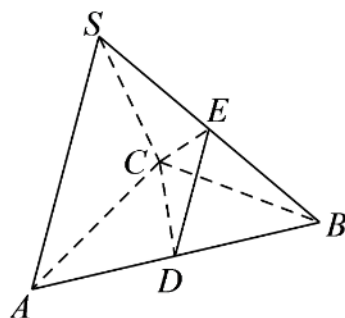


立体几何与空间向量综合

一、空间中的角度

例1

- 1 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 ABC 是正三角形， $AB=4$ ， $SA=SC=2\sqrt{3}$ ，侧面 $SAC \perp$ 底面 ABC ， D ， E 分别为 AB ， SB 的中点。



- (1) 求证： $AC \perp SB$ 。
- (2) 求直线 SC 与平面 ECD 所成角的正弦值。
- (3) 求二面角 $E-CD-B$ 的余弦值。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 。
- (3) $\frac{1}{3}$ 。

解析

- (1) 取 AC 的中点 O ，连接 OB ， OS 。

$$\because SA = SC, AB = CB,$$

$$\therefore AC \perp SO, AC \perp BO.$$

$$\text{又} \because \text{平面 } SAC \perp \text{平面 } ABC,$$

且 AC 是平面 ACS 与平面 ACB 的交线，

$$\therefore SO \perp \text{平面 } ABC.$$

如图所示建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 。

由已知得 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $C(-2, 0, 0)$, $S(0, 0, 2\sqrt{2})$, $S(1, \sqrt{3}, 0)$, $E(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$.

$$\overrightarrow{AC} = (-4, 0, 0), \overrightarrow{SB} = (0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{2}).$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (-4, 0, 0) \cdot (0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{2}) = 0,$$

$$\therefore AC \perp SB.$$

$$(2) \overrightarrow{CE} = (2, \sqrt{3}, \sqrt{2}), \overrightarrow{DE} = (-1, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{SC} = (-2, 0, -2\sqrt{2}).$$

设平面 ECD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0.$$

$$\therefore \begin{cases} 2x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 0 \\ -x + \sqrt{2}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } z = 1, \text{ 则 } x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{6}.$$

故 $\vec{n} = (\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 1)$ 为平面 ECD 的一个法向量.

$$\text{则 } \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{SC} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{-4\sqrt{2}}{3 \times 2\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

$\therefore$ 直线 SC 与平面 ECD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

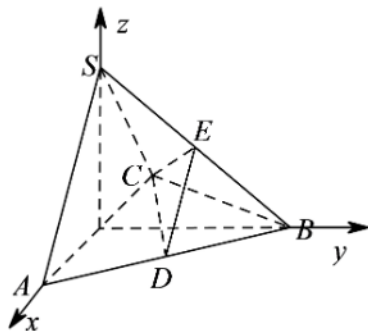
$$(3) \text{ 由 (2) 可知 } \vec{n} = (\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 1) \text{ 为平面 } ECD \text{ 的一个法向量,}$$

而 $\overrightarrow{OS} = (0, 0, 2\sqrt{2})$, 为平面 BCD 的一个法向量.

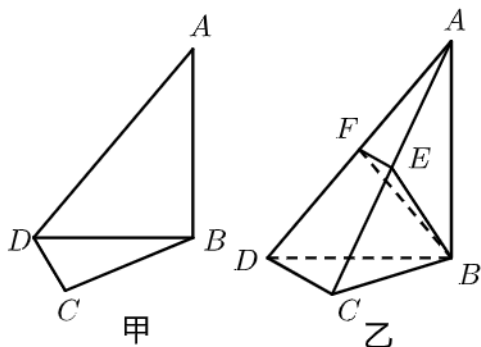
设二面角 $E-CD-B$ 的大小为 θ , 易知二面角 $E-CD-B$ 是锐角,

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OS}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{OS}|} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

$\therefore$ 二面角的余弦值等于 $\frac{1}{3}$.



如图甲，在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ADC = 105^\circ$ ， $AB = BD$ ，现将四边形 $ABCD$ 沿 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BDC （如图乙），设点 E 、 F 分别为棱 AC 、 AD 的中点。



- (1) 求证： $DC \perp$ 平面 ABC 。
- (2) 求 BF 与平面 ABC 所成角的正弦。
- (3) 求二面角 $B - EF - A$ 的余弦。

答案

- (1) 答案见解析。
- (2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。
- (3) $-\frac{1}{7}$ 。

解析

- (1) 在图甲中 $\because AB = BD$ 且 $\angle A = 45^\circ \therefore \angle ADB = 45^\circ$ ， $\angle ABD = 90^\circ$

即 $AB \perp BD$ ；

在图乙中， $\because$ 平面 $ABD \perp$ 平面 BDC ，且平面 $ABD \cap$ 平面 $BDC = BD$ ；

$\therefore AB \perp$ 底面 BDC ， $\therefore AB \perp CD$ 。

又 $\angle DCB = 90^\circ$ ， $\therefore DC \perp BC$ ，且 $AB \cap BC = B$ ；

$\therefore DC \perp$ 平面 ABC 。

- (2) 解法1： $\because E$ 、 F 分别为 AC 、 AD 的中点；

$\therefore EF \parallel CD$ ，又由(1)知， $DC \perp$ 平面 ABC ，

$\therefore EF \perp$ 平面 ABC ，垂足为点 E ；

$\therefore \angle FBE$ 是 BF 与平面 ABC 所成的角；

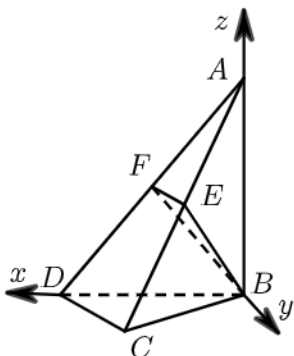
在图甲中， $\because \angle ADC = 105^\circ$ ， $\therefore \angle BDC = 60^\circ$ ， $\angle DBC = 30^\circ$ 。

设 $CD = a$ 则 $BD = 2a$ ， $BC = \sqrt{3}a$ ， $BF = \frac{\sqrt{2}}{2}BD = \sqrt{2}a$ ， $EF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a$ 。

$\therefore$ 在 $Rt\triangle FEB$ 中， $\sin \angle FBE = \frac{EF}{FB} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

即 BF 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解法2: 如图, 以 B 为坐标原点, BD 所在的直线为 x 轴建立空间直角坐标系如下图所示,



设 $CD = a$, 则 $BD = AB = 2a$, $BC = \sqrt{3}a$, $BD = \sqrt{3}a$, $AD = 2\sqrt{2}a$;

可得 $B(0, 0, 0)$, $D(2a, 0, 0)$, $A(0, 0, 2a)$, $C\left(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$, $F(a, 0, a)$,

$\therefore \overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$, $\overrightarrow{BF} = (a, 0, a)$;

设 BF 与平面 ABC 所成的角为 θ ;

由 (1) 知 $DC \perp$ 平面 ABC ;

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{BF}|} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

(3) 由 (2) 知 $FE \perp$ 平面 ABC ,

又 $\because BE \subset$ 平面 ABC , $AE \subset$ 平面 ABC , $\therefore FE \perp BE$, $FE \perp AE$,

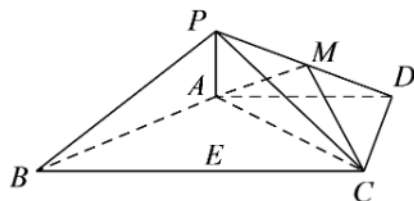
$\therefore \angle AEB$ 为二面角 $B-EF-A$ 的平面角;

在 $\triangle AEB$ 中, $AE = BE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$;

$$\therefore \cos \angle AEB = \frac{AE^2 + BE^2 - AB^2}{2AE \cdot BE} = -\frac{1}{7};$$

即所求二面角 $B-EF-A$ 的余弦为 $-\frac{1}{7}$.

- 3 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = CD = 2\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $PA = 2$, 点 M 在 PD 上.



(1) 求证: $AB \perp PC$.

- (2) 求异面直线 PB 与 DC 所成角的余弦值 .
- (3) 若二面角 $M-AC-D$ 的平面角的大小为 45° , 求直线 BM 与平面 PAC 所成角的正弦值 .

答案

(1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

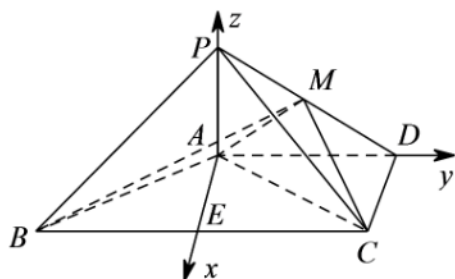
(3) $\frac{5}{9}\sqrt{3}$.

解析

(1) 取 BC 中点为 E , 连接 AE ,

由题意得 $EC = AD$, $EC \parallel AD$, 所以四边形 $AECD$ 为平行四边形 , 故 $AE \perp BC$, 如图

建立空间直角坐标系 $A-xyz$,



则 $A(0, 0, 0)$, $B(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$, $C(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, $D(0, 2\sqrt{2}, 0)$,

$P(0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{PC} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2)$,

因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$, 所以 $AB \perp PC$.

(2) $\overrightarrow{PB} = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -2)$, $\overrightarrow{DC} = (2\sqrt{2}, 0, 0)$,

设异面直线 BP 与 CD 所成角为 α ,

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} = \frac{\sqrt{10}}{5} ,$$

故 PB 与 PC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3) 设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PD} = (0, 2\sqrt{2}\lambda, -2\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)

易知 $M = (0, 2\sqrt{2}\lambda, 2 - 2\lambda)$,

设面 AMC 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,

$\overrightarrow{AC} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{AM} = (0, 2\sqrt{2}\lambda, 2 - 2\lambda)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases} , \text{ 即 } \begin{cases} 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0 \\ 2\sqrt{2}\lambda y + (2 - 2\lambda)z = 0 \end{cases} ,$$

取 $y = \sqrt{2}$, 得 $\vec{n}_1 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\lambda}{\lambda - 1}\right)$,

设面 ACD 的一个法向量 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$,

$$\text{由 } |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left| \frac{2\lambda}{\lambda-1} \right|}{\sqrt{4 + \left(\frac{2\lambda}{\lambda-1} \right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 即 $M(0, \sqrt{2}, 1)$, 故 $\vec{BM} = (-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 1)$,

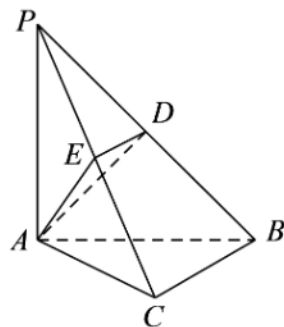
面 PAC 的一个法向量 $\vec{n}_3 = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$,

设 BM 与面 PAC 所成角为 θ ,

$$\text{由 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{BM}, \vec{n}_3 \rangle| = \frac{|\vec{BM} \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{BM}| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{5}{9}\sqrt{3},$$

故 BM 与面 PAC 所成角正弦为 $\frac{5}{9}\sqrt{3}$.

- 4 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , 点 D, E 分别在棱 PB, PC 上, $PA = AB = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$, 且 $DE \parallel BC$.



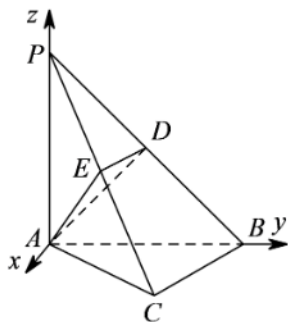
- (1) 求证: $BC \perp$ 平面 PAC .
- (2) 当点 D 为 PB 的中点时, 求 AD 与平面 PAC 所成角的正切值.
- (3) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角? 并说明理由.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) $\frac{\sqrt{7}}{7}$.
- (3) 存在点 $E\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}, \frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right)$, 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角.

解析

- (1) 如图, 以 A 为原点, 过 A 在平面 ABC 内作 AB 的垂线为 x 轴, AB 为 y 轴, AP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $P(0,0,2)$,

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), \overrightarrow{PA} = (0,0,2),$$

设平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \end{cases}, \text{则} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases},$$

取 $y = -1$, 得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 0)$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}\vec{n}, \therefore \overrightarrow{BC} // \vec{n},$$

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

(2) $\because D$ 为 PB 的中点, $D(0,1,1)$, $\therefore \overrightarrow{AD} = (0,1,1)$,

$\therefore$ 平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 0)$,

设 AD 与平面 PAC 所成角为 θ ,

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}, \tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

$\therefore AD$ 与平面 PAC 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

(3) 设存在点 E , 且 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PC} = \left(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, -2\lambda\right)$,

$$\text{则} \overrightarrow{PD} = \lambda \overrightarrow{PB} = (0, 2\lambda, -2\lambda),$$

$$\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, 2-2\lambda\right), D(0, 2\lambda, 2-2\lambda), \lambda \in (0, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \left(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, 2-2\lambda\right), \overrightarrow{DE} = \left(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, 0\right),$$

设平面 ADE 的一个法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}a + \frac{3\lambda}{2}b + (2-2\lambda)c = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}a - \frac{\lambda}{2}b = 0 \end{cases},$$

$$\text{取} y = 1, \text{得} \vec{m} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right),$$

设平面 PDE 的法向量 $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{p} \cdot \vec{PD} = 2\lambda y_1 - 2\lambda z_1 = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{PE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda x_1 - \frac{3\lambda}{2}y_1 - 2\lambda z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 得 } \vec{p} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 1 \right),$$

$\therefore$ 二面角 $A-DE-P$ 为直二面角,

$$\therefore \vec{m} \cdot \vec{p} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{\lambda}{\lambda-1} = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{4}{7} \in (0, 1),$$

$\therefore$ 存在点 $E\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}, \frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right)$, 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角.

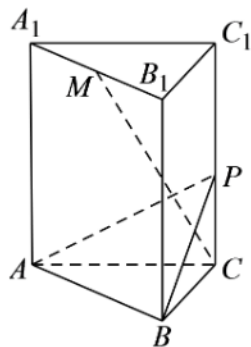
二、动点问题



例2

5

如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为4正三角形, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AA_1 = 2\sqrt{6}$, M 为 A_1B_1 的中点.



- (1) 求证: $MC \perp AB$.
- (2) 在棱 CC_1 上是否存在点 P , 使得 $MC \perp$ 平面 ABP ? 若存在, 确定点 P 的位置; 若不存在, 说明理由.
- (3) 若点 P 为 CC_1 的中点, 求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值.

答案

(1) 证明见解析.

(2) P 为线段 CC_1 的中点.

(3) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

解析

(1) 取 AB 中点 O , 连接 OM , OC .

$\because M$ 为 A_1B_1 中点, $\therefore MO \parallel A_1A$,

又 $A_1A \perp$ 平面 ABC , $\therefore MO \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore MO \perp AB$.

$\because \triangle ABC$ 为正三角形, $\therefore AB \perp CO$.

又 $MO \cap CO = O$, $\therefore AB \perp$ 平面 OMC .

又 $MC \subset$ 平面 OMC , $\therefore AB \perp MC$.

(2) 以 O 为原点, 建立空间直角坐标系. 如图.

依题意 $O(0, 0, 0)$, $A(-2, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $C(0, 0, 2\sqrt{6})$.

设 $P(0, 2\sqrt{3}, t)$ ($0 \leq t \leq 2\sqrt{6}$),

则 $\overrightarrow{MC} = (0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{6})$, $\overrightarrow{AB} = (4, 0, 0)$, $\overrightarrow{OP} = (0, 2\sqrt{3}, t)$.

要使直线 $MC \perp$ 平面 ABP , 只要 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

即 $12 - 2\sqrt{6}t = 0$, 解得 $t = \sqrt{6}$.

$\therefore P$ 的坐标为 $(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

$\therefore$ 当 P 为线段 CC_1 的中点时, $MC \perp$ 平面 ABP .

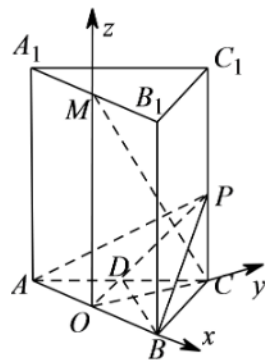
(3) 取线段 AC 的中点 D , 则 $D(-1, \sqrt{3}, 0)$, 易知 $DB \perp$ 平面 A_1ACC_1 ,

故 $\overrightarrow{DB} = (3, -\sqrt{3}, 0)$ 为平面 PAC 的一个法向量.

又由 (2) 知 $\overrightarrow{MC} = (0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{6})$ 为平面 PAB 的一个法向量.

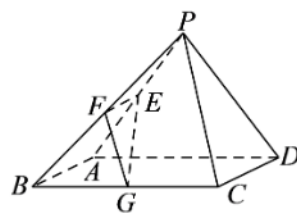
设二面角 $B-AP-C$ 的平面角为 α , 则 $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{MC}| |\overrightarrow{DB}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

$\therefore$ 二面角 $B-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



6

已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $\triangle PAD$ 是正三角形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, E, F, G 分别是 PA, PB, BC 的中点.



- (1) 求证： $EF \perp$ 平面 PAD .
- (2) 求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的大小 .
- (3) 线段 PD 上是否存在一个动点 M , 使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 若存在 , 求线段 PM 的长度 , 若不存在 , 说明理由 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{\pi}{3}$.
- (3) 不存在这样的 M .

解析

- (1) $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AB \perp AD$,

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD ,

又 $\because EF \parallel AB$,

$\therefore EF \perp$ 平面 PAD .

- (2) 取 AD 中点 O , 连结 PO ,

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

$PO \perp AD$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$,

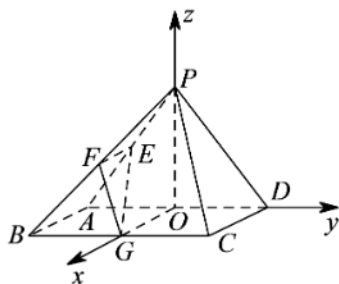
如图以 O 点为原点分别以 OG 、 OD 、 OP 所在直线为 x 轴 y 轴 z 轴建立空间直角坐标系 :

$\therefore O(0, 0, 0)$, $A(0, -2, 0)$, $B(4, -2, 0)$, $C(4, 2, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $G(4, 0, 0)$, $P(0, 0, 2\sqrt{3})$,

$E(0, -1, \sqrt{3})$, $F(2, -1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{EF} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{EG} = (4, 1, -\sqrt{3})$,

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x + y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

$\therefore \vec{m} = (0, \sqrt{3}, 1)$,



又平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

设平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 $\frac{\pi}{3}$.

(3) 设 $\vec{PM} = \lambda \vec{PD}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\vec{GM} = \vec{GP} + \vec{PM} = \vec{GP} + \lambda \vec{PD}$,

$$\therefore \vec{GM} = (-4, 2\lambda, 2\sqrt{3}(1-\lambda)),$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{6} = |\cos \langle \vec{GM}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{GM} \cdot \vec{m}|}{|\vec{GM}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{16+4\lambda^2+12(1-\lambda)^2}} = \frac{1}{2},$$

即 $2\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 无解,

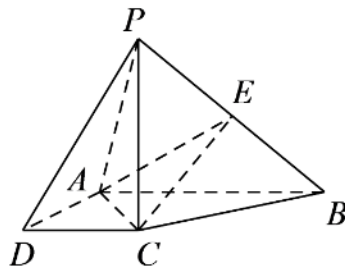
$\therefore$ 不存在这样的 M .



练2

7

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, $AB = 2AD = 2CD = 4$, $PC = 2a$, E 是 PB 的中点.



(1) 求证: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBC .

(2) 若二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求直线 PA 与平面 EAC 所求角的正弦值.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

解析

(1) $\because PC \perp \text{平面} ABCD, AC \subset \text{平面} ABCD, \therefore AC \perp PC$.

因为 $AB = 4, AD = CD = 2$, 所以 $AC = BC = 2\sqrt{2}$, 所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 所以 $AC \perp BC$,

又 $BC \cap PC = C$, 所以 $AC \perp \text{平面} PBC$.

因为 $AC \subset \text{平面} EAC$, 所以 $\text{平面} EAC \perp \text{平面} PBC$.

(2) 如图,

以点 C 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CP}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系,

则 $C(0, 0, 0), A(2, 2, 0), B(2, -2, 0)$.

设 $P(0, 0, 2a)(a > 0)$, 则 $E(1, -1, a)$,

$\overrightarrow{CA} = (2, 2, 0), \overrightarrow{CP} = (0, 0, 2a), \overrightarrow{CE} = (1, -1, a)$,

取 $\vec{m} = (1, -1, 0)$, 则 $\vec{m} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{m} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$, $\vec{m}$ 为面 PAC 法向量.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为面 EAC 的法向量, 则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$,

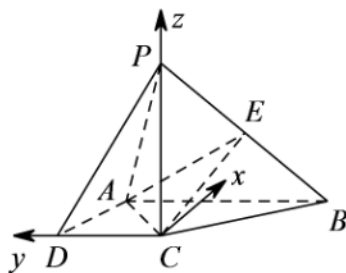
即 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + az = 0 \end{cases}$, 取 $x = a, y = -a, z = -2$, 则 $\vec{n} = (a, -a, -2)$.

依题意得 $|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $a = 2$,

于是 $\vec{n} = (2, -2, -2), \overrightarrow{PA} = (2, 2, -4)$.

设直线 PA 与平面 EAC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PA}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PA}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

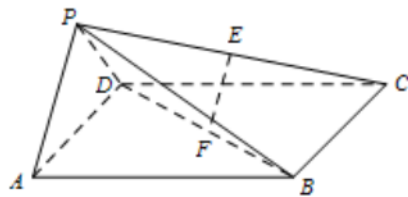
即直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



8

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 且

$PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$, E, F 分别为 PC, BD 的中点.



(1) 求证: $EF \parallel \text{平面} PAD$;

(2) 求证: 面 $PAB \perp$ 平面 PDC ;

- (3) 在线段 AB 上是否存在点 G ，使得二面角 $C-PD-G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ？说明理由。

答案

- (1) 证明见解析
(2) 证明见解析。
(3) 存在，理由见解析。

解析

- (1) 连结 $AC \cap BD = F$ ， $ABCD$ 为正方形， F 为 AC 中点，
 E 为 PC 中点 $\therefore$ 在 $\triangle CPA$ 中， $EF \parallel PA$ ，
且 $PA \subset$ 平面 PAD ， $EF \not\subset$ 平面 PAD ，
 $\therefore EF \parallel$ 平面 PAD

- (2) 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$
 $ABCD$ 为正方形， $CD \perp AD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$
所以 $CD \perp$ 平面 PAD ， $\therefore CD \perp PA$ ，
又 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$ ，所以 $\triangle PAD$ 是等腰直角三角形，
且 $\angle APD = \frac{\pi}{2}$ ，即 $PA \perp PD$ 。
 $CD \cap PD = D$ ，且 $CD, PD \subset$ 面 PDC ，
 $\therefore PA \perp$ 面 PDC
又 $PA \subset$ 面 PAB ，
 $\therefore$ 面 $PAB \perp$ 面 PDC 。

- (3) 如图，取 AD 的中点 O ，连结 OP, OF 。

$\because PA = PD$ ， $\therefore PO \perp AD$ 。

$\therefore$ 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ，

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$

，

而 O, F 分别为 AD, BD 的中点， $\therefore OF \parallel AB$ ，又 $ABCD$ 是正方形，故 $OF \perp AD$ 。

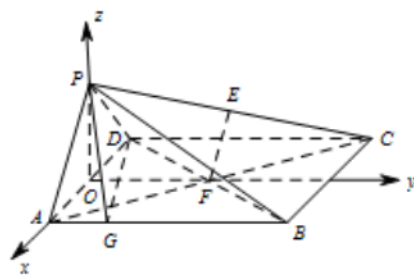
$\because PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$ ， $\therefore PA \perp PD, OP = OA = 1$ 。

以 O 为原点，直线 OA, OF, OP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则有 $A(1, 0, 0)$ ， $F(0, 1, 0)$ ， $D(-1, 0, 0)$ ， $P(0, 0, 1)$ 。

若在 AB 上存在点 G 使得二面角 $C-PD-G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ，连结 PG, DG

设 $G(1, a, 0) (0 \leq a \leq 2)$ 。



由(II)知平面 PDC 的法向量为 $\overrightarrow{PA} = (1, 0, -1)$.

设平面 PGD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$. $\because \overrightarrow{DP} = (1, 0, 1), \overrightarrow{GD} = (-2, -a, 0)$,

$$\therefore \text{由 } \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{GD} = 0 \text{ 可得 } \begin{cases} x + 0 \cdot y + z = 0 \\ -2 \cdot x - a \cdot y + 0 \cdot z = 0 \end{cases},$$

令 $x = 1$, 则 $y = -\frac{2}{a}, z = -1$,

$$\text{故 } \vec{n} = \left(1, -\frac{2}{a}, -1\right),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PA} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{PA}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{2 + \frac{4}{a^2}}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \frac{4}{a^2}}} = \frac{1}{3},$$

解得, $a = \frac{1}{2}$.

所以, 在线段 AB 上存在点 $G\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, 使得二面角 $C - PD - G$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

三、空间中的距离

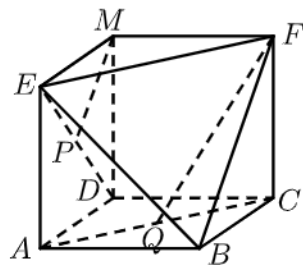
过空间不在平面 α 内一点 O 做平面 α 的垂线, 垂足为 A , 另过 O 作 OB 交 α 于 B , 且 OA 与 OB 不

重合, 设平面 α 的法向量为 $\vec{m}$, OB 与平面 α 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\vec{m}| |\overrightarrow{OB}|}$, 于是点 O 到平

$$\text{面 } \alpha \text{ 的距离 } |OA| = |\overrightarrow{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\vec{m}|}$$

例3

- 9 如图所示, 已知四边形 $ABCD$ 、 $EADM$ 和 $MDCF$ 都是边长为 a 的正方形, 点 P, Q 分别是 ED 和 AC 的中点. 求: P 点到平面 EFB 的距离.



答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

解析 利用等体积法

方法一： $V_{P-BEF} = V_{F-BPE}$ ，其中 $S_{\triangle BPE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BEF}$ ，

接下来求解等腰三角形 EFQ 中 EQ 边上的高，取一半即为 P 到平面 BEF 的距离。

方法二：把问题想得更深入一些，事实上，将图形补全，

变为一个正方体， $P \in$ 平面 MAC ，而容易得出平面 $MAC \parallel$ 平面 BEF ，

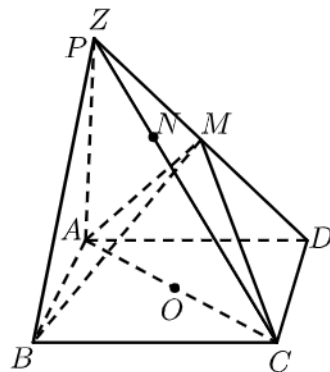
接下来求解面面距离，读者可以研究一下，

该面面距离事实上等于体对角线长度的三分之一，

而且两个平面恰好将体对角线等分成三份。

10 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA = AD = 4$ ， $AB = 2$ 。

以 AC 的中点 O 为球心、 AC 为直径的球面交 PD 于点 M ，交 PC 于点 N 。



- (1) 求证：平面 $ABM \perp$ 平面 PCD ；
- (2) 求直线 CD 与平面 ACM 所成的角的正弦值；
- (3) 求点 N 到平面 ACM 的距离。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。
- (3) $\frac{10\sqrt{6}}{27}$ 。

解析

- (1) 依题设知， AC 是所作球面的直径，则 $AM \perp MC$ 。

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，则 $PA \perp CD$ ，又 $CD \perp AD$ ，

所以 $CD \perp$ 平面 PAD ，则 $CD \perp AM$ ，

所以 $AM \perp$ 平面 PCD ，

所以平面 $ABM \perp$ 平面 PCD 。

(2) 由(1)知, $AM \perp PD$, 又 $PA = AD$,

则 M 是 PD 的中点可得,

$$AM = 2\sqrt{2}, MC = \sqrt{MD^2 + CD^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{则 } S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} AM \cdot MC = 2\sqrt{6}$$

设 D 到平面 ACM 的距离为 h ,

$$\text{由 } V_{D-ACM} = V_{M-ACD} \text{ 即 } 2\sqrt{6}h = 8, \text{ 可求得 } h = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{设所求角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{h}{CD} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(3) 可求得 $PC = 6$, 因为 $AN \perp NC$, 由 $\frac{PN}{PA} = \frac{PA}{PC}$, 得 $PN = \frac{8}{3}$,

所以 $NC : PC = 5 : 9$,

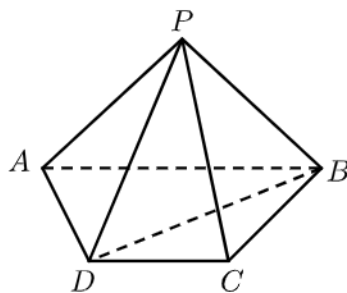
故 N 点到平面 ACM 的距离等于 P 点到平面 ACM 距离的 $\frac{5}{9}$.

又因为 M 是 PD 的中点, 则 P 、 D 到平面 ACM 的距离相等,

$$\text{由 (II) 可知所求距离为 } \frac{5}{9}h = \frac{10\sqrt{6}}{27}.$$

练3

11 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAB 是等腰直角三角形, $PA = PB$, $BC \perp$ 平面 PAB , $AB = BC = 2$, $AD = BD = \sqrt{5}$.



(1) 求证: $PA \perp$ 平面 PBC .

(2) 求顶点 C 到平面 PAD 的距离.

答案

(1) 证明见解析.

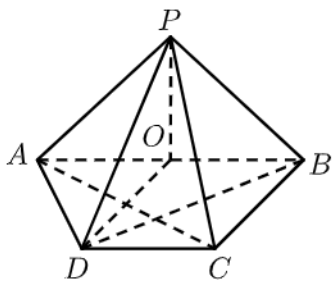
(2) $\frac{2}{3}$.

解析

(1) 由题: $PA \perp PB$, $BC \perp$ 平面 $PAB \Rightarrow BC \perp PA$,

又 $PB \cap PC = B$, 故 $PA \perp$ 平面 PBC .

(2) 取 AB 的中点 O , 连接 OP , OD ,



$\because \triangle PAB, \triangle DAB$ 均为等腰三角形,

故 $PO \perp AB, DO \perp AB$,

又 $BC \perp$ 平面 $PAB \Rightarrow$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

故 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PO \perp DO$,

易求得 $AO = BO = 1, PA = \sqrt{2}, DO = 2, PO = 1$,

故 $PD = \sqrt{5}$,

$\because OD \parallel BC, OD = BC, DO \perp AB \Rightarrow OBCD$ 为矩形,

故 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot DO = \frac{1}{2}OB \cdot DO = 1$,

$S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$,

在三棱锥 $P-ACD$ 中,

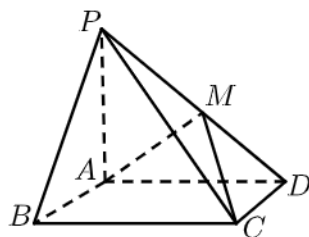
设顶点 C 到平面 PAD 的距离为 d ,

由 $V_{C-PAD} = V_{P-ACD}$,

则 $\frac{3}{2}d = 1 \Rightarrow d = \frac{2}{3}$,

故顶点 C 到平面 PAD 的距离为 $\frac{2}{3}$.

- 12 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD, PA = AD = 4, AB = 2$, M 是 PD 中点.



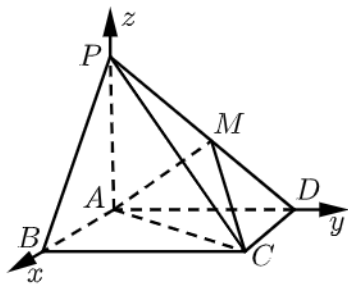
- (1) 求直线 CD 与平面 ACM 所成的角的正弦值 .
 (2) 求点 P 到平面 ACM 的距离 .

答案

- (1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 (2) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

解析

- (1) 建立如图所示的空间直角坐标系 ,



$$\because PA = AD = 4, AB = 2,$$

$$\text{则有 } A(0,0,0), C(2,4,0), D(0,4,0), P(0,0,4),$$

$\because M$ 是 PD 的中点 ,

$$\therefore M(0,2,2),$$

设平面 ACM 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{n} = (2, -1, 1),$$

$$\text{又 } \because \vec{CD} = (-2, 0, 0),$$

设直线 CD 与平面 ACM 所成的角为 θ ,

$$\text{则有 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{CD}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{\vec{CD} \cdot \vec{n}}{|\vec{CD}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

故直线 CD 与平面 ACM 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$(2) \because \vec{AP} = (0, 0, 4),$$

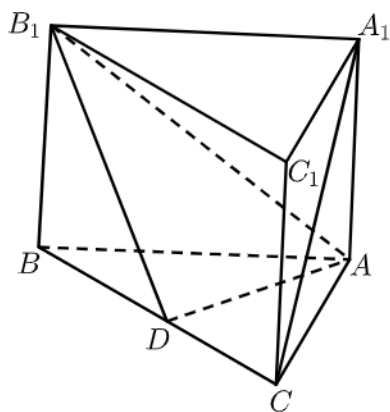
平面 ACM 的一个法向量为 $\vec{n} = (2, -1, 1)$,

设点 P 到平面 ACM 的距离为 d ,

$$\text{则有 } d = \left| \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

故点 P 到平面 ACM 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

- 13 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D 是 BC 的中点，且 $AD \perp BC$ ，四边形 ABB_1A_1 为正方形。



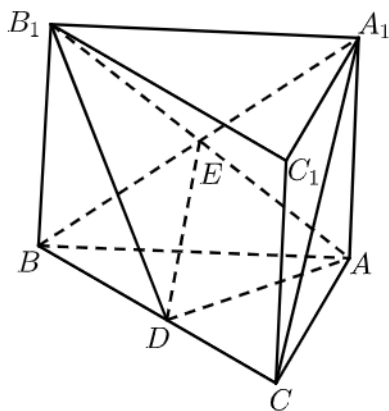
- (1) 求证： $A_1C \parallel$ 平面 AB_1D .
 (2) 若 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $BC = 4$ ，求点 A_1 到平面 AB_1D 的距离 .

答案

- (1) 证明见解析 .
 (2) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

解析

- (1) 如图，连接 BA_1 ，交 AB_1 于点 E ，连接 DE ，



由四边形 ABB_1A_1 为正方形知， E 为 AB_1 的中点，

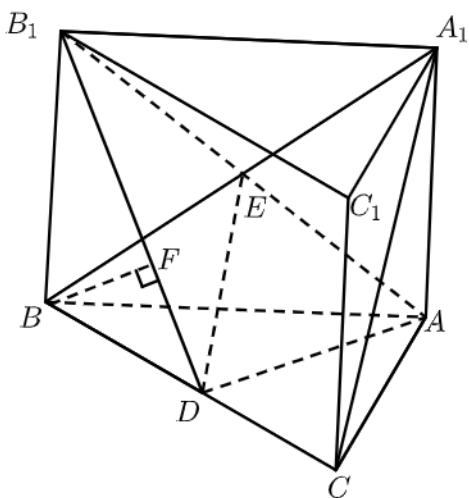
又 $\because D$ 是 BC 的中点， $\therefore DE \parallel A_1C$ ，

又 $DE \subset$ 平面 AB_1D ， $A_1C \not\subset$ 平面 AB_1D ，

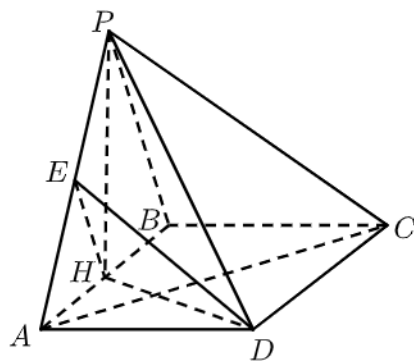
$\therefore A_1C \parallel$ 平面 AB_1D .

- (2) 由 (1) 知 E 为 AB_1 的中点， $\therefore$ 点 A_1 和 B 到平面 AB_1D 的距离相等，
 在平面 BCC_1B_1 中，过点 B 作 $BF \perp B_1D$ ，垂足为 F ，则 BF 长为所求 .
 $\because D$ 是 BC 中点， $AD \perp AB$ ， $\therefore AB = AC$ ，
 又 $\because \angle BAC = 60^\circ$ ， $\therefore \triangle ABC$ 为正三角形，则 $AB = BB_1 = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle B_1BD$ 中, $BD = 2$, $BB_1 = 4$, $B_1D = 2\sqrt{5}$,
 $\therefore BF = \frac{2 \cdot 4}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $\therefore$ 点 A 到平面 AB_1D 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



- 14 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形, 侧面 PAB 是正三角形, $AB = 2$, $BC = \sqrt{2}$,
 $PC = \sqrt{6}$. E 、 H 分别为 PA 、 AB 的中点.



- (1) 求证: $PH \perp AC$.
- (2) 求点 P 到平面 DEH 的距离.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) $\frac{\sqrt{66}}{11}$.

解析

- (1) $\because PAB$ 为正三角形, $AB = 2$,
 $\therefore PB = AB = 2$,
 $\because BC = \sqrt{2}$, $PC = \sqrt{6}$, $\therefore PC^2 = BC^2 + PB^2$
 $\therefore$ 根据勾股定理得 $BC \perp PB$,

$\because ABCD$ 为矩形, $\therefore BC \perp AB$,

$\because PB, AB \subset \text{面} PAB$ 且交于点 B , $\therefore BC \perp \text{面} PAB$,

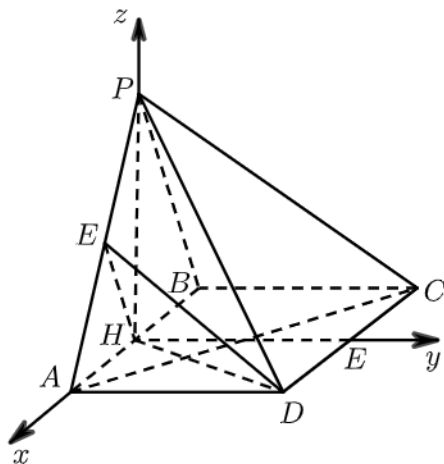
$\because BC \subset \text{面} ABCD$, $\therefore \text{面} PAB \perp \text{面} ABCD$,

$\because H$ 为 AB 的中点, PAB 为正三角形,

$\therefore PH \perp AB$, $\therefore PH \perp \text{平面} ABCD$,

$\because AC \subset \text{平面} ABCD$, $\therefore PH \perp AC$.

- (2) 如图, 取 CD 中点 E , 以 H 为原点, HA 为 x 轴, HE 为 y 轴, HP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $P(0, 0, \sqrt{3})$, $D(1, \sqrt{2}, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $E\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $H(0, 0, 0)$,

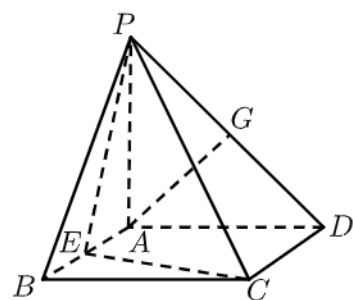
$\overrightarrow{HD} = (1, \sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{HE} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{HP} = (0, 0, \sqrt{3})$,

设平面 DEH 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{HD} = x + \sqrt{2}y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取 } y = 1, \text{ 得 } \vec{n} = \left(-\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),$$

$\therefore$ 点 P 到平面 DEH 的距离 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{HP}|}{|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{66}}{11}$.

- 15 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp \text{平面} ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PA = AB = 2$, E 是 AB 的中点, G 是 PD 的中点.



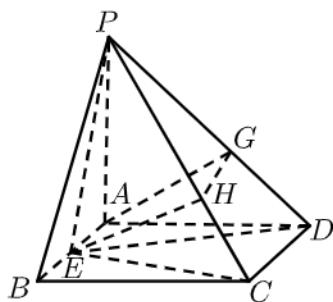
- (1) 求证： $AG \parallel$ 平面 PEC .
- (2) 求证：平面 $PCD \perp$ 平面 PEC .
- (3) 求点 D 到面 PEC 的距离 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

解析

- (1) 取 PC 中点 H ，连接 EH ， GH ，



故 GH 为 $\triangle PCD$ 中位线，

$$\therefore \underline{GH \parallel \frac{1}{2}CD},$$

$$\text{而} \underline{AE \parallel \frac{1}{2}CD},$$

$$\therefore \underline{GH \parallel AE},$$

$\therefore$ 四边形 $AEGH$ 为平行四边形，

$$\therefore \underline{AG \parallel EH}, \quad EH \subset \text{平面} PEC,$$

$$\therefore \underline{AG \parallel \text{平面} PEC}.$$

- (2) $PA = AB = 2$ ，

$$\therefore BE = AE = 1,$$

$$\therefore PE = CE = \sqrt{5},$$

$$\therefore EH \perp PC,$$

而 $AG \perp PD$, $AG // EH$,

$\therefore EH \perp PD$,

$\therefore EH \perp$ 平面 PDC ,

$\therefore EH \perp DC$,

而 $EC \perp CD$,

$\therefore CD \perp$ 平面 PEC ,

而 $CD \subset$ 平面 PCD ,

$\therefore$ 平面 $PCD \perp$ 平面 PEC .

(3) 利用等体积法 .

$$V_{P-CED} = V_{D-PEC} ,$$

$$V_{P-CED} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3} ,$$

$$V_{D-PEC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} h ,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6}}{3} h = \frac{4}{3} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{6}}{3} .$$