

空间向量的运算

一、空间向量线性运算

1. 定义

与平面向量一样，在空间，我们把具有大小和方向的量叫做空间向量。

【补充说明】

在空间向量体系中，下列概念与平面向量是对应等同的：

零向量、向量的长度或模、基线、共线（平行）向量。

2. 加减运算

与平面向量类似（三角形法则、平行四边形法则）

(1) 加法交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(2) 加法结合律： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3. 数乘运算

(1) 向量数乘：同平面向量一样，我们规定实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\vec{a}$ 。

① $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ ；

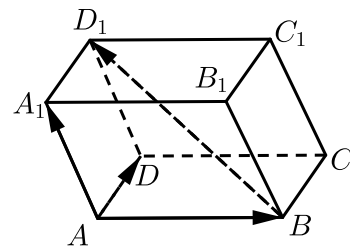
② 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与向量 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与向量 $\vec{a}$ 的方向相反；当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

(2) 向量数乘运算律：设 λ, μ 为实数，那么：

① $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ；② $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ；③ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 。

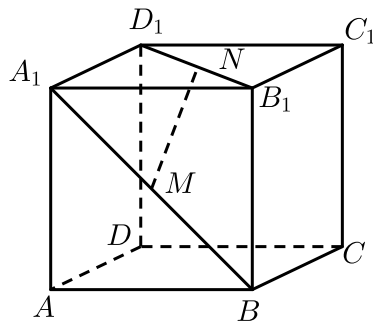
例1

1. 如图，在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ ，则用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 可表示向量 $\overrightarrow{BD_1}$ 等于（ ）。



- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 B. $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
 C. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
 D. $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

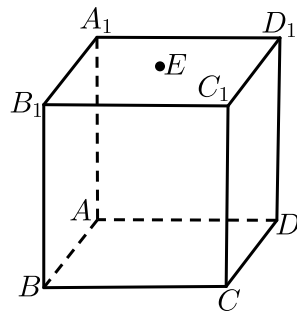
2. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M ， N 分别是面对角线 A_1B 与 B_1D_1 的中点，若 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{DD_1} = \vec{c}$ ，则 $\overrightarrow{MN} = (\quad)$.



- A. $\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{a})$
 B. $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$
 C. $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$
 D. $\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$

🔔 练1

3. 如图所示，已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是上底面 A_1C_1 的中心，化简下列向量表达式，并在图中标出化简结果的向量 .



- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 (2) $\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列各式中运算结果为 $\overrightarrow{BD_1}$ 的是() .

① $(\overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{A_1A}) - \overrightarrow{AB}$;

② $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) - \overrightarrow{D_1C_1}$;

③ $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{DD_1}$;

④ $(\overrightarrow{B_1D_1} - \overrightarrow{A_1A}) + \overrightarrow{DD_1}$.

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①④

5. 在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{c}$, $\overrightarrow{CD} = 5\vec{a} + 6\vec{b} - 8\vec{c}$, 对角线 AC , BD 的中点分别为 P , Q , 则 $\overrightarrow{PQ} =$ _____ .

6. 已知空间四边形 $OABC$, 其对角线 OB 、 AC , M 、 N 分别是边 OA 、 CB 的中点, 点 G 在线段 MN 上, 且使 $MG = 2GN$, 用向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$ 是()

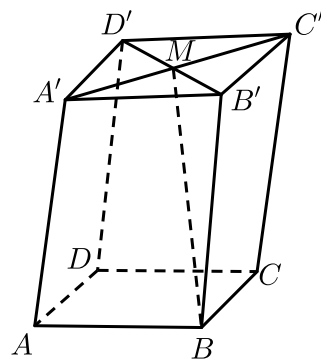
A. $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

7. 如图, 在平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{BM} =$ () .



A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

二、空间向量基本定理

如果三个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 不共面, 那么对空间任一向量 $\vec{p}$, 存在一个唯一的有序实数组 x, y, z , 使

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

【补充说明】

由上述定理可知，如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的线性组合 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ 能生成所有的空间向量，这时 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 叫做空间的一个**基底**，记作 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ，其中 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都叫做**基向量**。

据此，任意三个不共面的空间向量都可以构成空间的一个基底。

【共面向量】

1、定义：通常我们把平行于同一平面的向量，叫做共面向量。

2、共面向量定理：如果两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线，那么向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) ，使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ 。

3、共面向量定理的推论：

①推论1：如图，空间一点P位于平面MAB内的充要条件是存在有序实数对 (x, y) ，使

$$\vec{MP} = x\vec{MA} + y\vec{MB}, (*)$$

或对空间任一定点O，有 $\vec{OP} = \vec{OM} + x\vec{MA} + y\vec{MB}$ 。

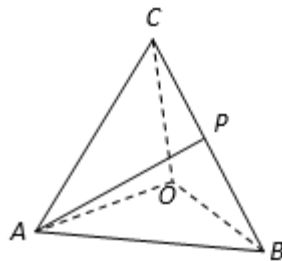
在平面MAB内，点P对应的有序实数对 (x, y) 是唯一的(*)式叫做平面MAB的向量表示式。

②推论2：空间中的一点P与不共线的三点A, B, C共面的充要条件是存在唯一的有序实数组 $\{x, y, z\}$ ，使得 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ ，且 $x + y + z = 1$ (其中O为空间任一点)。

4、如果三个不共面的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足等式 $k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = \vec{0}$ ，那么 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。这是共面向量定理的延伸。

例2

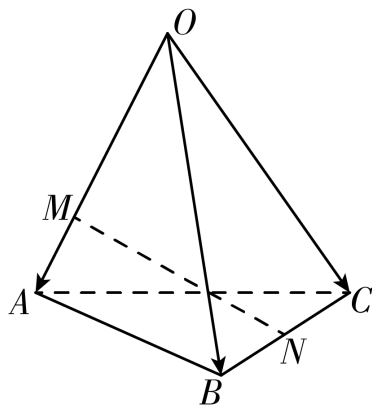
8. 在四面体O-ABC中，点P为棱BC的中点。设 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ ，那么向量 $\vec{AP}$ 用基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 可表示为()。



- A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
- B. $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
- C. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
- D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

练2

9. 如图, 空间四边形 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 点 M 在 $\overrightarrow{OA}$ 上, 且 $OM = 2MA$, 点 N 为 BC 中点, 则 $\overrightarrow{MN} = (\quad)$.



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
 B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
 C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
 D. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

例3

10. 已知向量 $\vec{a} = (1, x, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, 0, 0)$, 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 共面, 则 x 等于 ().
 A. -1 B. 1 C. 1或-1 D. 1或0
11. 对于空间任意一点 O 和不共线的三点 A 、 B 、 C , 有如下关系: $6\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$, 则 ().
 A. 四点 O 、 A 、 B 、 C 必共面
 B. 四点 P 、 A 、 B 、 C 必共面
 C. 四点 O 、 P 、 B 、 C 必共面
 D. 五点 O 、 P 、 A 、 B 、 C 必共面

练3

12. 在下列条件中, 使 M 与 A 、 B 、 C 一定共面的是 ().
 A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$
 B. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$
 C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
 D. $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

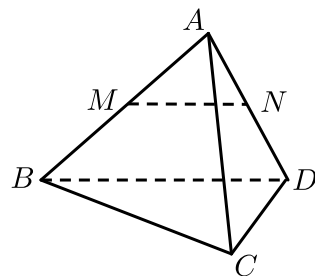
13. A, B, C 不共线, 对空间任意一点 O , 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$, 则 P, A, B, C 四点 () .
- A. 不共面 B. 共面 C. 不一定共面 D. 无法判断是否共面

三、空间向量数量积

已知空间两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 则 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫做 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积, 记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$. 其中, 两个夹角的取值范围是 $0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$.

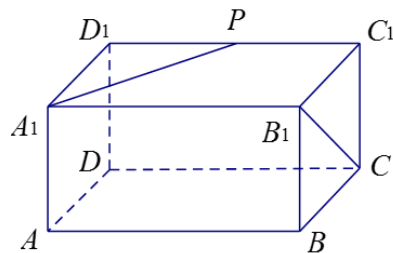
例4

14. 棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$ 的值为 () .
- A. -1 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
15. 如图所示, 在空间四边形 $ABCD$ 中, 每条边的长度和两条对角线的长度都等于1, M, N 分别为 AB, AD 的中点, 则 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DC} =$ _____ .



练4

16. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $AD = AA_1 = 1, AB = 2$, P 是 C_1D_1 的中点, 则 $\overrightarrow{B_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1P}$ 所成角的大小为 _____, $\overrightarrow{B_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1P} =$ _____ .



17. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是空间中两两垂直的单位向量, $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{n} = \vec{b} - \vec{c}$, 则 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 _____ .

四、空间向量坐标运算

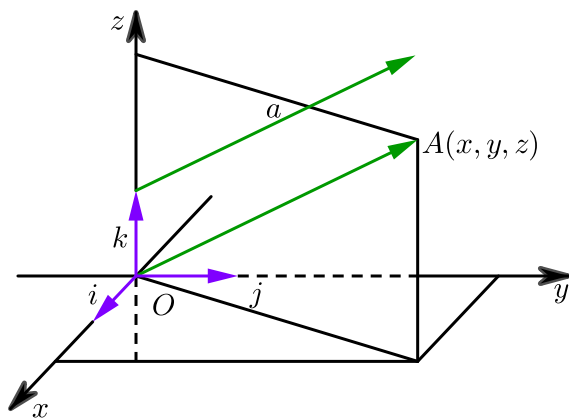
1. 空间直角坐标系

(1) 单位正交基底

若空间的一个基底的三个基向量互相垂直，且长度都为1，则这个基底叫做单位正交基底，通常用 $\{i, j, k\}$ 表示.

(2) 空间直角坐标系的建立

在空间中选定一个单位正交基底 $\{i, j, k\}$ ，其中 i, j, k 有公共起点 O ，如图所示，以点 O 为原点，分别以 i, j, k 的方向为正方向建立 x 轴， y 轴， z 轴，这时我们说建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$ ，点 O 叫做原点，向量 i, j, k 都叫做坐标向量，通过每两个坐标轴的平面叫做坐标平面，分别称为 xOy 平面， yOz 平面， zOx 平面.



(3) 空间直角坐标系的画法作空间直角坐标系 $O-xyz$ ，一般使 $\angle xOy=135^\circ$ (或 45°)， $\angle yOz=90^\circ$.

(4) 向量的坐标表示

给定一个空间直角坐标系和向量 a ，其中 i, j, k 为单位正交基底，由空间向量基本定理知，存在唯一的有序实数组 $\{x, y, z\}$ ，使 $a=xi+yj+zk$ ，

则有序实数组 $\{x, y, z\}$ 叫做向量 a 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标，即 $a=(x, y, z)$. 设 A 是空间任一点， $\vec{OA}=xi+yj+zk$ ，则 (x, y, z) 称为点 A 的坐标.

知识拓展

① 当向量 a 平行于 x 轴时，纵坐标、竖坐标都为0，即 $a=(x, 0, 0)(x \in \mathbb{R})$ ；

② 当向量 a 平行于 y 轴时，横坐标、竖坐标都为0，即 $a=(0, y, 0)(y \in \mathbb{R})$ ；

③ 当向量 a 平行于 z 轴时，横坐标、纵坐标都为0，即 $a=(0, 0, z)(z \in \mathbb{R})$ ；

④ 当向量 a 平行于 xOy 平面时，竖坐标为0，即 $a=(x, y, 0)(x, y \in \mathbb{R})$ ；

⑤ 当向量 a 平行于 yOz 平面时，横坐标为0，即 $a=(0, y, z)(y, z \in \mathbb{R})$ ；

⑥ 当向量 a 平行于 xOz 平面时，纵坐标为0，即 $a=(x, 0, z)(x, z \in \mathbb{R})$.

2. 坐标运算

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\textcircled{1} \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\textcircled{2} \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2);$$

$$\textcircled{3} \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1); \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

④

$$(1) \vec{a} // \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases};$$

$$(2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

$$\textcircled{5} \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

⑥一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

如: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$,

$$\text{且 } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$\text{或 } d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例5

18. 已知向量 $\vec{a} = (3, 5, 1), \vec{b} = (2, 2, 3), \vec{c} = (4, -1, -3)$, 则向量 $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$ 的坐标为 _____.

19. 在空间直角坐标系中, 已知点 $P(x, y, z)$, 给出下列4条描述:

①点 P 关于 x 轴的对称点的坐标是 $(x, -y, z)$,

②点 P 关于 yOz 平面的对称点的坐标是 $(x, -y, -z)$,

③点 P 关于 y 轴的对称点的坐标是 $(x, -y, z)$,

④点 P 关于原点的对称点的坐标是 $(-x, -y, -z)$.

其中正确的个数是 ().

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

20. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 点 $A(1, 2, 3)$ 关于坐标平面 xOy 对称点的坐标为 _____, 则点 A 与点 $B(2, -1, 2)$ 之间的距离为 _____.

21. 已知空间向量 $\vec{a} = (2, 0, 1), \vec{b} = (-2, 1, 0)$, 那么 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____.

练5

22. 在空间直角坐标系中, 点 B 是 $A(1, 2, 3)$ 在 yOz 坐标平面内的射影, O 为坐标原点, 则 $|OB|$ 等于 () .

A. $\sqrt{14}$

B. $\sqrt{13}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{11}$

23. 已知 $\vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 0)$, $\vec{a} - \vec{b} = (0, 3, -2)$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 的值为 () .

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

24. 已知 $A(2, -5, 1)$, $B(2, -2, 4)$, $C(1, -4, 1)$, 则向量 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角等于 _____ .

25. 已知 $M_1(2, 5, -3)$, $M_2(3, -2, -5)$, 设在线段 M_1M_2 的一点 M 满足 $\vec{M_1M_2} = 4\vec{MM_2}$, 则向量 $\vec{OM}$ 的坐标为 _____ .

26. 若 $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (-3, 1, -4)$, 则 $|\vec{a} - 2\vec{b}| =$ _____ .