) \quad m^2 - 3m \neq 0,$$

$$\therefore m \neq 0 \text{ 且 } m \neq 3.$$

$$(3) \quad \begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m^2 - 3m \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore (m-2)(m-3) = 0,$$

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } m = 3 \text{ 且 } m \neq 0 \text{ 且 } m \neq 3,$$

$$\therefore m = 2.$$

$$(4) \quad \begin{cases} m^2 - 5m + 6 > 0 \\ m^2 - 3m > 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} (m-2)(m-3) > 0 \\ m(m-3) > 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m > 3 \text{ 或 } m < 2 \\ m > 3 \text{ 或 } m < 0 \end{cases},$$

$$\therefore m > 3 \text{ 或 } m < 0.$$